Факторизация алгебры петель над $\mathrm{so}(4)$ и интегрируемые нелинейные дифференциальные уравнения

О. В. ЕФИМОВСКАЯ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 517.958+512.77

Ключевые слова: интегрируемые нелинейные дифференциальные уравнения, пара Лакса, алгебра петель.

Аннотация

Рассматриваются факторизующие подалгебры для алгебры петель над $\mathrm{so}(4)$. В терминах коэффициентов коммутационных соотношений найден явный вид связанных с факторизующей подалгеброй системы типа уравнения главного кирального поля, двухспиновой модели типа уравнения Ландау—Лифшица и гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с однородным квадратичным гамильтонианом и линейными $\mathrm{so}(4)$-скобками Пуассона.

Abstract

O. V. Efimovskaya, Factorization of loop algebras over $\mathrm{so}(4)$ *and integrable nonlinear differential equations*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 3, pp. 79—94.

We consider factoring subalgebras for loop algebras over $\mathrm{so}(4)$. Given a factoring subalgebra, we find (in terms of coefficients of commutator relations) an explicit form of (1) the corresponding system of the chiral field equation type, (2) the corresponding two-spin model of the Landau–Lifshitz equation, and (3) the corresponding Hamiltonian system of ordinary differential equations with homogeneous quadratic Hamiltonian and linear $\mathrm{so}(4)$-Poisson brackets.

Введение

Наиболее универсальным современным способом интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений является метод обратной задачи рассеяния [8, 12]. Этот метод применим, если для исследуемого уравнения известно представление Лакса [15].

Рассмотрим случай обыкновенных дифференциальных уравнений. Представлением Лакса для дифференциального уравнения

$$\mathbf{U}_t = \mathbf{F}(\mathbf{U}) \tag{1}$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 3, с. 79—94.

является операторное соотношение

$$L_t = [A, L], \tag{2}$$

где $L = L(\mathbf{U}, \lambda)$, $A = A(\mathbf{U}, \lambda)$ — некоторые матрицы, такие что (2) эквивалентно (1).

Нетрудно показать, что если L удовлетворяет (2), то коэффициенты характеристического многочлена $\mathrm{Det}(L - \mu E)$ являются интегралами движения.

Пример. Пусть $\mathbf{U}(t)$ является матрицей размера $N \times N$,

$$L = a\lambda + \mathbf{U}, \quad A = \frac{\mathbf{U}^2}{\lambda},$$

где $a = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_N)$. Тогда (2) эквивалентно следующему соотношению:

$$\mathbf{U}_t = [\mathbf{U}^2, a].$$

В частности, если

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ -u_1 & 0 & u_3 \\ -u_2 & -u_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix},$$

то (2) эквивалентно волчку Эйлера

$$\begin{aligned} (u_1)_t &= (a_3 - a_2)u_2u_3, \\ (u_2)_t &= (a_1 - a_3)u_1u_3, \\ (u_3)_t &= (a_2 - a_1)u_1u_2. \end{aligned}$$

Характеристический многочлен $\mathrm{Det}(L - \mu E)$ задаётся формулой

$$(\mu - a_1\lambda)(\mu - a_2\lambda)(\mu - a_3\lambda) + (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)\mu + (a_1u_1^2 + a_2u_2^2 + a_3u_3^2)\lambda.$$

Соответствующая характеристическая кривая

$$\mathrm{Det}(L - \mu E) = 0$$

является эллиптической. Собственная функция $\Psi(\lambda, \mu, t)$, удовлетворяющая уравнению $L\Psi = \mu\Psi$, задаёт векторное расслоение с некоторыми специальными аналитическими свойствами над этой кривой. Зависимость Ψ от переменной t описывается уравнением $\Psi_t = A\Psi$. Современный подход [5,6], основанный на представлении Лакса, состоит в том, чтобы сначала восстановить $\Psi(\lambda, \mu, t)$ в терминах θ-функций и затем, зная Ψ, найти неизвестную функцию $\mathbf{U}(t)$.

Для уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными x и t представление Лакса выглядит следующим образом:

$$L_t = A_x + [A, L]. \tag{3}$$

Как правило, предполагают, что A и L в формулах (2), (3) являются функциями от параметра λ, принимающими значения в некоторой конечномерной алгебре Ли $\mathcal{G}$. Однако в соотношении (2) можно считать, что A принадлежит $\mathcal{G}$, а L — некоторому модулю над $\mathcal{G}$. Для (3) такое предположение невозможно.

Основной вопрос при попытке перечислить все пары Лакса, соответствующие данной алгебре Ли $\mathcal{G}$, состоит в том, каков должен быть характер зависимости A и L от λ. Обычно его фиксируют, считая, что A и L являются рациональными (или эллиптическими) функциями от λ.

Единственный подход [1, 10, 13], свободный от этого недостатка, состоит в том, что мы считаем A и L рядами Лорана по λ вида

$$\sum_{i=-n}^{\infty} g_i\lambda^i, \quad \text{где} \quad g_i \in \mathcal{G}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Однако если эти ряды произвольны, то уравнение Лакса эквивалентно бесконечной системе дифференциальных уравнений относительно бесконечного набора коэффициентов.

Предположим, что у нас имеется разложение (см. [1, 3, 10, 11, 13])

$$\mathcal{G}((\lambda)) = \mathcal{G}[[\lambda]] \oplus \mathcal{U} \tag{5}$$

алгебры $\mathcal{G}((\lambda))$ всех рядов Лорана в прямую сумму (как векторных пространств) подалгебры Ли $\mathcal{G}[[\lambda]]$ рядов Тейлора и некоторой дополнительной подалгебры Ли $\mathcal{U}$. Следуя И. В. Череднику [13], мы будем называть подалгебру $\mathcal{U}$ *факторизующей*.

Если A и L принадлежат $\mathcal{U}$, соотношение (2) эквивалентно конечному набору уравнений. Действительно, если в элементе $L_t - [A, L]$ алгебры $\mathcal{U}$ сократились все члены с отрицательными степенями λ, то в силу (5) этот элемент тождественно равен нулю. То же самое верно и для соотношения (3).

Для приложений особенно важны маломерные полупростые алгебры Ли $\mathcal{G}$. Например, как было показано в [4], классическим волчкам динамики твёрдого тела соответствуют случаи $\mathcal{G} = \mathrm{so}(3)$ и $\mathcal{G} = \mathrm{so}(4)$. В [11] описаны все факторизующие подалгебры для $\mathcal{G} = \mathrm{so}(3)$.

В статье исследуются факторизующие подалгебры в случае $\mathcal{G} = \mathrm{so}(4)$. Известно [2, 3, 7, 14], что с каждой факторизующей подалгеброй для $\mathrm{so}(4)$ связаны следующие интегрируемые дифференциальные уравнения:

- нелинейная гиперболическая система типа уравнения кирального поля;
- двухспиновая модель типа уравнения Ландау—Лифшица;
- гамильтонова система обыкновенных дифференциальных уравнений с однородным квадратичным гамильтонианом и линейными $\mathrm{so}(4)$-скобками Пуассона.

В статье все эти системы явно выписаны в терминах постоянных из коммутационных соотношений (1.11)—(1.14).

Автор благодарна В. В. Соколову за постановку задачи, А. В. Михалёву за внимание к работе. Работа была частично поддержана грантом НШ 1910.2003.1.

1. Факторизация алгебры петель

Пусть $\mathcal{G}$ — полупростая конечномерная алгебра Ли. Алгеброй петель $\mathcal{G}((\lambda))$ над $\mathcal{G}$ называется алгебра рядов Лорана вида

$$\sum_{i=-n}^{\infty} g_i\lambda^i, \quad \text{где} \quad g_i \in \mathcal{G}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.1}$$

по параметру λ с коэффициентами из алгебры $\mathcal{G}$. При сложении двух элементов алгебры петель складываются коэффициенты при одинаковых степенях λ. Коммутатор задаётся формулой

$$[a\lambda^p, b\lambda^q] = [a, b]\lambda^{p+q}.$$

Факторизацией алгебры $\mathcal{G}((\lambda))$ будем называть всякое разложение

$$\mathcal{G}((\lambda)) = \mathcal{G}[[\lambda]] \oplus \mathcal{U} \tag{1.2}$$

алгебры $\mathcal{G}((\lambda))$ в прямую сумму (как векторных пространств) подалгебры Ли $\mathcal{G}[[\lambda]]$ рядов Тейлора и некоторой дополнительной подалгебры Ли $\mathcal{U}$. Очевидно, что

- $\mathcal{U}$ не должна содержать рядов Тейлора;
- для любой главной части $P = \sum\limits_{i=-n}^{-1} g_i\lambda^i$, где $g_i \in \mathcal{G}$, в подалгебре $\mathcal{U}$ содержится (единственный) элемент вида $P + O(\lambda)$.

Стандартным примером факторизующей подалгебры являются многочлены вида

$$\mathcal{U}^{\mathrm{st}} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} g_i\lambda^{-i} \;\middle|\; g_i \in \mathcal{G},\ n \in \mathbb{N} \right\}. \tag{1.3}$$

Две факторизующие подалгебры естественно считать эквивалентными, если они связаны заменами параметра λ вида

$$\lambda \to \lambda + k_2\lambda^2 + k_3\lambda^3 + \ldots \tag{1.4}$$

и автоморфизмами вида

$$\exp\left(\mathrm{ad}_{g_1\lambda+g_2\lambda^2+\ldots}\right), \quad g_i \in \mathcal{G}, \tag{1.5}$$

сохраняющими алгебру рядов Тейлора.

На алгебре петель над полупростой алгеброй $\mathcal{G}$ определена инвариантная невырожденная форма

$$\langle X(\lambda), Y(\lambda)\rangle = \mathrm{res}\big(X(\lambda), Y(\lambda)\big), \quad X(\lambda), Y(\lambda) \in \mathcal{G}((\lambda)), \tag{1.6}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — невырожденная инвариантная форма на $\mathcal{G}$, $\mathrm{res}\, P$ означает коэффициент при λ^{-1} у (скалярного) ряда Лорана P. Инвариантность формы означает, что

$$\langle [a, b], c\rangle = -\langle b, [a, c]\rangle. \tag{1.7}$$

Легко видеть, что как $\mathcal{G}[[\lambda]]$, так и $\mathcal{U}^{\mathrm{st}}$ являются изотропными относительно формы (1.6).

Для описания гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений, связанных с факторизующей подалгеброй $\mathcal{U}$ [4], необходимо конструктивное описание ортогонального дополнения $\mathcal{U}^{\perp}$ относительно формы (1.6) к факторизующей подалгебре $\mathcal{U}$. В статье находятся коммутационные соотношения для $\mathcal{U}^{\perp}$ в случае $\mathrm{so}(4)$.

1.1. Факторизующие подалгебры для алгебр петель над $\mathrm{so}(4)$

Элементы из $\mathrm{so}(4)$ мы будем представлять себе как блочно-диагональные матрицы с двумя блоками, принадлежащими $\mathrm{so}(3)$. В качестве базиса в $\mathrm{so}(4)$ выберем

$$\mathbf{f}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{f}}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.8}$$

где через $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ обозначен стандартный базис в $\mathrm{so}(3)$:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что всякая факторизующая подалгебра $\mathcal{U}$ в $\mathrm{so}(4)((\lambda))$ содержит ряды вида

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1 &= \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} + O(\lambda), \\
\mathbf{E}_2 &= \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} \mathbf{e}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{a}} \end{pmatrix} + O(\lambda), \\
\mathbf{E}_3 &= \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} \mathbf{e}_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{b}} \end{pmatrix} + O(\lambda), \\
\bar{\mathbf{E}}_1 &= \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{c} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} + O(\lambda), \\
\bar{\mathbf{E}}_2 &= \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{a} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} + O(\lambda), \\
\bar{\mathbf{E}}_3 &= \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} + O(\lambda),
\end{aligned} \tag{1.9}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \sum a_i \mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{b} = \sum b_i \mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{c} = \sum c_i \mathbf{e}_i, \\
\bar{\mathbf{a}} &= \sum \bar{a}_i \mathbf{e}_i, \qquad \bar{\mathbf{b}} = \sum \bar{b}_i \mathbf{e}_i, \qquad \bar{\mathbf{c}} = \sum \bar{c}_i \mathbf{e}_i \,-
\end{aligned} \tag{1.10}$$

некоторые элементы $\mathrm{so}(3)$.

Следующее утверждение фактически доказано в [11].

Теорема 1.1. *Для всякой факторизующей подалгебры $\mathcal{U}$ имеют место соотношения вида*

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix}[\mathbf{E}_1,[\mathbf{E}_2,\mathbf{E}_3]\,]\\ [\mathbf{E}_2,[\mathbf{E}_3,\mathbf{E}_1]\,]\\ [\mathbf{E}_3,[\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2]\,]\end{pmatrix}=\mathbf{A}\begin{pmatrix}[\mathbf{E}_2,\mathbf{E}_3]\\ [\mathbf{E}_3,\mathbf{E}_1]\\ [\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2]\end{pmatrix}+\mathbf{B}\begin{pmatrix}\mathbf{E}_1\\ \mathbf{E}_2\\ \mathbf{E}_3\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}[\mathbf{E}_2,[\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2]\,]+[\mathbf{E}_3,[\mathbf{E}_3,\mathbf{E}_1]\,]\\ [\mathbf{E}_3,[\mathbf{E}_2,\mathbf{E}_3]\,]+[\mathbf{E}_1,[\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2]\,]\\ [\mathbf{E}_1,[\mathbf{E}_3,\mathbf{E}_1]\,]+[\mathbf{E}_2,[\mathbf{E}_2,\mathbf{E}_3]\,]\end{pmatrix}=\mathbf{C}\begin{pmatrix}[\mathbf{E}_2,\mathbf{E}_3]\\ [\mathbf{E}_3,\mathbf{E}_1]\\ [\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2]\end{pmatrix}+\mathbf{D}\begin{pmatrix}\mathbf{E}_1\\ \mathbf{E}_2\\ \mathbf{E}_3\end{pmatrix},\end{gathered}\tag{1.11}$$

где

$$\begin{gathered}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&-u&w\\ v&0&-w\\ -v&u&0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&-\alpha&\beta\\ \gamma&0&-\beta\\ -\gamma&\alpha&0\end{pmatrix},\\ \mathbf{C}=\begin{pmatrix}z&w&-u\\ -w&x&v\\ u&-v&y\end{pmatrix},\qquad \mathbf{D}=\begin{pmatrix}\delta&\beta&-\alpha\\ -\beta&\varepsilon&\gamma\\ \alpha&-\gamma&\tau\end{pmatrix}\end{gathered}\tag{1.12}$$

для некоторых чисел u, v, w, x, y, z, α, β, γ, δ, τ, ε, таких что $\operatorname{tr}\mathbf{C}=\operatorname{tr}\mathbf{D}=0$. *При этом существуют числа k_1, k_2, такие что*

$$k_1\mathbf{A}+k_2\mathbf{B}=0,\quad k_1\mathbf{C}+k_2\mathbf{D}=0.\tag{1.13}$$

Аналогичные коммутационные соотношения связывают образующие $\bar{\mathbf{E}}_1$, $\bar{\mathbf{E}}_2$, $\bar{\mathbf{E}}_3$.

Одним из результатов [7] является следующая теорема.

Теорема 1.2. *Для всякой факторизующей подалгебры $\mathcal{U}$ для* $\mathrm{so}(4)((\lambda))$ *имеют место коммутационные соотношения вида*

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix}[\mathbf{E}_1,\bar{\mathbf{E}}_1]\\ [\mathbf{E}_1,\bar{\mathbf{E}}_2]\\ [\mathbf{E}_1,\bar{\mathbf{E}}_3]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&c_3&-c_2\\ 0&a_3&-a_2\\ 0&b_3&-b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{E}_1\\ \mathbf{E}_2\\ \mathbf{E}_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-\bar{c}_3&\bar{c}_2\\ \bar{c}_3&0&-\bar{c}_1\\ -\bar{c}_2&\bar{c}_1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\bar{\mathbf{E}}_1\\ \bar{\mathbf{E}}_2\\ \bar{\mathbf{E}}_3\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}[\mathbf{E}_2,\bar{\mathbf{E}}_1]\\ [\mathbf{E}_2,\bar{\mathbf{E}}_2]\\ [\mathbf{E}_2,\bar{\mathbf{E}}_3]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c_3&0&c_1\\ -a_3&0&a_1\\ -b_3&0&b_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{E}_1\\ \mathbf{E}_2\\ \mathbf{E}_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-\bar{a}_3&\bar{a}_2\\ \bar{a}_3&0&-\bar{a}_1\\ -\bar{a}_2&\bar{a}_1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{E}}_1\\ \bar{\mathbf{E}}_2\\ \bar{\mathbf{E}}_3\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}[\mathbf{E}_3,\bar{\mathbf{E}}_1]\\ [\mathbf{E}_3,\bar{\mathbf{E}}_2]\\ [\mathbf{E}_3,\bar{\mathbf{E}}_3]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_2&-c_1&0\\ a_2&-a_1&0\\ b_2&-b_1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{E}_1\\ \mathbf{E}_2\\ \mathbf{E}_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-\bar{b}_3&\bar{b}_2\\ \bar{b}_3&0&-\bar{b}_1\\ -\bar{b}_2&\bar{b}_1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{E}}_1\\ \bar{\mathbf{E}}_2\\ \bar{\mathbf{E}}_3\end{pmatrix},\end{gathered}\tag{1.14}$$

где a_i, b_i, c_i, $\bar{a}_i$, $\bar{b}_i$, $\bar{c}_i$ — элементы матриц (1.10).

Постоянные в соотношениях (1.11)—(1.14) не являются произвольными. Ниже указывается система алгебраических соотношений между ними.

Во-первых, рассматривая члены при λ^0 в соотношениях (1.11) получаем, что

$$\begin{pmatrix}[\bar{\mathbf{c}},[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]]\\ [\bar{\mathbf{b}},[\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{a}}]]\\ [\bar{\mathbf{a}},[\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}]]\end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix}[\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}]\\ [\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{a}}]\\ [\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]\end{pmatrix} + \mathbf{B}\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{a}}\\ \bar{\mathbf{b}}\\ \bar{\mathbf{c}}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}[\bar{\mathbf{b}},[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]]+[\bar{\mathbf{c}},[\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{a}}]]\\ [\bar{\mathbf{c}},[\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}]]+[\bar{\mathbf{a}},[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]]\\ [\bar{\mathbf{a}},[\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{a}}]]+[\bar{\mathbf{b}},[\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}]]\end{pmatrix} = \mathbf{C}\begin{pmatrix}[\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}]\\ [\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{a}}]\\ [\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]\end{pmatrix} + \mathbf{D}\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{a}}\\ \bar{\mathbf{b}}\\ \bar{\mathbf{c}}\end{pmatrix}, \tag{1.15}$$

где матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ задаются формулами (1.12), а $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$ — формулами (1.10). Аналогичные соотношения связывают $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ с $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$, $\bar{\mathbf{C}}$, $\bar{\mathbf{D}}$.

Кроме этих алгебраических соотношений, имеются и другие. Положим

$$\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix}a_2\\ a_3\\ a_1\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix}b_2\\ b_3\\ b_1\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{n}_3 = \begin{pmatrix}c_2\\ c_3\\ c_1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{m}_1 = \begin{pmatrix}a_1\\ b_1\\ c_1\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{m}_2 = \begin{pmatrix}a_2\\ b_2\\ c_2\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{m}_3 = \begin{pmatrix}a_3\\ b_3\\ c_3\end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{n}}_1 = \begin{pmatrix}\bar{a}_2\\ \bar{a}_3\\ \bar{a}_1\end{pmatrix}, \qquad \bar{\mathbf{n}}_2 = \begin{pmatrix}\bar{b}_2\\ \bar{b}_3\\ \bar{b}_1\end{pmatrix}, \qquad \bar{\mathbf{n}}_3 = \begin{pmatrix}\bar{c}_2\\ \bar{c}_3\\ \bar{c}_1\end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{m}}_1 = \begin{pmatrix}\bar{a}_1\\ \bar{b}_1\\ \bar{c}_1\end{pmatrix}, \qquad \bar{\mathbf{m}}_2 = \begin{pmatrix}\bar{a}_2\\ \bar{b}_2\\ \bar{c}_2\end{pmatrix}, \qquad \bar{\mathbf{m}}_3 = \begin{pmatrix}\bar{a}_3\\ \bar{b}_3\\ \bar{c}_3\end{pmatrix}.$$

Теорема 1.3. *Для всякой факторизующей подалгебры* $\mathcal{U}$ *для* $\mathrm{so}(4)((\lambda))$ *между постоянными из формул* (1.11)—(1.14) *имеются следующие алгебраические соотношения*:

$$\begin{aligned}
v\mathbf{m}_1 - w\mathbf{m}_3 - \mathbf{m}_2\times\bar{\mathbf{n}}_1 &= 0,\\
u\mathbf{m}_2 - v\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_3\times\bar{\mathbf{n}}_2 &= 0,\\
w\mathbf{m}_3 - u\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1\times\bar{\mathbf{n}}_3 &= 0,\\
u\mathbf{m}_1 - v\mathbf{m}_2 + y\mathbf{m}_3 - \mathbf{m}_1\times\bar{\mathbf{n}}_1 - \mathbf{m}_2\times\bar{\mathbf{n}}_3 &= 0,\\
u\mathbf{m}_3 - w\mathbf{m}_2 - z\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_3\times\bar{\mathbf{n}}_1 + \mathbf{m}_2\times\bar{\mathbf{n}}_2 &= 0,\\
v\mathbf{m}_3 - w\mathbf{m}_1 + x\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1\times\bar{\mathbf{n}}_2 - \mathbf{m}_3\times\bar{\mathbf{n}}_3 &= 0,\\
\bar{v}\bar{\mathbf{m}}_1 - \bar{w}\bar{\mathbf{m}}_3 - \bar{\mathbf{m}}_2\times\mathbf{n}_1 &= 0,\\
\bar{u}\bar{\mathbf{m}}_2 - \bar{v}\bar{\mathbf{m}}_1 - \bar{\mathbf{m}}_3\times\mathbf{n}_2 &= 0,\\
\bar{w}\bar{\mathbf{m}}_3 - \bar{u}\bar{\mathbf{m}}_2 - \bar{\mathbf{m}}_1\times\mathbf{n}_3 &= 0,\\
\bar{u}\bar{\mathbf{m}}_1 - \bar{v}\bar{\mathbf{m}}_2 + \bar{y}\bar{\mathbf{m}}_3 - \bar{\mathbf{m}}_1\times\mathbf{n}_1 - \bar{\mathbf{m}}_2\times\mathbf{n}_3 &= 0,\\
\bar{u}\bar{\mathbf{m}}_3 - \bar{w}\bar{\mathbf{m}}_2 - \bar{z}\bar{\mathbf{m}}_1 + \bar{\mathbf{m}}_3\times\mathbf{n}_1 + \bar{\mathbf{m}}_2\times\mathbf{n}_2 &= 0,\\
\bar{v}\bar{\mathbf{m}}_3 - \bar{w}\bar{\mathbf{m}}_1 + \bar{x}\bar{\mathbf{m}}_2 - \bar{\mathbf{m}}_1\times\mathbf{n}_2 - \bar{\mathbf{m}}_3\times\mathbf{n}_3 &= 0.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Доказательство. Рассмотрим коммутационные соотношения (1.14). Будем вычитать из коммутаторов $[\mathbf{E}_i, \bar{\mathbf{E}}_j]$ соответствующие им линейные комбинации. Эти разности тождественно равны нулю. Посмотрим на коэффициент при λ^0. Это кососимметрические матрицы размера 6×6. Необходимым условием выполнения коммутационных соотношений является равенство нулю каждого элемента этих матриц. Из этих уравнений и состоит система (1.16). $\square$

По-видимому, соотношения (1.15), (1.16) являются не только необходимыми, но и достаточными для того, чтобы коммутационные соотношения (1.11)—(1.14) задавали факторизующую подалгебру.

1.2. Коммутационные соотношения для ортогонального дополнения к $\mathcal{U}$

Невырожденная билинейная форма $(\cdot,\cdot)$ на $\mathrm{so}(4)$ в ортогональном базисе (1.8) имеет вид

$$\Big(\sum x_i\mathbf{e}_i + \sum \bar{x}_i\bar{\mathbf{e}}_i,\ \sum y_i\mathbf{e}_i + \sum \bar{y}_i\bar{\mathbf{e}}_i\Big) = k\sum x_iy_i + \bar{k}\sum \bar{x}_i\bar{y}_i,$$

где k и $\bar{k}$ — такие произвольные постоянные, что $k\bar{k}\neq 0$. Соответствующая форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на алгебре петель задаётся формулой (1.6).

Обозначим через $\mathbf{Gr}$ матрицу Грамма

$$\mathbf{Gr} = \begin{pmatrix} \langle\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_1\rangle & \langle\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2\rangle & \langle\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_3\rangle & \langle\mathbf{E}_1,\bar{\mathbf{E}}_1\rangle & \langle\mathbf{E}_1,\bar{\mathbf{E}}_2\rangle & \langle\mathbf{E}_1,\bar{\mathbf{E}}_3\rangle \\ \langle\mathbf{E}_2,\mathbf{E}_1\rangle & \langle\mathbf{E}_2,\mathbf{E}_2\rangle & \langle\mathbf{E}_2,\mathbf{E}_3\rangle & \langle\mathbf{E}_2,\bar{\mathbf{E}}_1\rangle & \langle\mathbf{E}_2,\bar{\mathbf{E}}_2\rangle & \langle\mathbf{E}_2,\bar{\mathbf{E}}_3\rangle \\ \langle\mathbf{E}_3,\mathbf{E}_1\rangle & \langle\mathbf{E}_3,\mathbf{E}_2\rangle & \langle\mathbf{E}_3,\mathbf{E}_3\rangle & \langle\mathbf{E}_3,\bar{\mathbf{E}}_1\rangle & \langle\mathbf{E}_3,\bar{\mathbf{E}}_2\rangle & \langle\mathbf{E}_3,\bar{\mathbf{E}}_3\rangle \\ \langle\bar{\mathbf{E}}_1,\mathbf{E}_1\rangle & \langle\bar{\mathbf{E}}_1,\mathbf{E}_2\rangle & \langle\bar{\mathbf{E}}_1,\mathbf{E}_3\rangle & \langle\bar{\mathbf{E}}_1,\bar{\mathbf{E}}_1\rangle & \langle\bar{\mathbf{E}}_1,\bar{\mathbf{E}}_2\rangle & \langle\bar{\mathbf{E}}_1,\bar{\mathbf{E}}_3\rangle \\ \langle\bar{\mathbf{E}}_2,\mathbf{E}_1\rangle & \langle\bar{\mathbf{E}}_2,\mathbf{E}_2\rangle & \langle\bar{\mathbf{E}}_2,\mathbf{E}_3\rangle & \langle\bar{\mathbf{E}}_2,\bar{\mathbf{E}}_1\rangle & \langle\bar{\mathbf{E}}_2,\bar{\mathbf{E}}_2\rangle & \langle\bar{\mathbf{E}}_2,\bar{\mathbf{E}}_3\rangle \\ \langle\bar{\mathbf{E}}_3,\mathbf{E}_1\rangle & \langle\bar{\mathbf{E}}_3,\mathbf{E}_2\rangle & \langle\bar{\mathbf{E}}_3,\mathbf{E}_3\rangle & \langle\bar{\mathbf{E}}_3,\bar{\mathbf{E}}_1\rangle & \langle\bar{\mathbf{E}}_3,\bar{\mathbf{E}}_2\rangle & \langle\bar{\mathbf{E}}_3,\bar{\mathbf{E}}_3\rangle \end{pmatrix}. \tag{1.17}$$

Лемма. *Коэффициент матрицы Грамма* (1.17) *при* λ^{-1} *для всякой факторизующей подалгебры имеет вид*

$$\mathbf{Gr} = \begin{pmatrix} k\mathbf{J} & k\mathbf{G}+\bar{k}\bar{\mathbf{G}}^t \\ k\mathbf{G}^t+\bar{k}\bar{\mathbf{G}} & \bar{k}\bar{\mathbf{J}} \end{pmatrix}. \tag{1.18}$$

Здесь $\mathbf{J}$, $\bar{\mathbf{J}}$, $\mathbf{G}$, $\bar{\mathbf{G}}$ — *следующие матрицы размера* 3×3:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} s_1 & w & u \\ w & s_2 & v \\ u & v & s_3 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} \bar{s}_1 & \bar{w} & \bar{u} \\ \bar{w} & \bar{s}_2 & \bar{v} \\ \bar{u} & \bar{v} & \bar{s}_3 \end{pmatrix}, \tag{1.19}$$

где $s_1-s_3=x$, $s_2-s_1=y$, $s_3-s_2=z$, $\bar{s}_1-\bar{s}_3=\bar{x}$, $\bar{s}_2-\bar{s}_1=\bar{y}$, $\bar{s}_3-\bar{s}_2=\bar{z}$,

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} \bar{c}_1 & \bar{a}_1 & \bar{b}_1 \\ \bar{c}_2 & \bar{a}_2 & \bar{b}_2 \\ \bar{c}_3 & \bar{a}_3 & \bar{b}_3 \end{pmatrix}, \tag{1.20}$$

а $\mathbf{G}^t$, $\bar{\mathbf{G}}^t$ — *транспонированные матрицы.*

Доказательство. Прямое вычисление коэффициента даёт утверждение леммы. ☐

Рассмотрим ортогональное дополнение $\mathcal{U}^{\perp}$ относительно формы (1.6) к факторизующей подалгебре $\mathcal{U}$ на $\mathrm{so}(4)$. Из инвариантности (1.7) формы следует, что $\mathcal{U}^{\perp}$ является модулем над $\mathcal{U}$:

$$[\mathcal{U},\mathcal{U}^{\perp}] \subset \mathcal{U}^{\perp}.$$

Легко видеть, что $\mathcal{U}^{\perp}$ содержит ряды вида

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_1 &= \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * & 0\\ 0 & \bar{\mathbf{h}}\end{pmatrix} + O(\lambda),\\
\mathbf{R}_2 &= \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * & 0\\ 0 & \bar{\mathbf{d}}\end{pmatrix} + O(\lambda),\\
\mathbf{R}_3 &= \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_3 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * & 0\\ 0 & \bar{\mathbf{g}}\end{pmatrix} + O(\lambda),\\
\bar{\mathbf{R}}_1 &= \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathbf{e}_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{h} & 0\\ 0 & *\end{pmatrix} + O(\lambda),\\
\bar{\mathbf{R}}_2 &= \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{d} & 0\\ 0 & *\end{pmatrix} + O(\lambda),\\
\bar{\mathbf{R}}_3 &= \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathbf{e}_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{g} & 0\\ 0 & *\end{pmatrix} + O(\lambda),
\end{aligned} \tag{1.21}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{d} &= \sum d_i\mathbf{e}_i, & \mathbf{g} &= \sum g_i\mathbf{e}_i, & \mathbf{h} &= \sum h_i\mathbf{e}_i,\\
\bar{\mathbf{d}} &= \sum \bar{d}_i\mathbf{e}_i, & \bar{\mathbf{g}} &= \sum \bar{g}_i\mathbf{e}_i, & \bar{\mathbf{h}} &= \sum \bar{h}_i\mathbf{e}_i\ -
\end{aligned} \tag{1.22}$$

некоторые элементы $\mathrm{so}(3)$. Эти ряды порождают $\mathcal{U}^{\perp}$ как модуль над $\mathcal{U}$.

Теорема 1.4. *Для всякого ортогонального дополнения факторизующей подалгебры $\mathcal{U}$ имеют место коммутационные соотношения вида*

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}[\mathbf{E}_1,\bar{\mathbf{R}}_1]\\ [\mathbf{E}_1,\bar{\mathbf{R}}_2]\\ [\mathbf{E}_1,\bar{\mathbf{R}}_3]\end{pmatrix} &= \frac{\bar{k}}{k}\begin{pmatrix}0 & -\bar{b}_1 & \bar{a}_1\\ 0 & -\bar{b}_2 & \bar{a}_2\\ 0 & -\bar{b}_3 & \bar{a}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{R}_1\\ \mathbf{R}_2\\ \mathbf{R}_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -\bar{c}_3 & \bar{c}_2\\ \bar{c}_3 & 0 & -\bar{c}_1\\ -\bar{c}_2 & \bar{c}_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{R}}_1\\ \bar{\mathbf{R}}_2\\ \bar{\mathbf{R}}_3\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}[\mathbf{E}_2,\bar{\mathbf{R}}_1]\\ [\mathbf{E}_2,\bar{\mathbf{R}}_2]\\ [\mathbf{E}_2,\bar{\mathbf{R}}_3]\end{pmatrix} &= \frac{\bar{k}}{k}\begin{pmatrix}\bar{b}_1 & 0 & -\bar{c}_1\\ \bar{b}_2 & 0 & -\bar{c}_2\\ \bar{b}_3 & 0 & -\bar{c}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{R}_1\\ \mathbf{R}_2\\ \mathbf{R}_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -\bar{a}_3 & \bar{a}_2\\ \bar{a}_3 & 0 & -\bar{a}_1\\ -\bar{a}_2 & \bar{a}_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{R}}_1\\ \bar{\mathbf{R}}_2\\ \bar{\mathbf{R}}_3\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}[\mathbf{E}_3,\bar{\mathbf{R}}_1]\\ [\mathbf{E}_3,\bar{\mathbf{R}}_2]\\ [\mathbf{E}_3,\bar{\mathbf{R}}_3]\end{pmatrix} &= \frac{\bar{k}}{k}\begin{pmatrix}-\bar{a}_1 & \bar{c}_1 & 0\\ -\bar{a}_2 & \bar{c}_2 & 0\\ -\bar{a}_3 & \bar{c}_3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{R}_1\\ \mathbf{R}_2\\ \mathbf{R}_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -\bar{b}_3 & \bar{b}_2\\ \bar{b}_3 & 0 & -\bar{b}_1\\ -\bar{b}_2 & \bar{b}_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{R}}_1\\ \bar{\mathbf{R}}_2\\ \bar{\mathbf{R}}_3\end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{1.23}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}[\bar{\mathbf{E}}_1,\mathbf{R}_1]\\ [\bar{\mathbf{E}}_1,\mathbf{R}_2]\\ [\bar{\mathbf{E}}_1,\mathbf{R}_3]\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & -c_3 & c_2\\ c_3 & 0 & -c_1\\ -c_2 & c_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{R}_1\\ \mathbf{R}_2\\ \mathbf{R}_3\end{pmatrix} + \frac{k}{\bar{k}}\begin{pmatrix}0 & -b_1 & a_1\\ 0 & -b_2 & a_2\\ 0 & -b_3 & a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{R}}_1\\ \bar{\mathbf{R}}_2\\ \bar{\mathbf{R}}_3\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}[\bar{\mathbf{E}}_2,\mathbf{R}_1]\\ [\bar{\mathbf{E}}_2,\mathbf{R}_2]\\ [\bar{\mathbf{E}}_2,\mathbf{R}_3]\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{R}_1\\ \mathbf{R}_2\\ \mathbf{R}_3\end{pmatrix} + \frac{k}{\bar{k}}\begin{pmatrix}b_1 & 0 & -c_1\\ b_2 & 0 & -c_2\\ b_3 & 0 & -c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{R}}_1\\ \bar{\mathbf{R}}_2\\ \bar{\mathbf{R}}_3\end{pmatrix},\qquad (1.24)\\
\begin{pmatrix}[\bar{\mathbf{E}}_3,\mathbf{R}_1]\\ [\bar{\mathbf{E}}_3,\mathbf{R}_2]\\ [\bar{\mathbf{E}}_3,\mathbf{R}_3]\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & -b_3 & b_2\\ b_3 & 0 & -b_1\\ -b_2 & b_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{R}_1\\ \mathbf{R}_2\\ \mathbf{R}_3\end{pmatrix} + \frac{k}{\bar{k}}\begin{pmatrix}-a_1 & c_1 & 0\\ -a_2 & c_2 & 0\\ -a_3 & c_3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{R}}_1\\ \bar{\mathbf{R}}_2\\ \bar{\mathbf{R}}_3\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

где a_i, b_i, c_i, $\bar{a}_i$, $\bar{b}_i$, $\bar{c}_i$ — *элементы матриц* (1.10). *Также верны следующие соотношения*:

$$\begin{pmatrix}[\mathbf{E}_1,\mathbf{R}_1]\\ [\mathbf{E}_2,\mathbf{R}_2]\\ [\mathbf{E}_3,\mathbf{R}_3]\end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix}\mathbf{R}_1\\ \mathbf{R}_2\\ \mathbf{R}_3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}[\mathbf{E}_3,\mathbf{R}_2]+[\mathbf{E}_2,\mathbf{R}_3]\\ [\mathbf{E}_1,\mathbf{R}_3]+[\mathbf{E}_3,\mathbf{R}_1]\\ [\mathbf{E}_1,\mathbf{R}_2]+[\mathbf{E}_2,\mathbf{R}_1]\end{pmatrix} = \mathbf{C}\begin{pmatrix}\mathbf{R}_1\\ \mathbf{R}_2\\ \mathbf{R}_3\end{pmatrix}, \qquad (1.25)$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}[\mathbf{E}_1,[\mathbf{E}_2,\mathbf{R}_3]\,]\\ [\mathbf{E}_2,[\mathbf{E}_3,\mathbf{R}_1]\,]\\ [\mathbf{E}_3,[\mathbf{E}_1,\mathbf{R}_2]\,]\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & 0 & w\\ v & 0 & 0\\ 0 & u & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}[\mathbf{E}_2,\mathbf{R}_3]\\ [\mathbf{E}_3,\mathbf{R}_1]\\ [\mathbf{E}_1,\mathbf{R}_2]\end{pmatrix} +\\
&+ \begin{pmatrix}0 & -\alpha+vw & \beta-uv+wz\\ \gamma-uw+vx & 0 & -\beta+uv\\ -\gamma+uw & \alpha-vw+uy & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{R}_1\\ \mathbf{R}_2\\ \mathbf{R}_3\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}[\mathbf{E}_2,[\mathbf{E}_1,\mathbf{R}_2]\,]+[\mathbf{E}_3,[\mathbf{E}_3,\mathbf{R}_1]\,]\\ [\mathbf{E}_3,[\mathbf{E}_2,\mathbf{R}_3]\,]+[\mathbf{E}_1,[\mathbf{E}_1,\mathbf{R}_2]\,]\\ [\mathbf{E}_1,[\mathbf{E}_3,\mathbf{R}_1]\,]+[\mathbf{E}_2,[\mathbf{E}_2,\mathbf{R}_3]\,]\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-x & 0 & -u\\ -w & -y & 0\\ 0 & -v & -z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}[\mathbf{E}_2,\mathbf{R}_3]\\ [\mathbf{E}_3,\mathbf{R}_1]\\ [\mathbf{E}_1,\mathbf{R}_2]\end{pmatrix} + \qquad (1.26)\\
&+ \begin{pmatrix}\delta-v^2+w^2+xz & \beta-uv & -\alpha+vw-ux\\ -\beta+uv-yw & \varepsilon-u^2+v^2+xy & \gamma-uw\\ \alpha-vw & -\gamma+uw-vz & \tau+u^2-w^2+yz\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{R}_1\\ \mathbf{R}_2\\ \mathbf{R}_3\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

где $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ — *матрицы из* (1.12).

Соотношения, аналогичные (1.25), (1.26), *выполнены и для* $\bar{\mathbf{E}}_1$, $\bar{\mathbf{E}}_2$, $\bar{\mathbf{E}}_3$, $\bar{\mathbf{R}}_1$, $\bar{\mathbf{R}}_2$, $\bar{\mathbf{R}}_3$.

Доказательство. Во-первых, заметим, что ортогональное дополнение не содержит рядов Тейлора. Действительно, если предположить, что $P = p_0+p_1\lambda+\ldots$ является рядом Тейлора и принадлежит $\mathcal{U}^{\perp}$, то из условия $\langle \mathbf{E}_i, P\rangle$ будет следовать, что $(\mathbf{e}_i, p_0) = 0$. В силу невырожденности формы это означает, что $p_0 = 0$. Для того чтобы доказать, что $p_1 = 0$, рассмотрим $\langle [\mathbf{E}_i,\mathbf{E}_j], P\rangle$ и т. д. Таким образом, $P = 0$. Во-вторых, ясно, что $[\mathbf{E}_i, \bar{\mathbf{R}}_j]$ принадлежит $\mathcal{U}^{\perp}$ и не содержит члена с λ^{-2}. Следовательно, вычитая подходящую линейную комбинацию $\mathbf{R}_i$, $\bar{\mathbf{R}}_j$ получим ряд Тейлора. А так как $\mathcal{U}^{\perp}$ не содержит рядов Тейлора, то это 0. Теперь понятно, что для $i, j = 1,2,3$ должно иметь место разложение

$$[\mathbf{E}_i, \bar{\mathbf{R}}_j] = \sum_{k=1}^{3} (m_k \mathbf{R}_k + n_k \bar{\mathbf{R}}_k),$$

где m_k и n_k — некоторые константы. Подставляя вместо $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{R}_j$, $\bar{\mathbf{R}}_k$ соответствующие ряды (1.9), (1.21) в приведённое выше соотношение и приравнивая коэффициенты при λ^{-1} в обеих частях данного равенства, мы получаем явные формулы, которые задают m_i и n_i через коэффициенты разложения, введённые в формулах (1.10) и (1.12). Рассуждая аналогично, мы получаем все остальные тождества. □

2. Дифференциальные уравнения, обладающие представлением Лакса в so(4)

2.1. Представления Лакса для систем типа волчков

Всякая факторизующая подалгебра порождает бесконечное множество пар Лакса [4]. Дополнительные данные, задающие оператор L, — пара идеалов I_- и I_+ конечной коразмерности в $\mathcal{G}[[\lambda]]$ и $\mathcal{U}$. Рассмотрим подпространство в $\mathcal{G}((\lambda))$ вида

$$\mathcal{O} = I_-^{\perp} \cap I_+^{\perp}, \tag{2.1}$$

где $\perp$ означает ортогональное дополнение в $\mathcal{G}((\lambda))$ относительно формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Поскольку

$$I_-^{\perp} \cap I_+^{\perp} = (I_- + I_+)^{\perp},$$

то пространство $\mathcal{O}$ конечномерно и его размерность N равна сумме коразмерностей идеалов. Если $\mathbf{g}^1, \ldots, \mathbf{g}^N$ — базис в $\mathcal{O}$, то

$$L = \sum_{i=1}^{N} u_i \mathbf{g}^i,$$

где $u_i(t)$ — неизвестные функции в соответствующем нелинейном дифференциальном уравнении.

Наиболее стандартный выбор идеалов — это

$$I_+ = \mathcal{U}, \quad I_- = \lambda^n \mathcal{G}[[\lambda]].$$

Соответствующая орбита имеет вид

$$\mathcal{O}_n = \lambda^{-n} \mathcal{G}[[\lambda]] \cap \mathcal{U}^{\perp}.$$

В качестве оператора A выбирают

$$A = \pi(\lambda^r T, L^s),$$

где через π обозначается проектор на $\mathcal{U}$, соответствующий разложению (1.2), r, s — некоторые целые числа, такие что $\lambda^r L^s \in \mathcal{G}((\lambda))$, а T — такая матрица, которая коммутирует с любым элементом из алгебры $\mathcal{G}$. В последней формуле и далее подразумевается, что алгебра $\mathcal{G}$ вложена в алгебру матриц.

Теорема 2.1 ([4, 9]).

1. *Операторное соотношение*
$$L_t = [\pi(\lambda^r L^s), L] \tag{2.2}$$
эквивалентно динамической системе из N уравнений относительно неизвестных $u_1(t), \dots, u_N(t)$.
2. *Для любых r_1, r_2, s_1, s_2 потоки уравнений Лакса*
$$L_t = [\pi(\lambda^{r_1} L^{s_1}), L] \tag{2.3}$$
и
$$L_\tau = [\pi(\lambda^{r_2} L^{s_2}), L] \tag{2.4}$$
коммутируют между собой.
3. *Для любых p_1, p_2, q_1, q_2 выражение $\rho = \langle \lambda^{p_1} L^{q_1}, \lambda^{p_2} L^{q_2} \rangle$ является первым интегралом для уравнения Лакса.*

Уравнение Лакса является гамильтоновым относительно некоторой линейной скобки Пуассона. Определим алгебру Ли $\mathcal{H}$ формулой
$$\mathcal{H} = \mathcal{G}[[\lambda]]/I_- \oplus \bar{\mathcal{U}}/I_+,$$
где алгебра $\bar{\mathcal{U}}$ получается из $\mathcal{U}$ заменой скобки $[a, b]$ на $[b, a]$. Подчеркнём, что в этой формуле символ $\oplus$ означает прямую сумму алгебр Ли, а не векторных пространств, как это было в формуле (1.2).

Зададим невырожденную билинейную форму, спаривающую алгебру $\mathcal{H}$ и орбиту $\mathcal{O}$, формулой
$$\big((a_- + I_-, a_+ + I_+), L\big) = \langle a_+ + a_-, L \rangle. \tag{2.5}$$
Так как $\langle I_- \oplus I_+, \mathcal{O} \rangle = 0$, форма (2.5) корректно определена. Скобка Кириллова на $\mathcal{O}$ задаётся формулой
$$\{\varphi, \psi\}(L) = ([\operatorname{grad}_L \varphi, \operatorname{grad}_L \psi], L), \quad L \in \mathcal{O}, \quad \operatorname{grad}_L \varphi, \operatorname{grad}_L \psi \in \mathcal{H}. \tag{2.6}$$
Предположим, что базисы $\mathbf{g}^i$ и $\mathbf{e}_i$ в $\mathcal{O}$ и $\mathcal{H}$ сопряжены относительно формы (2.5),
$$[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] = c_{ij}^k \mathbf{e}_k$$
и $L = u_i \mathbf{g}^i$. Тогда, поскольку $\operatorname{grad} u_i = \mathbf{e}_i$, скобки Пуассона между координатными функциями задаются формулой
$$\{u_i, u_j\} = c_{ij}^k u_k. \tag{2.7}$$

Теорема 2.2 ([4, 9]).

1. *Функционалы вида*
$$H_{rs} = \langle \lambda^r L^s, 1 \rangle, \tag{2.8}$$
где $L \in \mathcal{O}$, находятся в инволюции относительно скобки (2.7).
2. *Уравнение Лакса*
$$L_t = [\pi(-s\lambda^r L^{s-1}), L] \tag{2.9}$$
на орбите $\mathcal{O}$ гамильтоново относительно скобки (2.7) *с гамильтонианом H_{rs}.*

2.2. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений типа волчков на $\mathrm{so}(4)$

Для того чтобы получить гамильтоновы волчки на $\mathrm{so}(4)$, выберем

$$I_+ = \mathcal{U}, \quad I_- = \lambda\,\mathrm{so}(4)[[\lambda]].$$

Тогда $\mathcal{H}$ изоморфна $\mathrm{so}(4)$, а сопряжённый базис на орбите $\mathcal{O}$ составляют $k^{-1}\mathbf{R}_i$, $\bar{k}^{-1}\bar{\mathbf{R}}_i$. Соответствующий оператор Лакса имеет вид

$$L = \sum_{i=1}^{3} k^{-1} u_i \mathbf{R}_i + \sum_{i=1}^{3} \bar{k}^{-1} v_i \bar{\mathbf{R}}_i. \tag{2.10}$$

Скобка Пуассона (2.7) имеет вид

$$\{u_i, u_j\} = \varepsilon_{ijk} u_k, \quad \{v_i, v_j\} = \varepsilon_{ijk} v_k, \quad \{u_i, v_j\} = 0,$$

где ε_{ijk} — полностью кососимметрический тензор.

Теорема 2.3. *Рассмотрим операторы Лакса* (2.10). *Пусть оператор A имеет следующую структуру*:

$$A = \sum_{i=1}^{3} p_i \mathbf{E}_i + \sum_{i=1}^{3} q_i \bar{\mathbf{E}}_i.$$

Тогда из уравнения Лакса $L_t = [A, L]$ следует, что

$$p_i = s u_i, \quad q_i = \bar{s} v_i,$$

где s и $\bar{s}$ — некоторые постоянные. При этом уравнение Лакса равносильно системе

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u} \times (s\mathbf{J}\mathbf{u} + \bar{s}\mathbf{G}\mathbf{v} + s\bar{\mathbf{G}}^t\mathbf{v}),$$
$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v} \times (\bar{s}\bar{\mathbf{J}}\mathbf{v} + s\bar{\mathbf{G}}\mathbf{u} + \bar{s}\mathbf{G}^t\mathbf{u}),$$

где матрицы $\mathbf{J}$, $\bar{\mathbf{J}}$, $\mathbf{G}$, $\bar{\mathbf{G}}$ задаются формулами (1.19), (1.20).

Доказательство. Подставим в общем виде операторы A, L (2.10) в уравнение Лакса (2). Найдём их коммутатор. Затем, пользуясь коммутационными соотношениями (1.23)—(1.25), заменим все двойные коммутаторы на их линейные комбинации. Понятно, что уравнение Лакса выполнено тогда и только тогда, когда коэффициенты при одинаковых элементах ортогонального дополнения в правой и левой частях равны. В частности, из равенства коэффициентов при $\mathbf{R}_i$ с одинаковыми индексами в правой и левой частях получаем систему дифференциальных уравнений. Коэффициенты же при оставшихся шести двойных коммутаторов дают возможность найти p_i, q_i. □

2.3. Уравнения Ландау—Лифшица на $\mathrm{so}(4)$

В случае уравнений в частных производных и L и A в формуле (3) принадлежат $\mathcal{U}$. Рассмотрим оператор L вида

$$L = u_1\mathbf{E}_1 + u_2\mathbf{E}_2 + u_3\mathbf{E}_3 + v_1\bar{\mathbf{E}}_1 + v_2\bar{\mathbf{E}}_2 + v_3\bar{\mathbf{E}}_3. \tag{2.11}$$

Пусть оператор A имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned}A = {} & P_1[\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3] + P_2[\mathbf{E}_3, \mathbf{E}_1] + P_3[\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2] + \\ & + Q_1[\bar{\mathbf{E}}_2, \bar{\mathbf{E}}_3] + Q_2[\bar{\mathbf{E}}_3, \bar{\mathbf{E}}_1] + Q_3[\bar{\mathbf{E}}_1, \bar{\mathbf{E}}_2] + \\ & + p_1\mathbf{E}_1 + p_2\mathbf{E}_2 + p_3\mathbf{E}_3 + q_1\bar{\mathbf{E}}_1 + q_2\bar{\mathbf{E}}_2 + q_3\bar{\mathbf{E}}_3,\end{aligned} \tag{2.12}$$

где $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$, $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ — некоторые дифференциальные многочлены от компонент вектора $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.

Известно (см., например, [2]), что в этом случае уравнение Лакса (3) допускает редукцию

$$\nu = (\mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad \mu = (\mathbf{v}, \mathbf{v}), \tag{2.13}$$

где μ и ν — произвольные положительные постоянные.

Теорема 2.4. *Из уравнения Лакса* (3) *вытекает, что*

$$\mathbf{P} = s\mathbf{u}, \quad \mathbf{Q} = \bar{s}\mathbf{v}, \tag{2.14}$$

где s и $\bar{s}$ — некоторые постоянные. При предположениях (2.13), (2.14) *уравнение Лакса* (3) *эквивалентно системе уравнений*

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_t &= \mathbf{p}_x + \mathbf{u} \times \mathbf{G}\mathbf{q} - \mathbf{p} \times \mathbf{G}\mathbf{v} + \bar{s}\mathbf{G}(\mathbf{v} \times \mathbf{G}^t\mathbf{u}) - s\bar{\mathbf{G}}^t(\mathbf{v} \times \mathbf{G}^t\mathbf{u}) + s\mathbf{u} \times \mathbf{R}\mathbf{u}, \\ \mathbf{v}_t &= \mathbf{q}_x + \mathbf{v} \times \bar{\mathbf{G}}\mathbf{p} - \mathbf{q} \times \bar{\mathbf{G}}\mathbf{u} + s\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{u} \times \bar{\mathbf{G}}^t\mathbf{v}) - \bar{s}\mathbf{G}^t(\mathbf{u} \times \bar{\mathbf{G}}^t\mathbf{v}) + \bar{s}\mathbf{v} \times \bar{\mathbf{R}}\mathbf{v},\end{aligned}$$

где

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_1 & -\beta & -\alpha \\ -\beta & r_2 & -\gamma \\ -\alpha & -\gamma & r_3 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \bar{r}_1 & -\bar{\beta} & -\bar{\alpha} \\ -\bar{\beta} & \bar{r}_2 & -\bar{\gamma} \\ -\bar{\alpha} & -\bar{\gamma} & \bar{r}_3 \end{pmatrix},$$

$r_2 - r_3 = \delta$, $r_3 - r_1 = \varepsilon$, $r_1 - r_2 = \tau$, $\bar{r}_2 - \bar{r}_3 = \bar{\delta}$, $\bar{r}_3 - \bar{r}_1 = \bar{\varepsilon}$, $\bar{r}_1 - \bar{r}_2 = \bar{\tau}$. *Здесь матрицы $\mathbf{J}$, $\bar{\mathbf{J}}$, $\mathbf{G}$ и $\bar{\mathbf{G}}$ задаются формулами* (1.19), (1.20), *а функции $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ задаются формулами*

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \frac{s}{\nu}\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{G}\mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{J}\mathbf{u} - \mathbf{u}_x) - \frac{s}{2\nu}(\mathbf{u}, \mathbf{J}\mathbf{u})\mathbf{u}, \\ \mathbf{q} &= \frac{\bar{s}}{\mu}\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \bar{\mathbf{G}}\mathbf{u} + \mathbf{v} \times \bar{\mathbf{J}}\mathbf{v} - \mathbf{v}_x) - \frac{\bar{s}}{2\mu}(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{J}}\mathbf{v})\mathbf{v}.\end{aligned}$$

Доказательство. Теорема доказывается аналогично теореме 2.3, но здесь используются коммутационные соотношения (1.11) и аналогичные им соотношения, связывающие образующие $\bar{\mathbf{E}}_1$, $\bar{\mathbf{E}}_2$, $\bar{\mathbf{E}}_3$. Из равенства нулю коэффициентов при тройных коммутаторах (тройные коммутаторы встречаются только в правой части уравнения) находим $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$. Коэффициенты при двойных коммутаторах позволяют вычислить $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$. Уравнения Ландау—Лифшица находятся из равенства коэффициентов при $\mathbf{E}_i$ с одинаковыми индексами в правой и левой частях уравнения Лакса. Для того чтобы записать уравнения Ландау—Лифшица в том виде, в котором они приведены в теореме, требуется учесть систему (1.16). □

2.4. Системы типа уравнения кирального поля на $\mathrm{so}(4)$

Напомним общую конструкцию из [3], устанавливающую связь между факторизующими подалгебрами и системами типа уравнения кирального поля.

Положим

$$L = \frac{d}{d\eta} + \sum_{i=1}^{3} u_i \mathbf{E}_i, \quad M = \frac{d}{d\xi} + \sum_{i=1}^{3} v_i \bar{\mathbf{E}}_i. \tag{2.15}$$

Теорема 2.5 (см. [3, 7]). *Соотношение* $[L, M] = 0$ *эквивалентно системе*

$$\mathbf{u}_\xi = \mathbf{G}\mathbf{v} \times \mathbf{u}, \quad \mathbf{v}_\eta = \bar{\mathbf{G}}\mathbf{u} \times \mathbf{v}, \tag{2.16}$$

где матрицы $\mathbf{G}$ *и* $\bar{\mathbf{G}}$ *задаются формулами* (1.20).

Литература

[1] Голод П. И. Гамильтоновы системы на орбитах аффинных групп Ли и нелинейные интегрируемые уравнения // Физика многочастичных систем. Т. 7. — Киев: Наукова Думка, 1985. — С. 30—39.

[2] Голубчик И. З., Соколов В. В. Обобщённые уравнения Гайзенберга на $\mathbb{Z}$-градуированных алгебрах Ли // Теор. и матем. физ. — 1999. — Т. 120, № 2. — С. 248—255.

[3] Голубчик И. З., Соколов В. В. Согласованные скобки Ли и интегрируемые уравнения типа модели главного кирального поля // Функцион. анализ и его прил. — 2002. — Т. 36, № 3. — С. 9—19.

[4] Голубчик И. З., Соколов В. В. Факторизация алгебры петель и интегрируемые уравнения типа волчков // Теор. и матем. физ. — 2004. — Т. 141, № 1. — С. 3—23.

[5] Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П. Интегрируемые системы // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. математики. Фундаментальные направления. Т. 4. — М.: ВИНИТИ, 1985. — С. 179—284.

[6] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Матвеев В. Б. Нелинейные уравнения типа Кортевега—де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия // Успехи мат. наук. — 1976. — Т. 31, № 1. — С. 107—136.

[7] Ефимовская О. В., Соколов В. В. Разложения алгебры петель над so(4) и интегрируемые модели типа уравнения кирального поля // Фундам. и прикл. мат. — 2004. — Т. 10, № 1. — С. 39—47.

[8] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: метод обратной задачи. — М.: Наука, 1980.

[9] Рейман А. Г., Семёнов-тян-Шанский М. А. Интегрируемые системы. Теоретико-групповой подход. — Ижевск: РХД, 2003.

[10] Семёнов-Тян-Шанский М. А. Что такое классическая r-матрица // Функцион. анализ и его прил. — 1983. — Т. 17, № 4. — С. 17—33.

[11] Соколов В. В. О разложениях алгебры петель над so(3) в сумму двух подалгебр // Докл. РАН. — 2004. — Т. 397, № 3. — С. 321—324.

[12] Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. — М.: Наука, 1986.

[13] Чередник И. В. Функциональные реализации базисных представлений факторизующих групп и алгебр Ли // Функцион. анализ и его прил. — 1985. — Т. 19, № 3. — С. 36—52.

[14] Golubchik I. Z., Sokolov V. V. Factorization of the loop algebras and compatible Lie brackets // J. Nonlinear Math. Phys. — 2005. — Vol. 12, no. 1. — P. 343—350.

[15] Lax P. D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Comm. Pure Appl. Math. — 1968. — Vol. 21, no. 5. — P. 467—490.