# Алгебры Цинбиля над $q$-коммутатором

**А. С. ДЖУМАДИЛЬДАЕВ**
*Казахско-британский университет,*
*Алма-Ата, Казахстан*
e-mail: askar@math.kz

УДК 512.552

**Ключевые слова:** алгебры Цинбиля, $q$-коммутатор, хронологические алгебры.

**Аннотация**

Алгебра с тождеством $t_1(t_2t_3) = (t_1t_2 + t_2t_1)t_3$ называется алгеброй Цинбиля. Например, $\mathbb{C}[x]$ с умножением $a \circ b = b\int\limits_0^x a\,dx$ цинбилева. Пусть $a \circ_q b = a \circ b + q\, b \circ a$ — $q$-коммутатор, $q \in \mathbb{C}$. Мы доказываем, что для любой алгебры Цинбиля $A$ соответствующая алгебра над коммутатором $A^{(-1)} = (A, \circ_{-1})$ удовлетворяет тождествам $t_1t_2 = -t_2t_1$ и

$$(t_1t_2)(t_3t_4) + (t_1t_4)(t_3t_2) = \mathrm{jac}(t_1, t_2, t_3)t_4 + \mathrm{jac}(t_1, t_4, t_3)t_2,$$

где

$$\mathrm{jac}(t_1, t_2, t_3) = (t_1t_2)t_3 + (t_2t_3)t_1 + (t_3t_1)t_2.$$

Мы находим базис тождеств для $q$-цинбилевых алгебр и доказываем, что они образуют многообразие, эквивалентное многообразию цинбилевых алгебр при $q^2 \neq 1$.

**Abstract**

*A. S. Dzhumadil'daev, Zinbiel algebras under q-commutator*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 3, pp. 57—78.

An algebra with the identity $t_1(t_2t_3) = (t_1t_2 + t_2t_1)t_3$ is called Zinbiel. For example, $\mathbb{C}[x]$ under multiplication $a \circ b = b\int\limits_0^x a\,dx$ is Zinbiel. Let $a \circ_q b = a \circ b + q\, b \circ a$ be a $q$-commutator, where $q \in \mathbb{C}$. We prove that for any Zinbiel algebra $A$ the corresponding algebra under commutator $A^{(-1)} = (A, \circ_{-1})$ satisfies the identities $t_1t_2 = -t_2t_1$ and $(t_1t_2)(t_3t_4) + (t_1t_4)(t_3t_2) = \mathrm{jac}(t_1, t_2, t_3)t_4 + \mathrm{jac}(t_1, t_4, t_3)t_2$, where $\mathrm{jac}(t_1, t_2, t_3) = (t_1t_2)t_3 + (t_2t_3)t_1 + (t_3t_1)t_2$. We find basic identities for $q$-Zinbiel algebras and prove that they form varieties equivalent to the variety of Zinbiel algebras if $q^2 \neq 1$.

## 1. Введение

Алгебры Цинбиля появляются в теории управления и в теории когомологий алгебр Лейбница. Алгебра $A = (A, \circ)$ с векторным пространством $A$ и умножением $\circ$ называется *цинбилевой* (справа), если она удовлетворяет условию

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b + b \circ a) \circ c$$

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2005, том 11, № 3, с. 57—78.

для любых $a, b, c \in A$ [1, 2, 4, 6]. Иногда алгебры Цинбиля называют *дуальными алгебрами Лейбница* или *хронологическими*.

**Пример.** Алгебра $A = \mathbb{C}[x]$ с умножением

$$a \circ b = b \int_0^x a\,dx \quad \text{или} \quad a \diamond b = \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}(a) b\,dx$$

цинбилева справа.

Для простоты предположим, что все полиномы и векторные поля определены над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. На самом деле почти все наши результаты выполняются и для произвольного поля $K$ характеристики $p \neq 2, 3$. Для $q \in \mathbb{C}$ определим *$q$-коммутатор* на $A$ как

$$a \circ_q b = a \circ b + q\, b \circ a.$$

Например,

$$\begin{aligned} a \circ_{-1} b &= a \circ b - b \circ a = [a, b] && \text{(коммутатор)},\\ a \circ_1 b &= a \circ b + b \circ a = \{a, b\} && \text{(антикоммутатор)}. \end{aligned}$$

Пусть $A^{(q)}$ — алгебра с векторным пространством $A$ и умножением $\circ_q$.

Обозначим через $\mathfrak{Zinbiel}$ категорию цинбилевых алгебр. Пусть $\mathfrak{Zinbiel}^{(q)}$, $q \in \mathbb{C}$, — категория всех $q$-цинбилевых алгебр. Иными словами, объекты из $\mathfrak{Zinbiel}^{(q)}$ — это алгебры вида $A^{(q)}$, где $A \in \mathfrak{Zinbiel}$.

Целью данной работы является нахождение тождеств для $\mathfrak{Zinbiel}^{(q)}$. Случай $q = 1$ был рассмотрен в [6]. Именно, было установлено, что любая цинбилева алгебра над антикоммутатором ассоциативна и коммутативна. В этой работе мы доказываем, что любая цинбилева алгебра над коммутатором удовлетворяет одному тождеству степени 4 (мы обозначаем его через $\mathrm{tortkara}$) и это тождество является тождеством Ли. Здесь мы называем *тождеством Ли* тождество, которое не следует из полусимметрического тождества и является минимальным среди таких тождеств. Для $q \neq \pm 1$ мы доказываем, что класс $\mathfrak{Zinbiel}^{(q)}$ образует многообразие, и находим для него базисные тождества. Более того, мы устанавливаем, что это многообразие эквивалентно многообразию $\mathfrak{Zinbiel}$. Мы показываем, что базисные тождества для $\mathfrak{Zinbiel}^{(q)}$ различаются в случаях $q = -2$ и $q \neq \pm 1, -2$.

Из наших результатов следует, что алгебра $(\mathbb{C}[x], \circ)$, где

$$a \circ b = a \int_0^x b\,dx,$$

является цинбилевой, а соответствующая алгебра над коммутатором удовлетворяет тождеству $\mathrm{tortkara} = 0$.

Другое применение: алгебра $(\mathbb{C}[x], \diamond)$ с умножением

$$a \diamond b = \int\limits_0^x \partial(a) b\, dx,$$

где $\partial = \frac{\partial}{\partial x}$, также является цинбилевой, а соответствующая алгебра над коммутатором

$$[a, b] = \int\limits_0^x (\partial(a)b - a\partial(b))\, dx$$

удовлетворяет тождеству $\mathrm{tortkara} = 0$.

Мы находим тождества для алгебры $(\mathbb{C}[x], \star)$, где

$$a \star b = a \int\limits_0^x \left( \int\limits_0^x b\, dx \right) dx.$$

Эта алгебра не цинбилева, но соответствующая алгебра над коммутатором удовлетворяет тождеству $\mathrm{tortkara} = 0$.

## 2. Основные результаты

Пусть $f = f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ — неассоциативный некоммутативный полином. Пусть $A = (A, \circ)$ — алгебра с векторным пространством $A$ и умножением $\circ$. Скажем, что $f = 0$ — *тождество* на $A$, если $f(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0$ для любых подстановок $t_i := a_i \in A$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Здесь мы вычисляем $f(a_1, a_2, \ldots a_k)$ в терминах умножения $\circ$.

Пусть, например,

$$\mathrm{ass}(t_1, t_2, t_3) = t_1(t_2 t_3) - (t_1 t_2) t_3 \qquad \text{(ассоциатор)}.$$

Тогда любая алгебра с тождеством $\mathrm{ass} = 0$ ассоциативна.

Класс алгебр $\mathfrak{L}$ называется *многообразием* с порождающими полиномиальными тождествами $f_1 = 0,\ f_2 = 0, \ldots$, если любая алгебра $A \in \mathfrak{L}$ удовлетворяет этим тождествам и, наоборот, любая алгебра с тождествами $f_1 = 0,\ f_2 = 0, \ldots$ принадлежит $\mathfrak{L}$.

Пусть $\mathfrak{L}$ — категория алгебр с некоторым полиномиальным тождеством. Обозначим через $\mathfrak{L}^{(q)}$ категорию алгебр $A^{(q)}$, где $A \in \mathfrak{L}$.

Если $\mathfrak{Ass}$ — категория ассоциативных алгебр, то для любой алгебры $A \in \mathfrak{Ass}$ и $A^{(-1)}$ является алгеброй Ли. Иными словами, $A^{(-1)}$ удовлетворяет полусимметрическому тождеству $\mathrm{com} = 0$ и тождеству Якоби $\mathrm{jac} = 0$, где

$$\mathrm{com}(t_1, t_2) = t_1 t_2 + t_2 t_1,$$
$$\mathrm{jac}(t_1, t_2, t_3) = (t_1 t_2) t_3 + (t_2 t_3) t_1 + (t_3 t_1) t_2.$$

Теорема Пуанкаре—Биркгофа—Витта показывает, что $\mathfrak{Ass}^{(-1)}$ образует многообразие и это многообразие порождается тождествами $\mathrm{com}=0$ и $\mathrm{jac}=0$. Далее, для любой алгебры $A\in\mathfrak{Ass}$ её антикоммутаторная алгебра $A^{(1)}$ является йордановой, т. е. удовлетворяет тождеству коммутативности $\mathrm{anticom}=0$ и йорданову тождеству $\mathrm{jor}=0$, где

$$\begin{aligned}&\mathrm{anticom}(t_1,t_2)=t_1t_2-t_2t_1,\\&\mathrm{jor}(t_1,t_2,t_3,t_4)=(t_1t_2)(t_3t_4)+(t_1t_3)(t_4t_2)+(t_1t_4)(t_2t_3)-\\&\quad-(t_1(t_3t_4))t_2-(t_1(t_4t_2))t_3-(t_1(t_2t_3))t_4.\end{aligned}$$

Однако категория $\mathfrak{Ass}^{(1)}$ не образует многообразия [3]. Алгебры $A^{(1)}$ удовлетворяют некоторым полиномиальным тождествам. Базис этих тождеств неизвестен. Существует некоторая алгебра, удовлетворяющая всем тождествам из $\mathfrak{Ass}^{(1)}$, но не изоморфная никакой подалгебре йордановой алгебры вида $A^{(1)}$, где $A\in\mathfrak{Ass}$.

Пусть

$$\mathrm{zinbiel}(t_1,t_2,t_3)=t_1(t_2t_3)-(t_1t_1+t_2t_1)t_3 \text{ —}$$

(правый) *полином Цинбиля*. По умолчанию под полиномом Цинбиля мы понимаем именно такой полином.

Пусть

$$\begin{aligned}&\mathrm{zinbiel}^{(q)}=\mathrm{zinbiel}^{(q)}(t_1,t_2,t_3)=(1-q-q^2)t_1(t_2t_3+t_3t_2)-\\&\quad-t_2(t_1t_3+t_3t_1)-t_3(t_1t_2)+(1+q)t_3(t_2t_1)+(2q+q^2)(t_1t_2)t_3,\\&\mathrm{zinbiel}_1^{(q)}=\mathrm{zinbiel}_1^{(q)}(t_1,t_2,t_3)=-t_2(t_3t_1)+t_3(t_2t_1)+q(t_1t_2)t_3-q(t_1t_3)t_2,\\&\mathrm{zinbiel}_2^{(-2)}=\mathrm{zinbiel}_2^{(-2)}(t_1,t_2,t_3)=\\&\quad=-3t_2(t_1t_3+t_3t_1)-2t_3(t_1t_2)-t_3(t_2t_1)-(t_1t_2)t_3+(t_2t_1)t_3.\end{aligned}$$

Мы видим, что

$$\mathrm{zinbiel}^{(0)}=\mathrm{zinbiel}.$$

Пусть

$$\begin{aligned}\mathrm{tortkara}&=\mathrm{tortkara}(t_1,t_2,t_3,t_4)=\\&=(t_1t_2)(t_3t_4)+(t_1t_4)(t_3t_2)-\mathrm{jac}(t_1,t_2,t_3)t_4-\mathrm{jac}(t_1,t_4,t_3)t_2.\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\mathrm{tortkara}(t_1,t_2,t_3,t_4)=\mathrm{tortkara}(t_1,t_4,t_3,t_2).$$

Если мы рассмотрим полином tortkara как полусимметрический полином, т. е. будем считать данным тождество $\mathrm{com}=0$, то

$$\mathrm{tortkara}(t_1,t_2,t_3,t_4)=-\mathrm{tortkara}(t_3,t_2,t_1,t_4),$$
$$\mathrm{tortkara}(t_1,t_2,t_3,t_4)+\mathrm{tortkara}(t_1,t_3,t_4,t_2)+\mathrm{tortkara}(t_1,t_4,t_2,t_3)=0.$$

В данной статье мы устанавливаем следующие результаты.

**Теорема 2.1.** *Пусть* $q^2 \neq 1$. *Тогда* $\mathfrak{Zinbiel}^{(q)}$ *образует многообразие. Если* $q \neq -2$, *то* $\mathfrak{Zinbiel}^{(q)}$ *порождается полиномиальным тождеством* $\mathrm{zinbiel}^{(q)} = 0$. *Если* $q = -2$, *то* $\mathfrak{Zinbiel}^{(-2)}$ *порождается тождествами* $\mathrm{zinbiel}_1^{(-2)} = 0$ *и* $\mathrm{zinbiel}_2^{(-2)} = 0$. *Многообразие, порождённое полиномиальным тождеством* $\mathrm{zinbiel}^{(q)} = 0$, *эквивалентно многообразию* $\mathfrak{Zinbiel}$, *если* $q \neq -2$. *Многообразие, порождённое полиномиальными тождествами* $\mathrm{zinbiel}_1^{(-2)} = 0$ *и* $\mathrm{zinbiel}_2^{(-2)} = 0$ *для* $q = -2$, *эквивалентно многообразию* $\mathfrak{Zinbiel}$.

**Теорема 2.2.** *Для любой алгебры Цинбиля* $(A, \circ)$ *её алгебра Ли* $(A, [\,,\,])$, *где* $[a, b] = a \circ b - b \circ a$, *удовлетворяет тождеству* $\mathrm{tortkara} = 0$. *Любое тождество степени* 3 *для категории* $\mathfrak{Zinbiel}^{(-1)}$ *следует из тождества* $\mathrm{com} = 0$. *Любое тождество степени* 4 *для категории* $\mathfrak{Zinbiel}^{(-1)}$ *следует из тождеств* $\mathrm{com} = 0$ *и* $\mathrm{tortkara} = 0$.

**Теорема 2.3.** *Алгебра* $(\mathbb{C}[x], \star)$, *где*

$$a \star b = a \int_0^x \left( \int_0^x b\, dx \right) dx,$$

*удовлетворяет правосимметрическому тождеству*

$$(t_1 t_2) t_3 - (t_1 t_3) t_2 = 0 \tag{1}$$

*и тождеству степени* 4

$$(t_1, t_2, [t_3, t_4]) + (t_1, t_3, [t_4, t_2]) + (t_1, t_4, [t_2, t_3]) = 0. \tag{2}$$

*Пусть* $A$ — *любая алгебра с тождеством* (1) *и тождеством*

$$(t_1, t_2, [t_3, t_1]) + (t_1, t_3, [t_1, t_2]) + (t_1, t_1, [t_2, t_3]) = 0. \tag{3}$$

*Тогда её алгебра Ли* $A^{(-1)}$ *удовлетворяет тождеству* $\mathrm{tortkara} = 0$. *В частности, любая алгебра с тождествами* (1) *и* (2) *удовлетворяет тождеству* $\mathrm{tortkara} = 0$.

Значит, для $q^2 \neq 1$ любая алгебра $L \in \mathfrak{Zinbiel}^{(q)}$ удовлетворяет некоторым полиномиальным тождествам, а любая алгебра с этими тождествами может быть получена с помощью некоторой алгебры $A \in \mathfrak{Zinbiel}$ как алгебра $A^{(q)}$. Более точно, мы устанавливаем, что $\mathrm{zinbiel} = 0$ при $q \neq -2$ и $\mathrm{zinbiel}_1^{(-2)} = 0$, $\mathrm{zinbiel}_2^{(-2)} = 0$ при $q = -2$ являются порождающими тождествами для $\mathfrak{Zinbiel}^{(q)}$. Мы доказываем, что

$$\mathfrak{Zinbiel} = \mathrm{Var}(\mathfrak{Zinbiel}^{(q)}), \qquad \text{если } q \neq \pm 1,$$

и

$$\mathrm{Var}(\mathfrak{Zinbiel}^{(q)}) = \langle \mathrm{zinbiel}^{(q)} \rangle, \qquad \text{если } q \neq -2, \pm 1,$$
$$\mathrm{Var}(\mathfrak{Zinbiel}^{(q)}) = \langle \mathrm{zinbiel}_1^{(-2)}, \mathrm{zinbiel}_2^{(-2)} \rangle, \qquad \text{если } q = -2.$$

Более того, категории $\mathfrak{Zinbiel}^{(q)}$ и $\mathfrak{Zinbiel}$ эквивалентны, если $q^2 \neq 1$. Иными словами, любая алгебра с тождеством $\mathrm{zinbiel}^{(q)} = 0$ изоморфна алгебре вида $A^{(q)}$

для некоторой алгебры $A \in \mathfrak{Zinbiel}$, если $q \neq -2, \pm 1$. Если $q = -2$, то любая алгебра с тождествами $\mathrm{zinbiel}_1^{(-2)} = 0$, $\mathrm{zinbiel}_2^{(-2)} = 0$ может быть получена с помощью некоторой алгебры Цинбиля $A$ как $A^{(-2)}$.

Было бы интересно изучить многообразия алгебр с тождествами $\mathrm{zinbiel}_1^{(q)} = 0$ или $\mathrm{zinbiel}_2^{(-2)} = 0$. Мы не знаем, образует ли категория $\mathfrak{Zinbiel}^{(-1)}$ многообразие. Кажется, что $\mathfrak{Zinbiel}^{(-1)}$ должна удовлетворять некоторым тождествам, которые не следуют из тождеств $\mathrm{com} = 0$ и $\mathrm{tortkara} = 0$. Также интересно было бы построить тождества для $(\mathbb{C}[x], \{\ \})$, где $\{a, b\} = a \star b + b \star a$ — это антикоммутатор для умножения $\star$.

**Замечание.** Пусть

$$\mathrm{rcom}(t_1, t_2, t_3) = (t_1 t_2) t_3 - (t_1 t_3) t_2 \text{ —}$$

полином правой коммутативности, а

$$\mathrm{genzinbiel}(t_1, t_2, t_3) = \mathrm{zinbiel}(t_1, t_2, t_3) - \mathrm{zinbiel}(t_3, t_2, t_1) \text{ —}$$

*обобщённый полином Цинбиля.* Тогда любая алгебра с тождествами $\mathrm{rcom} = 0$ и $\mathrm{genzinbiel} = 0$ удовлетворяет тождеству (2). Следовательно, такие алгебры над коммутатором удовлетворяют тождеству $\mathrm{tortkara} = 0$.

Аналогичные тождества появляются при рассматривании алгебр Новикова над антикоммутатором [5]. Пусть $A = \mathbb{C}[x]$ и $a * b = \partial(a) b$, где $\partial\colon \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$ — взятие производной:

$$\partial x^i = i x^{i-1}.$$

Тогда $(A, *)$ — алгебра Новикова:

$$a * (b * c - c * b) = (a * b) * c - (a * c) * b,$$
$$a * (b * c) = b * (a * c)$$

для любых $a, b, c \in A$. Для любой алгебры Новикова $(A, *)$ её йорданова алгебра $(A, \{\,,\,\})$, где $\{a, b\} = a * b + b * a$, коммутативна и удовлетворяет тождеству $\mathrm{tortken} = 0$, где

$$\mathrm{tortken}(t_1, t_2, t_3, t_4) = (t_1 t_2)(t_3 t_4) - (t_1 t_4)(t_3 t_2) - (t_1, t_2, t_3) t_4 + (t_1, t_4, t_3) t_2,$$
$$(t_1, t_2, t_3) = t_1 (t_2 t_3) - (t_1 t_2) t_3.$$

Например, $K[x]$ над умножением $(a, b) \mapsto \partial(ab)$ удовлетворяет этим тождествам.

Мы не знаем, будет ли алгебра $(\mathbb{C}[x], [\,,\,])$ над коммутатором $[a, b] = a \star b - b \star a$ изоморфна подалгебре некоторой алгебры вида $A^{(-1)}$, где $A$ — алгебра Цинбиля. Напомним, что

$$a \star b = a \int_0^x \int_0^x b \, dx \, dx.$$

В данной работе мы изучаем $q$-тождества для цинбилевых справа алгебр. Можно рассматривать $q$-тождества для цинбилевых слева алгебр,

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c + c \circ b).$$

Заметим, что любая цинбилева справа алгебра $(a, \circ)$ с противоположным законом умножения $a \circ^{\mathrm{op}} b = b \circ a$ превращается в цинбилеву слева алгебру. Аналогично, алгебра $(\mathbb{C}[x], \star^{\mathrm{op}})$ с противоположным законом умножения

$$a \star^{\mathrm{op}} b = \left(\iint a\right) b$$

удовлетворяет тождеству

$$([t_1, t_2], t_3, t_4) + ([t_2, t_3], t_1, t_4) + ([t_3, t_1], t_2, t_4) = 0.$$

Так как $[\,,\,]^{\mathrm{op}} = -[\,,\,]$, то ясно, что её коммутаторная алгебра удовлетворяет тождеству $\mathrm{tortkara} = 0$.

## 3. Почему $\mathrm{zinbiel}^{(q)}$, $\mathrm{zinbiel}_1^{(q)}$, $\mathrm{zinbiel}_2^{(-2)}$ являются тождествами?

**Лемма 3.1.** *Пусть $A = (A, \circ)$ — любая алгебра Цинбиля. Тогда $\mathrm{zinbiel}^{(q)} = 0$ — тождество на $A^{(q)}$.*

**Доказательство.** Имеем

$$\begin{aligned}
&\mathrm{zinbiel}^{(q)}(a, b, c) = \\
&\quad = (1 - q - q^2) a \circ_q (b \circ_q c + c \circ_q b) - b \circ_q (a \circ_q c + c \circ_q a) - c \circ_q (a \circ_q b) + \\
&\quad + (1 + q) c \circ_q (b \circ_q a) + (2q + q^2)(a \circ_q b) \circ_q c = \\
&\quad = (1 - q - q^2) a \circ (b \circ c + c \circ b) - b \circ (a \circ c + c \circ a) - c \circ (a \circ b) + \\
&\quad + (1 + q) c \circ (b \circ a) + (2q + q^2)(a \circ b) \circ c + (1 - q - q^2) q (b \circ c + c \circ b) \circ a - \\
&\quad - q(a \circ c + c \circ a) \circ b - q(a \circ b) \circ c + (1 + q) q (b \circ a) \circ c + \\
&\quad + (2q + q^2) q c \circ (a \circ b) + (1 - q - q^2) q a \circ (b \circ c + c \circ b) - q b \circ (c \circ a + a \circ c) - \\
&\quad - q c \circ (b \circ a) + (1 + q) q c \circ (a \circ b) + (2q + q^2) q (b \circ a) \circ c + \\
&\quad + (1 - q - q^2) q^2 (b \circ c + c \circ b) \circ a - q^2 (a \circ c + c \circ a) \circ b - q^2 (b \circ a) \circ c + \\
&\quad + (1 + q) q^2 (a \circ b) \circ c + (2q + q^2) q^2 c \circ (b \circ a) = \\
&\quad = F_0 + F_1 q + F_2 q^2 + F_3 q^3 + F_4 q^4,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
F_0 &= a \circ (b \circ c) + a \circ (c \circ b) - b \circ (a \circ c) - b \circ (c \circ a) - c \circ (a \circ b) + c \circ (b \circ a), \\
F_1 &= -b \circ (a \circ c) - b \circ (c \circ a) + c \circ (a \circ b) + (a \circ b) \circ c - (a \circ c) \circ b + (b \circ a) \circ c + \\
&\quad + (b \circ c) \circ a - (c \circ a) \circ b + (c \circ b) \circ a, \\
F_2 &= -2a \circ (b \circ c) - 2a \circ (c \circ b) + 3c \circ (a \circ b) + 2(a \circ b) \circ c - (a \circ c) \circ b + \\
&\quad + 2(b \circ a) \circ c - (c \circ a) \circ b,
\end{aligned}$$

$$F_3 = -a\circ(b\circ c) - a\circ(c\circ b) + c\circ(a\circ b) + 2c\circ(b\circ a) + (a\circ b)\circ c + (b\circ a)\circ c - {}$$
$$- 2(b\circ c)\circ a - 2(c\circ b)\circ a,$$
$$F_4 = c\circ(b\circ a) - (b\circ c)\circ a - (c\circ b)\circ a.$$

По тождеству левой коммутативности

$$F_0 = 0.$$

По тождеству правой цинбилевости

$$F_1 = -b\circ(c\circ a) + (b\circ c)\circ a + (c\circ b)\circ a + c\circ(a\circ b) - (a\circ c)\circ b - (c\circ a)\circ b - {}$$
$$- b\circ(a\circ c) + (a\circ b)\circ c + (b\circ a)\circ c = 0,$$
$$F_2 = -2a\circ(c\circ b) + 3c\circ(a\circ b) - (a\circ c)\circ b - (c\circ a)\circ b - 2a\circ(b\circ c) + {}$$
$$+ 2(a\circ b)\circ c + 2(b\circ a)\circ c = 0,$$
$$F_3 = 2c\circ(b\circ a) - 2(b\circ c)\circ a - 2(c\circ b)\circ a - a\circ(c\circ b) + c\circ(a\circ b) - {}$$
$$- a\circ(b\circ c) + (a\circ b)\circ c + (b\circ a)\circ c = 0,$$
$$F_4 = c\circ(b\circ a) - (b\circ c)\circ a - (c\circ b)\circ a = 0.$$

**Лемма 3.2.** *Пусть $A = (A, \circ)$ — любая алгебра Цинбиля. Тогда* $\mathrm{zinbiel}_1^{(q)} = 0$ *является тождеством на* $A^{(q)}$.

**Доказательство.**

$$\mathrm{zinbiel}_1^{(q)}(a,b,c) =$$
$$= -b\circ_q(c\circ_q a) + c\circ_q(b\circ_q a) + q(a\circ_q b)\circ_q c - q(a\circ_q c)\circ_q b =$$
$$= -b\circ(c\circ a) + c\circ(b\circ a) + q(a\circ b)\circ c - q(a\circ c)\circ b - {}$$
$$- q(c\circ a)\circ b + q(b\circ a)\circ c + q^2 c\circ(a\circ b) - q^2 b\circ(a\circ c) - {}$$
$$- qb\circ(a\circ c) + qc\circ(a\circ b) + q^2(b\circ a)\circ c - q^2(c\circ a)\circ b - {}$$
$$- q^2(c\circ a)\circ b + q^2(a\circ b)\circ c + q^3 c\circ(b\circ a) - q^3 b\circ(c\circ a) =$$
$$= G_0 + G_1 q + G_2 q^2 + G_3 q^3,$$

где по тождеству правой цинбилевости

$$G_0 = -b\circ(c\circ a) + c\circ(b\circ a) = 0,$$
$$G_1 = -b\circ(a\circ c) + c\circ(a\circ b) + (a\circ b)\circ c - (a\circ c)\circ b + (b\circ a)\circ c - (c\circ a)\circ b = 0,$$
$$G_2 = -b\circ(a\circ c) + c\circ(a\circ b) + (a\circ b)\circ c - (a\circ c)\circ b + (b\circ a)\circ c - (c\circ a)\circ b = 0,$$
$$G_3 = -b\circ(c\circ a) + c\circ(b\circ a) = 0.$$

**Лемма 3.3.** *Пусть $A = (A, \circ)$ — любая алгебра Цинбиля. Тогда* $\mathrm{zinbiel}_2^{(-2)} = 0$ *является тождеством на* $A^{(-2)}$.

**Доказательство.**

$$\mathrm{zinbiel}_2^{(-2)}(a,b,c) =$$
$$= -3b\circ_{-2}(a\circ_{-2} c + c\circ_{-2} a) - 2c\circ_{-2}(a\circ_{-2} b) - c\circ_{-2}(b\circ_{-2} a) - {}$$
$$- (a\circ_{-2} b)\circ_{-2} c + (b\circ_{-2} a)\circ_{-2} c =$$

$$
\begin{aligned}
&= -3b\circ(a\circ c+c\circ a)-2c\circ(a\circ b)-c\circ(b\circ a)-(a\circ b)\circ c+(b\circ a)\circ c+\\
&+6(a\circ c+c\circ a)\circ b+4(a\circ b)\circ c+2(b\circ a)\circ c+2c\circ(a\circ b)-2c\circ(b\circ a)+\\
&+6b\circ(a\circ c+c\circ a)+4c\circ(b\circ a)+2c\circ(a\circ b)+2(b\circ a)\circ c-2(a\circ b)\circ c-\\
&-12(a\circ c+c\circ a)\circ b-8(b\circ a)\circ c-4(a\circ b)\circ c-4c\circ(b\circ a)+4c\circ(a\circ b)=\\
&= H_1+H_2+H_3,
\end{aligned}
$$

где по тождеству правой цинбилевости

$$
\begin{aligned}
H_1 &= -3b\circ(c\circ a)-c\circ(b\circ a)-2c\circ(b\circ a)+6b\circ(c\circ a)+4c\circ(b\circ a)-\\
&\quad -4c\circ(b\circ a)=0,\\
H_2 &= -2c\circ(a\circ b)+6(a\circ c)\circ b+6(c\circ a)\circ b+2c\circ(a\circ b)+\\
&\quad +2c\circ(a\circ b)-12(a\circ c)\circ b-12(c\circ a)\circ b+4c\circ(a\circ b)=\\
&\quad =6c\circ(a\circ b)-6(a\circ c+c\circ a)\circ b=0,\\
H_3 &= -3b\circ(a\circ c)-(a\circ b)\circ c+(b\circ a)\circ c+4(a\circ b)\circ c+2(b\circ a)\circ c+\\
&\quad +6b\circ(a\circ c)+2(b\circ a)\circ c-2(a\circ b)\circ c-8(b\circ a)\circ c-4(a\circ b)\circ c=\\
&\quad =3b\circ(a\circ c)-3(a\circ b)\circ c-3(b\circ a)\circ c=0.
\end{aligned}
$$

## 4. Любое $q$-тождество степени 3 следует из тождеств $\mathrm{zinbiel}^{(q)}$

**Лемма 4.1.** *Пусть $q^2 \neq 1$. Любое тождество степени 3 для категории $\mathfrak{Zinbiel}^{(q)}$ следует из тождества $\mathrm{zinbiel}^{(q)}=0$, если $q\neq -2$, и из тождеств $\mathrm{zinbiel}_1^{(-2)}=0$ и $\mathrm{zinbiel}_2^{(-2)}=0$, если $q=-2$.*

**Доказательство.** Пусть

$$
\begin{aligned}
&X(t_1,t_2,t_3)=\\
&\quad =\lambda_1t_1(t_2t_3)+\lambda_2t_2(t_3t_1)+\lambda_3t_3(t_1t_2)+\lambda_4t_2(t_1t_3)+\lambda_5t_3(t_2t_1)+\lambda_6t_1(t_3t_2)+\\
&\quad +\lambda_7(t_1t_2)t_3+\lambda_8(t_2t_3)t_1+\lambda_9(t_3t_1)t_2+\lambda_{10}(t_2t_1)t_3+\lambda_{11}(t_3t_2)t_1+\lambda_{12}(t_1t_3)t_2 \text{ —}
\end{aligned}
$$

общий некоммутативный неассоциативный полином степени 3. Подставим вместо параметров $t_1$, $t_2$, $t_3$ элементы $a$, $b$, $c$ алгебры Цинбиля $(A,\circ)$ и вычислим $X(a,b,c)$ в терминах умножения $\circ$. Предположим, что $A$ — свободная алгебра Цинбиля с порождающими $a$, $b$, $c$.

Свободная алгебра Цинбиля степени 3 имеет полилинейную часть размерности 6 с базисом

$$\{(a\circ b)\circ c,\ (b\circ c)\circ a,\ (c\circ a)\circ b,\ (b\circ a)\circ c,\ (c\circ b)\circ a,\ (a\circ c)\circ b\}.$$

По (правому) тождеству Цинбиля остальные 6 элементов, заключённые в правые скобки, являются линейными комбинациями базисных элементов:

$$
\begin{aligned}
a\circ(b\circ c)&=(a\circ b)\circ c+(b\circ a)\circ c,\\
b\circ(c\circ a)&=(b\circ c)\circ a+(c\circ b)\circ a,
\end{aligned}
$$

$$c\circ(a\circ b)=(c\circ a)\circ b+(a\circ c)\circ b,$$
$$a\circ(c\circ b)=(a\circ c)\circ b+(c\circ a)\circ c,$$
$$b\circ(a\circ c)=(b\circ a)\circ c+(a\circ b)\circ c,$$
$$c\circ(b\circ a)=(c\circ b)\circ a+(b\circ c)\circ a.$$

Мы получаем, что

$$\begin{aligned}
X(a,b,c)&=\\
&=(\lambda_1+q\lambda_2+q\lambda_3+\lambda_4+q^2\lambda_5+q\lambda_6+\lambda_7+q\lambda_8+q^2\lambda_9+q\lambda_{10}+q^2\lambda_{11}+q\lambda_{12})(a\circ b)\circ c+\\
&+(q\lambda_1+q^2\lambda_2+\lambda_3+q\lambda_4+q\lambda_5+\lambda_6+q\lambda_7+q^2\lambda_8+q\lambda_9+q^2\lambda_{10}+q\lambda_{11}+\lambda_{12})(a\circ c)\circ b+\\
&+(\lambda_1+q\lambda_2+q^2\lambda_3+\lambda_4+q\lambda_5+q\lambda_6+q\lambda_7+q\lambda_8+q^2\lambda_9+\lambda_{10}+q^2\lambda_{11}+q\lambda_{12})(b\circ a)\circ c+\\
&+(q\lambda_1+\lambda_2+q\lambda_3+q\lambda_4+\lambda_5+q^2\lambda_6+q^2\lambda_7+\lambda_8+q\lambda_9+q\lambda_{10}+q\lambda_{11}+q^2\lambda_{12})(b\circ c)\circ a+\\
&+(q\lambda_1+q\lambda_2+\lambda_3+q^2\lambda_4+q\lambda_5+\lambda_6+q\lambda_7+q^2\lambda_8+\lambda_9+q^2\lambda_{10}+q\lambda_{11}+q\lambda_{12})(c\circ a)\circ b+\\
&+(q^2\lambda_1+\lambda_2+q\lambda_3+q\lambda_4+\lambda_5+q\lambda_6+q^2\lambda_7+q\lambda_8+q\lambda_9+q\lambda_{10}+\lambda_{11}+q^2\lambda_{12})(c\circ b)\circ a.
\end{aligned}$$

Таким образом, $X=0$ является тождеством для $\mathfrak{Zinbiel}^{(q)}$ тогда и только тогда, когда

$$\lambda_1+q\lambda_2+q\lambda_3+\lambda_4+q^2\lambda_5+q\lambda_6+\lambda_7+q\lambda_8+q^2\lambda_9+q\lambda_{10}+q^2\lambda_{11}+q\lambda_{12}=0,$$
$$q\lambda_1+q^2\lambda_2+\lambda_3+q\lambda_4+q\lambda_5+\lambda_6+q\lambda_7+q^2\lambda_8+q\lambda_9+q^2\lambda_{10}+q\lambda_{11}+\lambda_{12}=0,$$
$$\lambda_1+q\lambda_2+q^2\lambda_3+\lambda_4+q\lambda_5+q\lambda_6+q\lambda_7+q\lambda_8+q^2\lambda_9+\lambda_{10}+q^2\lambda_{11}+q\lambda_{12}=0,$$
$$q\lambda_1+\lambda_2+q\lambda_3+q\lambda_4+\lambda_5+q^2\lambda_6+q^2\lambda_7+\lambda_8+q\lambda_9+q\lambda_{10}+q\lambda_{11}+q^2\lambda_{12}=0,$$
$$q\lambda_1+q\lambda_2+\lambda_3+q^2\lambda_4+q\lambda_5+\lambda_6+q\lambda_7+q^2\lambda_8+\lambda_9+q^2\lambda_{10}+q\lambda_{11}+q\lambda_{12}=0,$$
$$q^2\lambda_1+\lambda_2+q\lambda_3+q\lambda_4+\lambda_5+q\lambda_6+q^2\lambda_7+q\lambda_8+q\lambda_9+q\lambda_{10}+\lambda_{11}+q^2\lambda_{12}=0.$$

Решим систему. Она содержит 12 неизвестных $\lambda_i$, $i=1,2,\ldots,12$.

Предположим, что $q\neq 0,\pm 1$.

Если $q\neq -2$, мы можем рассмотреть параметры $\lambda_i$, $7\leqslant i\leqslant 12$, как свободные и выразить остальные параметры как линейные комбинации свободных параметров:

$$\lambda_1=-\frac{1}{q(2+q)}((-1+q+q^2)\lambda_7+\lambda_8+\lambda_9+\lambda_{10}-(q+1)\lambda_{11}+(-1+q+q^2)\lambda_{12}),$$
$$\lambda_2=-\frac{1}{q(2+q)}(\lambda_7+(-1+q+q^2)\lambda_8+\lambda_9+(-1+q+q^2)\lambda_{10}+\lambda_{11}-(1+q)\lambda_{12}),$$
$$\lambda_3=-\frac{1}{q(2+q)}(\lambda_7+\lambda_8+(-1+q+q^2)\lambda_9-(q+1)\lambda_{10}+(-1+q+q^2)\lambda_{11}+\lambda_{12}),$$
$$\lambda_4=-\frac{1}{q(2+q)}(\lambda_7+(-1+q+q^2)\lambda_8-(1+q)\lambda_9+(-1+q+q^2)\lambda_{10}+\lambda_{11}+\lambda_{12}),$$

$$\lambda_5 = -\frac{1}{q(2+q)}(-(1+q)\lambda_7 + \lambda_8 + (-1+q+q^2)\lambda_9 + \lambda_{10} + (-1+q+q^2)\lambda_{11} + \lambda_{12}),$$
$$\lambda_6 = -\frac{1}{q(2+q)}((-1+q+q^2)\lambda_7 - (1+q)\lambda_8 + \lambda_9 + \lambda_{10} + \lambda_{11} + (-1+q+q^2)\lambda_{12}).$$

Предположим теперь, что $q = -2$. Мы можем рассмотреть $\lambda_i$, $i = 6, 8, 9, 10, 11, 12$, в качестве свободных параметров и найти

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(2\lambda_6 + \lambda_8 - \lambda_{11}),$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(2\lambda_6 - 5\lambda_8 - 3\lambda_9 - 6\lambda_{10} - 3\lambda_{11} - \lambda_{12}),$$
$$\lambda_3 = \lambda_6 - \lambda_8 - 3\lambda_9 - 2\lambda_{10} - 3\lambda_{11},$$
$$\lambda_4 = \lambda_6 - \frac{5}{2}\lambda_8 - 2\lambda_9 - 3\lambda_{10} - \frac{3}{2}\lambda_{11},$$
$$\lambda_5 = \frac{1}{2}(2\lambda_6 - \lambda_8 - 5\lambda_9 - 2\lambda_{10} - 5\lambda_{11} + \lambda_{12}),$$
$$\lambda_7 = -\lambda_8 - \lambda_9 - \lambda_{10} - \lambda_{11} - \lambda_{12}.$$

Подставим эти выражения для $\lambda$ в $X(t_1, t_2, t_3)$. Мы получаем, что, если $X = 0$ — тождество на $\mathfrak{Zinbiel}^{(q)}$, то полином $X(t_1, t_2, t_3)$ должен быть линейной комбинацией шести полиномов:

$$f_1 = -(-1 + q + q^2)t_1(t_2t_3) - (-1 + q + q^2)t_1(t_3t_2) - t_2(t_1t_3) - t_2(t_3t_1) -$$
$$- t_3(t_1t_2) + t_3(t_2t_1) + qt_3(t_2t_1) + 2q(t_1t_2)t_3 + q^2(t_1t_2)t_3,$$
$$f_2 = -(-1 + q + q^2)t_1(t_2t_3) - (-1 + q + q^2)t_1(t_3t_2) - t_2(t_1t_3) - t_2(t_3t_1) -$$
$$- t_3(t_1t_2) + t_3(t_2t_1) + qt_3(t_2t_1) + 2q(t_1t_2)t_3 + q^2(t_1t_2)t_3,$$
$$f_3 = -(-1 + q + q^2)t_1(t_2t_3) - (-1 + q + q^2)t_1(t_3t_2) - t_2(t_1t_3) -$$
$$- t_2(t_3t_1) - t_3(t_1t_2) + t_3(t_2t_1) + qt_3(t_2t_1) + 2q(t_1t_2)t_3 + q^2(t_1t_2)t_3,$$
$$f_4 = -(-1 + q + q^2)t_1(t_2t_3) - (-1 + q + q^2)t_1(t_3t_2) - t_2(t_1t_3) -$$
$$- t_2(t_3t_1) - t_3(t_1t_2) + t_3(t_2t_1) + qt_3(t_2t_1) + 2q(t_1t_2)t_3 + q^2(t_1t_2)t_3,$$
$$f_5 = -(-1 + q + q^2)t_1(t_2t_3) - (-1 + q + q^2)t_1(t_3t_2) - t_2(t_1t_3) -$$
$$- t_2(t_3t_1) - t_3(t_1t_2) + t_3(t_2t_1) + qt_3(t_2t_1) + 2q(t_1t_2)t_3 + q^2(t_1t_2)t_3,$$
$$f_6 = -(-1 + q + q^2)t_1(t_2t_3) - (-1 + q + q^2)t_1(t_3t_2) - t_2(t_1t_3) -$$
$$- t_2(t_3t_1) - t_3(t_1t_2) + t_3(t_2t_1) + qt_3(t_2t_1) + 2q(t_1t_2)t_3 + q^2(t_1t_2)t_3,$$

если $q \neq -2$, и

$$f_1 = t_1(t_2t_3) + t_1(t_3t_2) + t_2(t_1t_3) + t_2(t_3t_1) + t_3(t_1t_2) + t_3(t_2t_1),$$
$$f_2 = -\frac{1}{2}t_2(t_3t_1) + \frac{1}{2}t_3(t_2t_1) - (t_1t_2)t_3 + (t_1t_3)t_2,$$
$$f_3 = -3t_2(t_1t_3) - 3t_2(t_3t_1) - 2t_3(t_1t_2) - t_3(t_2t_1) - (t_1t_2)t_3 + (t_2t_1)t_3,$$

$$\begin{aligned}
f_4 &= \frac{1}{2}t_1(t_2t_3) - \frac{5}{2}t_2(t_1t_3) - \frac{5}{2}t_2(t_3t_1) - t_3(t_1t_2) - \frac{1}{2}t_3(t_2t_1) - \\
&\quad - (t_1t_2)t_3 + (t_2t_3)t_1,\\
f_5 &= -2t_2(t_1t_3) - \frac{3}{2}t_2(t_3t_1) - 3t_3(t_1t_2) - \frac{5}{2}t_3(t_2t_1) - (t_1t_2)t_3 + (t_3t_1)t_2,\\
f_6 &= -\frac{1}{2}t_1(t_2t_3) - \frac{3}{2}t_2(t_1t_3) - \frac{3}{2}t_2(t_3t_1) - 3t_3(t_1t_2) - \frac{5}{2}t_3(t_2t_1) - \\
&\quad - (t_1t_2)t_3 + (t_3t_2)t_1,
\end{aligned}$$

если $q = -2$.

Мы видим, что

$$\begin{aligned}
f_1 &= \mathrm{zinbiel}^{(q)},\\
f_2 &= \mathrm{zinbiel}^{(q)}(t_1, t_3, t_2),\\
f_3 &= \mathrm{zinbiel}^{(q)}(t_2, t_1, t_3),\\
f_4 &= \mathrm{zinbiel}^{(q)}(t_2, t_3, t_1),\\
f_5 &= \mathrm{zinbiel}^{(q)}(t_3, t_1, t_2),\\
f_6 &= \mathrm{zinbiel}^{(q)}(t_3, t_2, t_1),
\end{aligned}$$

если $q \neq -2$, и

$$\begin{aligned}
f_1 &= -\mathrm{zinbiel}^{(-2)}(t_1, t_2, t_3),\\
f_2 &= \frac{1}{2}\mathrm{zinbiel}_1^{(-2)})(t_1, t_2, t_3),\\
f_3 &= \mathrm{zinbiel}_2^{(-2)}(t_1, t_2, t_3),\\
f_4 &= -\frac{1}{2}\mathrm{zinbiel}^{(-2)}(t_1, t_2, t_3) - \frac{1}{2}\mathrm{zinbiel}_1^{(-2)}(t_2, t_3, t_1) + \mathrm{zinbiel}_2^{(-2)}(t_1, t_2, t_3),\\
f_5 &= 3\mathrm{zinbiel}^{(-2)}(t_1, t_2, t_3) + \frac{1}{2}\mathrm{zinbiel}_1^{(-2)}(t_1, t_2, t_3) - \mathrm{zinbiel}_2^{(-2)}(t_3, t_1, t_2),\\
f_6 &= -\frac{3}{2}\mathrm{zinbiel}^{(-2)}(t_1, t_2, t_3) - \frac{1}{2}\mathrm{zinbiel}_1^{(-2)}(t_2, t_3, t_1) + \mathrm{zinbiel}_2^{(-2)}(t_1, t_2, t_3) + \\
&\quad + \mathrm{zinbiel}_2^{(-2)}(t_2, t_3, t_1),
\end{aligned}$$

если $q = -2$.

Теперь установим, что тождество $\mathrm{zinbiel}^{(-2)} = 0$ является следствием тождеств $\mathrm{zinbiel}_1^{(-2)} = 0$ и $\mathrm{zinbiel}_2^{(-2)} = 0$.

Имеем

$$\begin{aligned}
&- \mathrm{zinbiel}_1^{(-2)}(t_1, t_2, t_3) + \mathrm{zinbiel}_2^{(-2)}(t_1, t_2, t_3) =\\
&\quad = t_2(t_3t_1) - t_3(t_2t_1) + 2(t_1t_2)t_3 - 2(t_1t_3)t_2 - 3t_2(t_1t_3 + t_3t_1) - \\
&\quad - 2t_3(t_1t_2) - t_3(t_2t_1) - (t_1t_2)t_3 + (t_2t_1)t_3 =\\
&\quad = -3t_2(t_1t_3) - \frac{5}{2}t_2(t_3t_1) - 2t_3(t_1t_2) - \frac{3}{2}t_3(t_2t_1) - (t_1t_3)t_2 + (t_2t_1)t_3.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&-\operatorname{zinbiel}_1^{(-2)}(t_1,t_2,t_3)+\operatorname{zinbiel}_2^{(-2)}(t_1,t_2,t_3)-\operatorname{zinbiel}_1^{(-2)}(t_2,t_3,t_1)+\\
&\quad+\operatorname{zinbiel}_2^{(-2)}(t_2,t_3,t_1)-\operatorname{zinbiel}_1^{(-2)}(t_3,t_1,t_2)+\operatorname{zinbiel}_2^{(-2)}(t_3,t_1,t_2)=\\
&\quad=\frac{9}{2}(-t_1(t_2t_3+t_3t_2)-t_2(t_3t_1+t_1t_3)-t_3(t_1t_2+t_2t_1)).
\end{aligned}$$

Иными словами,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{zinbiel}^{(-2)}(t_1,t_2,t_3)=\frac{2}{9}\big\{-\operatorname{zinbiel}_1^{(-2)}(t_1,t_2,t_3)+\operatorname{zinbiel}_2^{(-2)}(t_1,t_2,t_3)-\\
&\quad-\operatorname{zinbiel}_1^{(-2)}(t_2,t_3,t_1)+\operatorname{zinbiel}_2^{(-2)}(t_2,t_3,t_1)-\operatorname{zinbiel}_1^{(-2)}(t_3,t_1,t_2)+\\
&\quad+\operatorname{zinbiel}_2^{(-2)}(t_3,t_1,t_2)\big\}.
\end{aligned}$$

Значит, любое полилинейное тождество степени 3 следует из тождества $\operatorname{zinbiel}^{(q)}=0$, если $q\neq-2$. Если $q=-2$, то любое полилинейное тождество степени 3 следует из тождеств $\operatorname{zinbiel}_1^{(-2)}=0$ и $\operatorname{zinbiel}_2^{(-2)}=0$.

## 5. Восстановление цинбилевых алгебр с помощью $q$-цинбилевых алгебр

**Лемма 5.1.** *Предположим, что алгебра $\mathcal{A}=(A,\star)$ удовлетворяет тождеству $\operatorname{zinbiel}^{(q)}=0$ при $q\neq-2$ и тождествам $\operatorname{zinbiel}_1^{(-2)}=0$ и $\operatorname{zinbiel}_2^{(-2)}=0$ при $q=-2$. Тогда $\mathcal{A}$ изоморфна некоторой алгебре вида $A^{(q)}$, где $A=(A,\circ)$ — алгебра с векторным пространством $A$ и цинбилевым умножением $\circ$.*

**Доказательство.** Если $q\neq-2$, то

$$\begin{aligned}
&(1-q^2)^{-1}\operatorname{zinbiel}(t_1,t_2,t_3)=\\
&\quad=\big((q^3-q)(2+q)\big)^{-1}\big((q-1)\operatorname{zinbiel}^{(q)}(t_1,t_2,t_3)+(q-1)\operatorname{zinbiel}^{(q)}(t_2,t_1,t_3)-\\
&\quad-q\operatorname{zinbiel}^{(q)}(t_2,t_3,t_1)+q^2\operatorname{zinbiel}^{(q)}(t_3,t_2,t_1)\big).
\end{aligned}$$

Если $q=-2$, то

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{3}\operatorname{zinbiel}(t_1,t_2,t_3)=\\
&\quad=-\frac{1}{3}\operatorname{zinbiel}_1^{(-2)}(t_1,t_2,t_3)+\frac{2}{3}\operatorname{zinbiel}_1^{(-2)}(t_2,t_3,t_1)-\frac{1}{3}\operatorname{zinbiel}_1^{(-2)}(t_3,t_1,t_2)-\\
&\quad-\frac{1}{3}\operatorname{zinbiel}_2^{(-2)}(t_1,t_2,t_3)-\frac{2}{3}\operatorname{zinbiel}_2^{(-2)}(t_2,t_3,t_1)+\frac{2}{3}\operatorname{zinbiel}_2^{(-2)}(t_3,t_1,t_2).
\end{aligned}$$

Пусть либо $(A,\star)$ — любая алгебра с тождеством $\operatorname{zinbiel}^{(q)}=0$ при $q\neq-2$, либо $(A,\star)$ удовлетворяет тождествам $\operatorname{zinbiel}_1^{(-2)}=0$ и $\operatorname{zinbiel}_2^{(-2)}=0$ при $q=-2$.

Итак, мы доказали, что алгебра $(A, \circ)$, где

$$a \circ b = (1-q^2)^{-1}(a \star b - qb \star a),$$

является цинбилевой. Легко видеть, что

$$a \circ_q b = a \circ b + qb \circ a = a \star b.$$

Таким образом, $q$-алгебра алгебры $(A, \star)$ изоморфна $\mathcal{A} = (A, \circ)$.

# 6. Алгебры Цинбиля над $-1$-коммутатором

Пусть

$$\mathrm{tortkara}(t_1,t_2,t_3,t_4) = (t_1t_2)(t_3t_4) + (t_1t_4)(t_3t_2) - \mathrm{jac}(t_1,t_2,t_3)t_4 - \mathrm{jac}(t_1,t_4,t_3)t_2,$$

где

$$\mathrm{jac}(t_1,t_2,t_3) = (t_1t_2)t_3 + (t_2t_3)t_1 + (t_3t_1)t_2.$$

**Лемма 6.1.** *Пусть* $(A, \circ)$ — (*правая или левая*) *алгебра Цинбиля. Тогда* $(A, [\,,\,])$ *удовлетворяет тождеству* $\mathrm{tortkara} = 0$, *где* $[a,b] = a \circ b - b \circ a$.

**Доказательство.** Предположим для простоты, что $A$ цинбилева справа.

Так как

$$(a,b,c) = a \circ (b \circ c) - (a \circ b) \circ c = -(b \circ a) \circ c,$$

имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{jac}(a,b,c) &= (a,b,c) + (b,c,a) + (c,a,b) - (b,a,c) - (c,b,a) - (a,c,b) = \\ &= -(b \circ a) \circ c - (c \circ b) \circ a - (a \circ c) \circ b + (a \circ b) \circ c + (b \circ c) \circ a + (c \circ a) \circ b = \\ &= [a,b] \circ c + [b,c] \circ a + [c,a] \circ b.\end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned}[\mathrm{jac}(a,b,c),d] &= \mathrm{jac}(a,b,c) \circ d - d \circ \mathrm{jac}(a,b,c) = \\ &= ([a,b] \circ c) \circ d + ([b,c] \circ a) \circ d + ([c,a] \circ b) \circ d - \\ &- d \circ ([a,b] \circ c) - d \circ ([b,c] \circ a) - d \circ ([c,a] \circ b) = \\ &= ([a,b] \circ c) \circ d + ([b,c] \circ a) \circ d + ([c,a] \circ b) \circ d - \\ &- [a,b] \circ (d \circ c) - [b,c] \circ (d \circ a) - [c,a] \circ (d \circ b).\end{aligned}$$

Аналогично можно вычислить $[\mathrm{jac}(a,d,c),b]$ и

$$\begin{aligned}&[\mathrm{jac}(a,b,c),d] + [\mathrm{jac}(a,d,c),b] = \\ &= ([a,b] \circ c) \circ d + ([b,c] \circ a) \circ d + ([c,a] \circ b) \circ d - \\ &- [a,b] \circ (d \circ c) - [b,c] \circ (d \circ a) - [c,a] \circ (d \circ b) + \\ &+ ([a,d] \circ c) \circ b + ([d,c] \circ a) \circ b + ([c,a] \circ d) \circ b - \\ &- [a,d] \circ (b \circ c) - [d,c] \circ (b \circ a) - [c,a] \circ (b \circ d).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tortkara}(a,b,c,d) &= [[a,b],[c,d]] + [[a,d],[c,b]] - \\
&- ([a,b]\circ c)\circ d - ([b,c]\circ a)\circ d - ([c,a]\circ b)\circ d + \\
&+ [a,b]\circ(d\circ c) + [b,c]\circ(d\circ a) + [c,a]\circ(d\circ b) - \\
&- ([a,d]\circ c)\circ b - ([d,c]\circ a)\circ b - ([c,a]\circ d)\circ b + \\
&+ [a,d]\circ(b\circ c) + [d,c]\circ(b\circ a) + [c,a]\circ(b\circ d) = \\
&= [a,b]\circ(c\circ d) + [a,d]\circ(c\circ b) + [d,c]\circ(a\circ b) + \\
&+ [b,c]\circ(a\circ d) + [c,a]\circ(d\circ b) + [c,a]\circ(b\circ d) - \\
&- ([a,b]\circ c)\circ d - ([b,c]\circ a)\circ d - ([c,a]\circ b)\circ d - \\
&- ([a,d]\circ c)\circ b - ([d,c]\circ a)\circ b - ([c,a]\circ d)\circ b = X + Y,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
X &= [a,d]\circ(c\circ b) + [d,c]\circ(a\circ b) + [c,a]\circ(d\circ b) - \\
&- ([a,d]\circ c)\circ b - ([d,c]\circ a)\circ b - ([c,a]\circ d)\circ b, \\
Y &= [a,b]\circ(c\circ d) + [b,c]\circ(a\circ d) + [c,a]\circ(b\circ d) - \\
&- ([a,b]\circ c)\circ d - ([b,c]\circ a)\circ d - ([c,a]\circ b)\circ d.
\end{aligned}$$

По тождеству правой цинбилевости

$$X = (c\circ[a,d] + a\circ[d,c] + d\circ[c,a])\circ b.$$

По тождеству левой коммутативности

$$c\circ[a,d] + a\circ[d,c] + d\circ[c,a] = 0.$$

Таким образом, $X = 0$. Аналогично, $Y = 0$. Значит, $\operatorname{tortkara}(a,b,c,d) = 0$ для всех $a,b,c,d \in A$, если $A$ цинбилева справа.

**Лемма 6.2.** *Тождество* $\operatorname{tortkara} = 0$ *минимально для* $\mathfrak{Zinbiel}^{(-1)}$, *т. е. любое тождество степени* 3 *для* $\mathfrak{Zinbiel}^{(-1)}$ *следует из полусимметрического тождества, а любое тождество степени* 4 *для* $\mathfrak{Zinbiel}^{(-1)}$ *следует из тождества* $\operatorname{tortkara} = 0$.

**Доказательство.** Пусть

$$X_3(t_1,t_2,t_3) = \lambda_1(t_1t_2)t_3 + \lambda_2(t_1t_3)t_2 + \lambda_3(t_2t_3)t_1 \text{ —}$$

общий антикоммутативный полином, т. е. элемент свободной антикоммутативной алгебры степени 3. Пусть

$$\begin{aligned}
&X_4(t_1,t_2,t_3,t_4) = \\
&\quad = \lambda_1(t_1t_2)(t_3t_4) + \lambda_2(t_1t_3)(t_2t_4) + \lambda_3(t_2t_3)(t_1t_4) + \lambda_4((t_1t_2)t_3)t_4 + \\
&\quad + \lambda_5((t_1t_3)t_2)t_4 + \lambda_6((t_1t_4)t_2)t_3 + \lambda_7((t_2t_3)t_1)t_4 + \lambda_8((t_2t_4)t_1)t_3 + \\
&\quad + \lambda_9((t_3t_4)t_1)t_2 + \lambda_{10}((t_1t_2)t_4)t_3 + \lambda_{11}((t_1t_3)t_4)t_2 + \lambda_{12}((t_1t_4)t_3)t_2 + \\
&\quad + \lambda_{13}((t_2t_3)t_4)t_1 + \lambda_{14}((t_2t_4)t_3)t_1 + \lambda_{15}((t_3t_4)t_2)t_1 \text{ —}
\end{aligned}$$

общий антикоммутативный полином степени 4.

Пусть $F$ — свободная алгебра Цинбиля с порождающими $a$, $b$, $c$, $d$ с умножением $(x,y)\mapsto xy$. Вычислим $X_3(a,b,c)\in F$ в терминах коммутаторов $[x,y]=$ $=xy-yx$. Имеем

$$\begin{aligned}X_3(a,b,c)&=\lambda_1[[a,b],c]+\lambda_2[[a,c],b]+\lambda_3[[b,c],a]=\\&=(\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)(ab)c+(-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)(ac)b+(-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)(ba)c+\\&+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)(bc)a+(-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)(ca)b+(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)(cb)a.\end{aligned}$$

Так как множество элементов $\{(ab)c,\ (ba)c,\ (ca)b,\ (ac)b,\ (bc)a,\ (cb)a\}$ образует базис полилинейной части свободной алгебры Цинбиля степени 3, мы видим, что $X_3(a,b,c)=0$, если и только если $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=0$. Это означает, что любое тождество степени 3 для $\mathfrak{Zinbiel}^{(-1)}$ следует из тождества антикоммутативности $t_1t_2+t_2t_1=0$.

Вычислим $X_4(a,b,c,d)$ в терминах коммутатора. Имеем

$$\begin{aligned}&X_4(a,b,c,d)=\\&=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4-\lambda_5+\lambda_6-\lambda_7+\lambda_8+\lambda_9-\lambda_{10}-\lambda_{11}+\lambda_{12}-\lambda_{13}+\lambda_{14}+\lambda_{15})((ab)c)d+\\&+(-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4+\lambda_5-\lambda_6+\lambda_7-\lambda_8-\lambda_9+\lambda_{10}+\lambda_{11}-\lambda_{12}+\lambda_{13}-\lambda_{14}-\lambda_{15})((ab)d)c+\\&+(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6+\lambda_7+\lambda_8+\lambda_9-\lambda_{10}-\lambda_{11}+\lambda_{12}+\lambda_{13}+\lambda_{14}+\lambda_{15})((ac)b)d+\\&+(-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4-\lambda_5-\lambda_6-\lambda_7-\lambda_8-\lambda_9+\lambda_{10}+\lambda_{11}-\lambda_{12}-\lambda_{13}-\lambda_{14}-\lambda_{15})((ac)d)b+\\&+(-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6+\lambda_7+\lambda_8-\lambda_9-\lambda_{10}+\lambda_{11}-\lambda_{12}+\lambda_{13}+\lambda_{14}-\lambda_{15})((ad)b)c+\\&+(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4-\lambda_5-\lambda_6-\lambda_7-\lambda_8+\lambda_9+\lambda_{10}-\lambda_{11}+\lambda_{12}-\lambda_{13}-\lambda_{14}+\lambda_{15})((ad)c)b+\\&+(-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4-\lambda_5+\lambda_6-\lambda_7+\lambda_8+\lambda_9+\lambda_{10}-\lambda_{11}+\lambda_{12}-\lambda_{13}+\lambda_{14}+\lambda_{15})((ba)c)d+\\&+(\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5-\lambda_6+\lambda_7-\lambda_8-\lambda_9-\lambda_{10}+\lambda_{11}-\lambda_{12}+\lambda_{13}-\lambda_{14}-\lambda_{15})((ba)d)c+\\&+(-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6+\lambda_7+\lambda_8+\lambda_9+\lambda_{10}+\lambda_{11}+\lambda_{12}-\lambda_{13}+\lambda_{14}+\lambda_{15})((bc)a)d+\\&+(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4-\lambda_5-\lambda_6-\lambda_7-\lambda_8-\lambda_9-\lambda_{10}-\lambda_{11}-\lambda_{12}+\lambda_{13}-\lambda_{14}-\lambda_{15})((bc)d)a+\\&+(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6+\lambda_7+\lambda_8-\lambda_9+\lambda_{10}+\lambda_{11}+\lambda_{12}+\lambda_{13}-\lambda_{14}-\lambda_{15})((bd)a)c+\\&+(-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4-\lambda_5-\lambda_6-\lambda_7-\lambda_8+\lambda_9-\lambda_{10}-\lambda_{11}-\lambda_{12}-\lambda_{13}+\lambda_{14}+\lambda_{15})((bd)c)a+\\&+(\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4-\lambda_5+\lambda_6+\lambda_7+\lambda_8+\lambda_9-\lambda_{10}+\lambda_{11}+\lambda_{12}+\lambda_{13}+\lambda_{14}+\lambda_{15})((ca)b)d+\\&+(-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5-\lambda_6-\lambda_7-\lambda_8-\lambda_9+\lambda_{10}-\lambda_{11}-\lambda_{12}-\lambda_{13}-\lambda_{14}-\lambda_{15})((ca)d)b+\\&+(-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6-\lambda_7+\lambda_8+\lambda_9+\lambda_{10}+\lambda_{11}+\lambda_{12}+\lambda_{13}+\lambda_{14}+\lambda_{15})((cb)a)d+\\&+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4-\lambda_5-\lambda_6+\lambda_7-\lambda_8-\lambda_9-\lambda_{10}-\lambda_{11}-\lambda_{12}-\lambda_{13}-\lambda_{14}-\lambda_{15})((cb)d)a+\\&+(-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6-\lambda_7-\lambda_8+\lambda_9+\lambda_{10}+\lambda_{11}+\lambda_{12}-\lambda_{13}-\lambda_{14}-\lambda_{15})((cd)a)b+\\&+(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4-\lambda_5-\lambda_6+\lambda_7+\lambda_8-\lambda_9-\lambda_{10}-\lambda_{11}-\lambda_{12}+\lambda_{13}+\lambda_{14}+\lambda_{15})((cd)b)a+\\&+(-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4+\lambda_5-\lambda_6+\lambda_7+\lambda_8-\lambda_9-\lambda_{10}+\lambda_{11}+\lambda_{12}+\lambda_{13}+\lambda_{14}-\lambda_{15})((da)b)c+\\&+(\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4-\lambda_5+\lambda_6-\lambda_7-\lambda_8+\lambda_9+\lambda_{10}-\lambda_{11}-\lambda_{12}-\lambda_{13}-\lambda_{14}+\lambda_{15})((da)c)b+\\&+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6+\lambda_7-\lambda_8-\lambda_9+\lambda_{10}+\lambda_{11}+\lambda_{12}+\lambda_{13}+\lambda_{14}-\lambda_{15})((db)a)c+\\&+(-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4-\lambda_5-\lambda_6-\lambda_7+\lambda_8+\lambda_9-\lambda_{10}-\lambda_{11}-\lambda_{12}-\lambda_{13}-\lambda_{14}+\lambda_{15})((db)c)a+\\&+(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6-\lambda_7-\lambda_8-\lambda_9+\lambda_{10}+\lambda_{11}+\lambda_{12}-\lambda_{13}-\lambda_{14}+\lambda_{15})((dc)a)b+\\&+(-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4-\lambda_5-\lambda_6+\lambda_7+\lambda_8+\lambda_9-\lambda_{10}-\lambda_{11}-\lambda_{12}+\lambda_{13}+\lambda_{14}-\lambda_{15})((dc)b)a.\end{aligned}$$

Так как множество элементов

$$\begin{aligned}\{&((ab)c)d,\ ((bc)a)d,\ ((ca)b)d),\ ((ba)c)d,\ ((cb)a)d,\ ((ac)b)d,\\ &((ab)d)c,\ ((bd)a)c,\ ((da)b)c,\ ((ba)d)c,\ ((db)a)c,\ ((ad)b)c,\\ &((ad)c)b,\ ((dc)a)b,\ ((ca)d)b,\ ((da)c)b,\ ((cd)a)b,\ ((ac)d)b,\\ &((db)c)a,\ ((bc)d)a,\ ((cd)b)a,\ ((bd)c)a,\ ((cb)d)a,\ ((dc)b)a\}\end{aligned}$$

образует базис степени 4 полилинейной части свободной алгебры Цинбиля, то соотношение $X_4(a,b,c,d)=0$ даёт нам систему из 24 линейных уравнений с 15 неизвестными $\lambda_i$, $i=1,\dots,15$. Мы видим, что это система имеет ранг 12, и мы можем рассмотреть $\lambda_{10},\lambda_{12},\lambda_{15}$ в качестве свободных параметров и выразить другие параметры следующим образом:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\lambda_{12}-\lambda_{15},\\ \lambda_2 &= \lambda_{10}+\lambda_{15},\\ \lambda_3 &= -\lambda_{10}-\lambda_{12},\\ \lambda_4 &= \lambda_{10}+\lambda_{12}+\lambda_{15},\\ \lambda_5 &= -\lambda_{10}-\lambda_{12}-\lambda_{15},\\ \lambda_6 &= -\lambda_{10},\\ \lambda_7 &= \lambda_{10}+\lambda_{12}+\lambda_{15},\\ \lambda_8 &= \lambda_{10},\\ \lambda_9 &= -\lambda_{12},\\ \lambda_{11} &= -\lambda_{12},\\ \lambda_{13} &= \lambda_{15},\\ \lambda_{14} &= -\lambda_{15}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$X_4 = X_4(t_1,t_2,t_3,t_4) = \lambda_{10}f_1+\lambda_{12}f_2+\lambda_{15}f_3,$$

где

$$\begin{aligned}f_1 &= (t_1t_3)(t_2t_4)-(t_2t_3)(t_1t_4)+((t_1t_2)t_3)t_4+\\ &\quad+((t_1t_2)t_4)t_3-((t_1t_3)t_2)t_4-((t_1t_4)t_2)t_3+((t_2t_3)t_1)t_4+((t_2t_4)t_1)t_3,\\ f_2 &= -(t_1t_2)(t_3t_4)-(t_2t_3)(t_1t_4)+((t_1t_2)t_3)t_4-\\ &\quad-((t_1t_3)t_2)t_4-((t_1t_3)t_4)t_2+((t_1t_4)t_3)t_2+((t_2t_3)t_1)t_4-((t_3t_4)t_1)t_2,\\ f_3 &= -(t_1t_2)(t_3t_4)+(t_1t_3)(t_2t_4)+((t_1t_2)t_3)t_4-\\ &\quad-((t_1t_3)t_2)t_4+((t_2t_3)t_1)t_4+((t_2t_3)t_4)t_1-((t_2t_4)t_3)t_1+((t_3t_4)t_2)t_1.\end{aligned}$$

Мы видим, что имеют место следующие равенства полусимметрических полиномов:

$$\begin{aligned}f_1 &= (t_1t_3)(t_2t_4)+(t_1t_4)(t_2t_3)-((t_2t_1)t_4+(t_1t_4)t_2+(t_4t_2)t_1)t_3-\\ &\quad-((t_2t_1)t_3+(t_1t_3)t_2+(t_3t_2)t_1)t_4=\mathrm{tortkara}(t_1,t_3,t_2,t_4),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_2 &= -(t_1t_2)(t_3t_4) - (t_1t_4)(t_3t_2) + ((t_1t_2)t_3 - (t_1t_3)t_2 + (t_2t_3)t_1)t_4 + \\
&\quad + ((t_3t_1)t_4 + (t_1t_4)t_3 + (t_4t_3)t_1)t_2 = -\mathrm{tortkara}(t_1,t_2,t_3,t_4),\\
f_3 &= (t_2t_1)(t_3t_4) + (t_2t_4)(t_3t_1) - ((t_2t_1)t_3 + (t_1t_3)t_2 + (t_3t_2)t_1)t_4 - \\
&\quad - ((t_3t_2)t_4 + (t_2t_4)t_3 + (t_4t_3)t_2)t_1 = \mathrm{tortkara}(t_2,t_1,t_3,t_4).
\end{aligned}
$$

Это означает, что любое тождество степени 3 категории $\mathfrak{Zinbiel}^{(-1)}$ следует из тождества $\mathrm{tortkara} = 0$.

## 7. Алгебры Цинбиля—Йордана

В [6] доказано, что $(A, \{\ ,\ \})$ коммутативна и ассоциативна, если $(A, \circ)$ — алгебра Цинбиля, где $\{a,b\} = a\circ b + b\circ a$.

## 8. Алгебры с умножением $a \star b = a \iint b$

Пусть $A = \mathbb{C}[x]$, а $\partial = \partial/\partial x$ и $\int = \int\limits_0^x$ — эндоморфизмы дифференцирования и интегрирования. Положим $\int 0 = 0$. Например, $\partial(x^4) = 4x^3$ и $\int x^4 = x^5/5$. Будем писать $\iint a$ вместо $\int\limits_0^x \Big(\int\limits_0^x a\,dx\Big)\,dx$. Наделим $\mathbb{C}[x]$ другим умножением

$$a \star b = a \iint b.$$

Например, $x^2 \star x^3 = 1/20x^7$.

**Лемма 8.1.** *Пусть*

$$
\begin{aligned}
G = \Big(\int a\Big)\int\Big(b\iint c\Big) + \Big(\int b\Big)\int\Big(c\iint a\Big) + \Big(\int c\Big)\int\Big(a\iint b\Big) - \\
- \Big(\int b\Big)\int\Big(a\iint c\Big) - \Big(\int c\Big)\int\Big(b\iint a\Big) - \Big(\int a\Big)\int\Big(c\iint b\Big).
\end{aligned}
$$

*Тогда* $G = 0$.

**Доказательство.** Имеем

$$\partial G = G_1 + G_2,$$

где

$$
\begin{aligned}
G_1 = a\int\Big(b\iint c\Big) + b\int\Big(c\iint a\Big) + c\int\Big(a\iint b\Big) - \\
- b\int\Big(a\iint c\Big) - c\int\Big(b\iint a\Big) - a\int\Big(c\iint b\Big),
\end{aligned}
$$

$$G_2 = \left(\int a\right)\left(b\iint c\right) + \left(\int b\right)\left(c\iint a\right) + \left(\int c\right)\left(a\iint b\right) -$$
$$- \left(\int b\right)\left(a\iint c\right) - \left(\int c\right)\left(b\iint a\right) - \left(\int a\right)\left(c\iint b\right).$$

Тогда

$$\partial G_1 = G_{1,1} + G_{1,2},$$

где

$$G_{1,1} = \partial a\int\left(b\iint c\right) + \partial b\int\left(c\iint a\right) + \partial c\int\left(a\iint b\right) -$$
$$- \partial b\int\left(a\iint c\right) - \partial c\int\left(b\iint a\right) - \partial a\int\left(c\iint b\right),$$
$$G_{1,2} = a\left(b\iint c\right) + b\left(c\iint a\right) + c\left(a\iint b\right) -$$
$$- b\left(a\iint c\right) - c\left(b\iint a\right) - a\left(c\iint b\right) = 0.$$

Далее,

$$\partial G_2 = G_{2,1} + G_{2,2} + G_{2,3},$$

где

$$G_{2,1} = a\left(b\iint c\right) + b\left(c\iint a\right) + c\left(a\iint b\right) -$$
$$- b\left(a\iint c\right) - c\left(b\iint a\right) - a\left(c\iint b\right) = 0,$$
$$G_{2,2} = \left(\int a\right)\partial b\left(\iint c\right) + \left(\int b\right)\partial c\left(\iint a\right) + \left(\int c\right)\partial a\left(\iint b\right) -$$
$$- \left(\int b\right)\partial a\left(\iint c\right) - \left(\int c\right)\partial b\left(\iint a\right) - \left(\int a\right)\partial c\left(\iint b\right),$$
$$G_{2,3} = \left(\int a\right)\left(b\int c\right) + \left(\int b\right)\left(c\int a\right) + \left(\int c\right)\left(a\int b\right) -$$
$$- \left(\int b\right)\left(a\int c\right) - \left(\int c\right)\left(b\int a\right) - \left(\int a\right)\left(c\int b\right) = 0.$$

По формуле интегрирования по частям

$$\int\left(a\iint b\right) - \int\left(b\iint a\right) = -\left(\int b\right)\left(\iint a\right) + \left(\int a\right)\left(\iint b\right).$$

Поэтому $G_{1,1} + G_{2,2} = 0$. Значит, мы получаем функциональное тождество $\partial^2 G = 0$. Таким образом, $G = 0$.

**Лемма 8.2.** *Для любых* $a, b, c \in K[x]$

$$\begin{aligned}
&\iint\Big(a\iint\Big(b\iint c\Big)\Big)+\iint\Big(b\iint\Big(c\iint a\Big)\Big)+\iint\Big(c\iint\Big(a\iint b\Big)\Big)-\\
&\quad-\iint\Big(b\iint\Big(a\iint c\Big)\Big)-\iint\Big(c\iint\Big(b\iint a\Big)\Big)-\iint\Big(a\iint\Big(c\iint b\Big)\Big)=\\
&\quad=\Big(\iint a\Big)\iint\Big(b\iint c\Big)+\Big(\iint b\Big)\iint\Big(c\iint a\Big)+\Big(\iint c\Big)\iint\Big(a\iint b\Big)-\\
&\quad-\Big(\iint b\Big)\iint\Big(a\iint c\Big)-\Big(\iint c\Big)\iint\Big(b\iint a\Big)-\Big(\iint a\Big)\iint\Big(c\iint b\Big).
\end{aligned}$$

**Доказательство.** Обозначим через $R$ и $Q$ левую и правую части этого тождества. Мы видим, что

$$\partial^2 R = R_1,$$

где

$$\begin{aligned}
R_1 = a\iint\Big(b\iint c\Big)+b\iint\Big(c\iint a\Big)+c\iint\Big(a\iint b\Big)-\\
-b\iint\Big(a\iint c\Big)-c\iint\Big(b\iint a\Big)-a\iint\Big(c\iint b\Big).
\end{aligned}$$

Далее,

$$\partial^2 Q = Q_1 + 2Q_2 + Q_3,$$

где

$$\begin{aligned}
Q_1 &= R_1,\\
Q_2 &= G,\\
Q_3 &= \Big(\iint a\Big)b\iint c+\Big(\iint b\Big)c\iint a+\Big(\iint c\Big)a\iint b-\\
&\quad-\Big(\iint b\Big)a\iint c-\Big(\iint c\Big)b\iint a-\Big(\iint a\Big)c\iint b=0
\end{aligned}$$

(определение $G$ см. в лемме 8.1). По лемме 8.1 $Q_2 = 0$. Значит, получаем функциональное тождество $\partial^2 R = \partial^2 Q$. Таким образом, $R = Q$.

**Лемма 8.3.** *Для любых* $a, b, c \in \mathbb{C}[x]$

$$(a \star b) \star c = (a \star c) \star b,$$
$$(a, b, [c, d]) + (a, c, [d, b]) + (a, d, [b, c]) = 0,$$

*где* $[a, b] = a \star b - b \star a$ *и* $(a, b, c) = a \star (b \star c) - (a \star b) \star c$.

Иными словами, алгебра $(\mathbb{C}[x], \star)$ удовлетворяет тождествам (1) и (2).

**Доказательство.** Тождество правой коммутативности очевидно:

$$(a \star b) \star c = \Big(a\iint b\Big)\iint c = \Big(a\iint c\Big)\iint b = (a \star c) \star b.$$

Вторая часть следует из леммы 8.2.

**Лемма 8.4.** *Предположим, что* $(A,\star)$ *удовлетворяет тождеству правой коммутативности* (1) *и тождеству* (3). *Тогда алгебра* $(A,[\,,\,])$ *над коммутатором* $[a,b]=a\star b-b\star a$ *удовлетворяет тождеству* $\mathrm{tortkara}=0$.

**Доказательство.** Из тождества правой коммутативности следует

$$\begin{aligned}\mathrm{jac}(a,b,c) &= (a\star b-b\star a)\star c-c\star(a\star b-b\star a)+\\&+(b\star c-c\star b)\star a-a\star(b\star c-c\star b)+(c\star a-a\star c)\star b-b\star(c\star a-a\star c)=\\&=-a\star(b\star c-c\star b)-b\star(c\star a-a\star c)-c\star(a\star b-b\star a)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}&[\mathrm{jac}(a,b,c),d]=\\&=(-a\star(b\star c-c\star b)-b\star(c\star a-a\star c)-c\star(a\star b-b\star a))\star d+\\&+d\star(a\star(b\star c-c\star b)+b\star(c\star a-a\star c)+c\star(a\star b-b\star a)=\\&=-(a\star[b,c]+b\star[c,a]+c\star[a,b])\star d+d\star(a\star[b,c])+b\star[c,a]+c\star[a,b].\end{aligned}$$

Аналогично можно вычислить $[\mathrm{jac}(a,d,c),b]$. Мы видим, что

$$\begin{aligned}&[\mathrm{jac}(a,b,c),d]+[\mathrm{jac}(a,d,c),b]=\\&=-(a\star[b,c]+b\star[c,a]+c\star[a,b])\star d+d\star(a\star[b,c]+b\star[c,a]+c\star[a,b])-\\&-(a\star[d,c]+d\star[c,a]+c\star[a,d])\star b+b\star(a\star[d,c]+d\star[c,a]+c\star[a,d])=\\&=-(a\star d)\star[b,c]-(b\star d)\star[c,a]-(c\star d)\star[a,b]+\\&+d\star(a\star[b,c]+b\star[c,a]+c\star[a,b])-\\&-(a\star b)\star[d,c]-(d\star b)\star[c,a]-(c\star b)\star[a,d]+\\&+b\star(a\star[d,c]+d\star[c,a]+c\star[a,d]).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}&\mathrm{tortkara}(a,b,c,d)+[c,d]\star[a,b]+[c,b]\star[a,d]=\\&=(a\star b)\star[c,d]-(b\star a)\star[c,d]+(a\star d)\star[c,b]-(d\star a)\star[c,b]+\\&+(a\star d)\star[b,c]+(b\star d)\star[c,a]+(c\star d)\star[a,b]-\\&-d\star(a\star[b,c]+b\star[c,a]+c\star[a,b])+\\&+(a\star b)\star[d,c]+(d\star b)\star[c,a]+(c\star b)\star[a,d]-\\&-b\star(a\star[d,c]+d\star[c,a]+c\star[a,d])=\\&=-(b\star a)\star[c,d]-(d\star a)\star[c,b]+(b\star d)\star[c,a]+(c\star d)\star[a,b]-\\&-d\star(a\star[b,c])-d\star(b\star[c,a])-d\star(c\star[a,b])+(d\star b)\star[c,a]+\\&+(c\star b)\star[a,d]-b\star(a\star[d,c])-b\star(d\star[c,a])-b\star(c\star[a,d])=\\&=T(a,b,c,d)+[c,d]\star[a,b]+[c,b]\star[a,d],\end{aligned}$$

где

$$T(a, b, c, d) = (b, a, [c, d]) + (b, d, [a, c]) + (b, c, [d, a]) + \\ + (d, a, [c, b]) + (d, c, [b, a]) + (d, b, [a, c]).$$

Из (3) получаем $T(a, b, c, d) = 0$ для любых $a, b, c, d \in A$.

## 9. Доказательство теоремы 2.1

Доказательство следует из лемм 3.1, 3.2, 3.3, 4.1, 5.1.

## 10. Доказательство теоремы 2.2

Доказательство следует из лемм 6.1, 6.2.

## 11. Доказательство теоремы 2.3

Доказательство следует из лемм 8.3 и 8.4.

Выражаю благодарность М. Кавски, А. Аграчёву, А. Сарычеву и Е. Роша за их стимулирующие вопросы о тождествах в алгебрах Цинбиля над коммутатором Ли.

## Литература

[1] Аграчёв А., Гамкрелидзе Р. Экспоненциальное представление потоков и хронологическое исчисление // Мат. сб. — 1978. — Т. 107, № 4. — С. 487—532.

[2] Аграчёв А., Гамкрелидзе Р. Хронологические алгебры и нестационарные векторные поля // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геометрии. Вып. 11. — М.: ВИНИТИ, 1980. — С. 135—176.

[3] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1976.

[4] Кавский М. Хронологические алгебры: комбинаторика и управление // Итоги науки и техн. Вып. 64. — М.: ВИНИТИ, 1999. — С. 144—178.

[5] Dzhumadil'daev A. S. Novikov—Jordan algebras // Comm. Algebra. — 2002. — Vol. 30, no. 11. — P. 5205—5238.

[6] Loday J.-L. Cup-product for Leibniz cohomology and dual Leibniz algebras // Math. Scand. — 1995. — Vol. 77, no. 2. — P. 189—196.