

Критерий структурной стабильности четвёрок матриц, связанных с вырожденными линейными системами

М.-И. ГАРСИЯ

Политехнический университет Каталонии
e-mail: maria.isabel.garcia@upc.edu

М.-Д. МАГРЕТ

Политехнический университет Каталонии
e-mail: m.dolors.magret@upc.edu

С. ТАРРАГОНА

Политехнический университет Каталонии
e-mail: sonia.tarragona@upc.edu

УДК 512.643

Ключевые слова: структурная стабильность, вырожденные линейные системы.

Аннотация

Понятие структурной стабильности было введено А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным в 1937 г. Структурно стабильными называются элементы, поведение которых не меняется при малых возмущениях. Структурная стабильность в теории динамических систем активно изучалась многими авторами, работающими в теории контроля. В этой работе нами получены условия, позволяющие характеризовать структурно стабильные линейные вырожденные системы с постоянным временем при рассмотрении различных отношений эквивалентности на таких системах.

Abstract

M. I. García, M. D. Magret, S. Tarragona, A criterion for structural stability of quadruples of matrices related to singular linear systems, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 3, pp. 49–56.

The concept of structural stability, first introduced by A. A. Andronov and L. S. Pontryagin in 1937 in the qualitative theory of dynamical systems (structurally stable elements being those whose behavior does not change when applying small perturbations), has been widely studied by many authors in control theory. In this work, we present conditions to characterize structurally stable linear time-invariant singular systems when considering different equivalence relations among them.

1. Введение

Понятие структурной стабильности определяется в [6] следующим образом: дано топологическое пространство X и заданное на нём отношение эквивалентности. Элемент пространства X называется структурно стабильным, если

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 3, с. 49–56.

© 2005 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

существует его окрестность, лежащая в том же классе эквивалентности, что и этот элемент.

Если X является дифференцируемым многообразием и отношение эквивалентности определено действием группы Ли $\mathcal{G}$, действующей на X так, что орбиты тоже дифференцируемые многообразия, то свойство быть структурно стабильным эквивалентно тому, что соответствующая орбита имеет максимальную размерность.

Обозначая через $\text{Stab}(x)$ стабилизатор элемента $x \in X$ при действии группы $\mathcal{G}$, получим, что рассматриваемое свойство также эквивалентно следующему: $\dim \text{Stab}(x) = \dim \mathcal{G} - \dim X$. В разделе 2 мы ещё раз напомним эти основополагающие результаты.

В разделе 3 мы рассмотрим случай, когда топологическое пространство X является множеством

$$M = M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \times M_{n \times m}(\mathbb{C}) \times M_{p \times n}(\mathbb{C})$$

четвёрок матриц, определяющих вырожденные линейные динамические системы с постоянным временем, задаваемые следующим образом:

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases}$$

Аналогичные рассуждения могут быть проведены с заменой $\mathbb{C}$ на $\mathbb{R}$. Эти рассуждения можно применять в случае, когда коэффициенты матриц даны с параметрической неопределённостью.

В разделе 4 мы получаем первую характеристику структурно стабильных четвёрок матриц, рассматривая два различных отношения эквивалентности на M , называемые подобием с обратной связью и эквивалентностью с обратной связью. В разделе 5 мы рассмотрим отображение STAB, определённое формулой $\text{STAB}(x) = T_I(\text{Stab}(x))$, где $T_I(\text{Stab}(x))$ — касательное пространство к стабилизатору точки $x \in X$ в единичном элементе группы $\mathcal{G}$. Мы докажем, что $T_I(\text{Stab}(x))$ может быть охарактеризовано как ядро матрицы $M(x)$. Тогда структурно стабильные элементы окажутся точками, в которых отображение STAB дифференцируемо.

2. Предварительные понятия

В этом разделе мы напомним определение структурной стабильности из работы Уиллемса [6], а также приведём ряд эквивалентных условий.

Пусть X — топологическое пространство. Рассмотрим отношение эквивалентности, заданное на X .

Определение 1. Элемент $x \in X$ называется *структурно стабильным* тогда и только тогда, когда существует такая открытая окрестность $U \subset X$ элемента x , что все её элементы эквивалентны x .

Предположим, что X — дифференцируемое многообразие, а отношение эквивалентности на X индуцировано действием группы Ли $\mathcal{G}$, действующей на X так, что орбиты тоже являются дифференцируемыми многообразиями.

Обозначим через $T_x\mathcal{O}(x)$ касательное пространство в точке $x \in X$ к орбите $\mathcal{O}(x)$ точки x и рассмотрим произвольное эрмитово скалярное произведение на X .

Предложение 1. В случае, когда выполнены сформулированные выше предположения, следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $x \in X$ является структурно стабильным;
- 2) $\dim \mathcal{O}(x) = \dim X$;
- 3) $\dim T_x\mathcal{O}(x) = \dim X$;
- 4) $\dim T_x\mathcal{O}(x)^\perp = 0$.

Доказательство. Элемент $x \in X$ является структурно стабильным тогда и только тогда, когда существует его окрестность, лежащая в одной с ним орбите. Следовательно, его орбита должна быть открытым подмногообразием, поэтому её размерность равна $\dim X$. Последнее утверждение следует из того, что $\dim T_x\mathcal{O}(x) + \dim T_x\mathcal{O}(x)^\perp = \dim X$. $\square$

3. Основные определения

Рассмотрим дифференцируемое многообразие M , состоящее из всех четвёрок матриц

$$(E, A, B, C) \in M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \times M_{n \times m}(\mathbb{C}) \times M_{p \times n}(\mathbb{C}),$$

определяющих вырожденные линейные динамические системы с постоянным временем.

Пусть $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ — группы Ли

$$\mathcal{G}_1 = \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{Gl}_m(\mathbb{C}) \times \mathrm{Gl}_p(\mathbb{C}) \times M_{m \times n}(\mathbb{C}) \times M_{m \times n}(\mathbb{C}) \times M_{n \times p}(\mathbb{C}),$$

$$\mathcal{G}_2 = \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{Gl}_m(\mathbb{C}) \times \mathrm{Gl}_p(\mathbb{C}) \times M_{m \times n}(\mathbb{C}) \times M_{m \times n}(\mathbb{C}) \times M_{n \times p}(\mathbb{C}),$$

действующие на M по правилу

$$\begin{aligned} \alpha_1: \mathcal{G}_1 \times M &\rightarrow M, \quad \alpha_1((P, R, S, U, V, W), (E, A, B, C)) = \\ &= (P^{-1}EP + P^{-1}BU, P^{-1}AP + P^{-1}BV + WCP, P^{-1}BR, SCP) \\ \alpha_2: \mathcal{G}_2 \times M &\rightarrow M, \quad \alpha_2((Q, P, R, S, U, V, W), (E, A, B, C)) = \\ &= (QEP + QBU, QAP + QBV + WCP, QBR, SCP). \end{aligned}$$

Для данной четвёрки $(E, A, B, C) \in M$ стабилизаторы относительно этого действия будут обозначаться через $\mathrm{Stab}_1(E, A, B, C)$ и $\mathrm{Stab}_2(E, A, B, C)$ соответственно, т. е.

$$\mathrm{Stab}_i(E, A, B, C) = \{g \in \mathcal{G}_i \mid \alpha_i(g, (E, A, B, C)) = (E, A, B, C)\}, \quad i = 1, 2.$$

4. Критерий структурной стабильности

В этом разделе мы охарактеризуем структурно стабильные четвёрки матриц относительно подобия с обратной связью и эквивалентности с обратной связью, т. е. отношений эквивалентности, индуцированных на M действием α_1 и α_2 соответственно.

Рассмотрим эрмитово произведение на M , определённое правилом

$$\langle (E, A, B, C), (X, Y, Z, T) \rangle = \text{tr}(EX^*) + \text{tr}(AY^*) + \text{tr}(BZ^*) + \text{tr}(CT^*).$$

Обозначим

$$\mathbf{L}_1 = T_I \mathcal{G}_1 = M_n(\mathbb{C}) \times M_m(\mathbb{C}) \times M_p(\mathbb{C}) \times M_{m \times n}(\mathbb{C}) \times M_{m \times n}(\mathbb{C}) \times M_{n \times p}(\mathbb{C}),$$

$$\mathbf{L}_2 = T_I \mathcal{G}_2 = M_n(\mathbb{C}) \times \mathbf{L}_1,$$

и пусть $\mathbf{Gr}(\mathbf{L}_i)$, $i = 1, 2$, — грассманово многообразие $\mathbf{L}_i$ (грассманова топология эквивалентна топологии, индуцированной интервальной метрикой, см. [3, теорема I.2.6]). Заметим, что $T_I \text{Stab}_i(E, A, B, C)$ является элементом $\mathbf{Gr}(\mathbf{L}_i)$, $i = 1, 2$.

Множество всех векторных подпространств размерности k в $\mathbf{Gr}(\mathbf{L}_i)$, которое будет обозначаться $\mathbf{Gr}_k(\mathbf{L}_i)$, также является дифференцируемым многообразием (см. [4, гл. 1, § 5]).

В [2, § 6, 7] структурно стабильные относительно подобия с обратной связью четвёрки матриц были охарактеризованы следующим образом: матрица

$$M_1(E, A, B, C) = \begin{pmatrix} I_n \otimes E - E^t \otimes I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & I_n \otimes B \\ I_n \otimes A - A^t \otimes I_n & 0 & 0 & C^t \otimes I_n & I_n \otimes B & 0 \\ -B^t \otimes I_n & I_m \otimes B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_n \otimes C & 0 & C^t \otimes I_p & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет полный ранг. Аналогичное рассуждение приводит к похожему результату для эквивалентности с обратной связью.

Предложение 2. Векторное пространство $\text{STAB}_2(E, A, B, C)$ является подпространством пространства $\mathbf{L}_2$, определённым как

$$\left\{ (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7) \mid \begin{pmatrix} X_1 & X_7 \\ 0 & X_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & A & B \\ 0 & C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & A & B \\ 0 & C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 & 0 & 0 \\ 0 & X_2 & 0 \\ X_5 & X_6 & X_3 \end{pmatrix} \right\},$$

и имеет размерность $\dim \mathcal{G}_2 - \dim \mathcal{O}_2(E, A, B, C)$, где $\mathcal{O}_2(E, A, B, C)$ обозначает орбиту четвёрки (E, A, B, C) относительно действия α_2 .

Доказательство. $\text{Stab}_2(E, A, B, C)$ является подгруппой группы $\mathcal{G}_2$, заданной следующим образом:

$$\left\{ (Q, P, R, S, U, V, W) \mid \begin{pmatrix} Q & W \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & A & B \\ 0 & C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ U & V & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & A & B \\ 0 & C & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ (Q, P, R, S, U, V, W) \mid \begin{pmatrix} Q & W \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & A & B \\ 0 & C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & A & B \\ 0 & C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P' & 0 & 0 \\ 0 & P' & 0 \\ U' & V' & R' \end{pmatrix} \right\},$$

где $P' = P^{-1}$, $R' = R^{-1}$, $U' = -R^{-1}UP^{-1}$, $V' = -R^{-1}VP^{-1}$. Таким образом, $\text{Stab}_2(E, A, B, C)$ — это

$$\left\{ (Q, P', R', S, U', V', W) \mid \begin{pmatrix} Q & W \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & A & B \\ 0 & C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & A & B \\ 0 & C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P' & 0 & 0 \\ 0 & P' & 0 \\ U' & V' & R' \end{pmatrix} \right\}.$$

Следовательно, характеристика касательного пространства к стабилизатору, написанная в условии, получена (примем во внимание, что $\mathbf{L}_2 = T_I \mathcal{G}_2$).

Поскольку орбита элемента $\mathcal{O}(E, A, B, C)$ диффеоморфна фактор-пространству $\mathcal{G}_2 / \text{Stab}_2(E, A, B, C)$, размерность касательного пространства к стабилизатору равна $\dim \mathcal{G}_2 - \dim \mathcal{O}_2(E, A, B, C)$. $\square$

В частности, согласно предложению 1 четвёрка (E, A, B, C) структурно стабильна тогда и только тогда, когда

$$\dim \mathcal{O}_2(E, A, B, C) = \dim M = 2n^2 + mn + np.$$

Это, очевидно, эквивалентно условию

$$\dim T_I \text{Stab}_2(E, A, B, C) = m^2 + p^2 + mn,$$

так как

$$\dim \mathcal{G}_2 = 2n^2 + m^2 + p^2 + 2mn + np.$$

Таким образом, четвёрка (E, A, B, C) является структурно стабильной тогда и только тогда, когда

$$T_I \text{Stab}_2(E, A, B, C) \in \mathbf{Gr}_{m^2+p^2+mn}(\mathbf{L}_2).$$

После предложения 2 можно дать следующее альтернативное описание касательного пространства к стабилизатору четвёрки.

Обозначим через $M_2(E, A, B, C)$ матрицу

$$\begin{pmatrix} E^t \otimes I_n & I_n \otimes E & 0 & 0 & I_n \otimes B & 0 & 0 \\ A^t \otimes I_n & I_n \otimes A & 0 & 0 & 0 & I_n \otimes B & C^t \otimes I_n \\ B^t \otimes I_n & 0 & I_m \otimes B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_n \otimes C & 0 & C^t \otimes I_p & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предложение 3. $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7) \in T_I \text{Stab}_2(E, A, B, C)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} \text{vec}(X_1) \\ \text{vec}(X_2) \\ \text{vec}(X_3) \\ \text{vec}(X_4) \\ \text{vec}(X_5) \\ \text{vec}(X_6) \\ \text{vec}(X_7) \end{pmatrix} \in \text{Ker } M_2(E, A, B, C).$$

Доказательство. Матричная система, введённая в предложении 2 для характеристики векторного подпространства $\text{STAB}_2(E, A, B, C)$, может быть линейаризована посредством использования произведения Кронекера и векторных операторов (см. [5, с. 406—411]), откуда следует доказываемое утверждение. $\square$

Как следствие, ранг $M_2(E, A, B, C)$ может быть связан с размерностью $T_I \text{Stab}_2(E, A, B, C)$, откуда получается критерий, характеризующий структурную стабильность.

Следствие 1. Четвёрка (E, A, B, C) является структурно стабильной тогда и только тогда, когда $M_2(E, A, B, C)$ имеет полный ранг.

5. Структурная стабильность и дифференцируемость

В этом разделе мы изложим взаимосвязь между точками дифференцируемости отображений STAB_i ($i = 1, 2$), определённых формулами

$$\begin{aligned} \text{STAB}_i: M &\rightarrow \mathbf{Gr}(\mathbf{L}_i), \\ (E, A, B, C) &\mapsto \text{STAB}_i(E, A, B, C) = T_I \text{Stab}_2(E, A, B, C), \end{aligned}$$

со структурно стабильными четвёрками.

Пусть X — дифференцируемое многообразие. Дифференцируемое семейство четвёрок матриц, параметризованное многообразием X , — это отображение

$$\begin{aligned} \Upsilon: X &\rightarrow M, \\ x &\mapsto (E(x), A(x), B(x), C(x)). \end{aligned}$$

Для $i = 1, 2$ обозначим через $\tilde{\Upsilon}_i$ отображение

$$\tilde{\Upsilon}_i = \text{STAB}_i \circ \Upsilon: X \rightarrow \mathbf{Gr}(\mathbf{L}_i).$$

Теорема 1. Семейство стабилизаторов $\tilde{\Upsilon}_i: X \rightarrow \mathbf{Gr}(\mathbf{L}_i)$ является дифференцируемым в точке $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда существует такая открытая окрестность U точки x_0 , что ранг матриц $M_i(E(x), A(x), B(x), C(x))$ постоянен для всех $x \in U$, $i = 1, 2$.

Доказательство. Допустим, что существует такая открытая окрестность U точки x_0 , что $M_i(E(x), A(x), B(x), C(x))$ имеет полный ранг для всех $x \in U$. Тогда размерность $\dim \text{Ker } M_i(E(x), A(x), B(x), C(x))$ также постоянна для всех $x \in U$.

Согласно [3, IV.1.6], $\text{Ker } M_i(E(x), A(x), B(x), C(x))$ является дифференцируемым семейством подпространств и $\tilde{\Upsilon}_i = \text{STAB}_i \circ \Upsilon$ дифференцируемо в точке x_0 .

Докажем утверждение в обратную сторону. Допустим, что существуют такая открытая окрестность U точки x_0 и такая точка $x_1 \in U$, что

$$\text{rank } M_i(E(x_1), A(x_1), B(x_1), C(x_1)) \neq \text{rank } M_i(E(x_0), A(x_0), B(x_0), C(x_0)).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \dim(\text{STAB}_i \circ \Upsilon)(x_1) &= \\ &= \dim \text{Ker } M_i(\Upsilon(x_1)) \neq \dim \text{Ker } M_i(\Upsilon(x_0)) = \dim(\text{STAB}_i \circ \Upsilon)(x_0). \end{aligned}$$

Интервальное расстояние между этими подпространствами равно

$$\text{dist}((\text{STAB}_i \circ \Upsilon)(x_1), (\text{STAB}_i \circ \Upsilon)(x_0)) = 1$$

и отображение $\tilde{\Upsilon} = \text{STAB}_i \circ \Upsilon$ не является непрерывным. Следовательно, оно не дифференцируемо в x_0 . $\square$

В частном случае, когда $X = \mathcal{O}_i(E, A, B, C)$ является орбитой четвёрки (E, A, B, C) относительно действия α_i ($i = 1, 2$) и отображение Υ является включением, мы получаем искомую взаимосвязь между структурной стабильностью и дифференцируемостью.

Следствие 2. Четвёрка (E, A, B, C) является структурно стабильной относительно отношений эквивалентности, индуцированных α_i ($i = 1, 2$), тогда и только тогда, когда отображение STAB_i дифференцируемо в точке (E, A, B, C) .

Доказательство. Четвёрка (E, A, B, C) является структурно стабильной тогда и только тогда, когда $M_i(E, A, B, C)$ имеет полный ранг. Это равносильно тому, что существует такая открытая окрестность U точки (E, A, B, C) , что для всех четвёрок (E', A', B', C') , принадлежащих U , матрица $M_i(E', A', B', C')$ имеет полный ранг. $\square$

Литература

- [1] Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Большие системы // ДАН СССР. — 1937. — Т. 14.
- [2] Clotet J., García M^a I., Magret M. D. Estimating distances from quadruples satisfying properties to quadruples not satisfying them // Linear Algebra Appl. — 2001. — Vol. 332–334. — P. 541–567.
- [3] García M^a I., Ferrer J., Puerta F. Differentiable families of subspaces // Linear Algebra Appl. — 1994. — Vol. 199. — P. 229–252.

- [4] Griffiths P., Harris J. Principles of Algebraic Geometry. — New York: Wiley—Interscience, 1978.
- [5] Lancaster P., Tismenetsky M. The Theory of Matrices with Applications. — London: Academic Press, 1985.
- [6] Willems J. C. Topological classification and structural stability of linear systems // J. Differential Equations. — 1980. — Vol. 35. — P. 306—318.