Аналог теоремы Маккензи для решёток топологий конечных алгебр

А. В. КАРТАШОВА
Волгоградский государственный
педагогический университет
e-mail: kvk@vspu.ru

УДК 512.567.5+512.579

Ключевые слова: решётка топологий алгебры, унарная алгебра.

Аннотация

В работе показано, что решётка топологий произвольной конечной алгебры изоморфна решётке топологий некоторой конечной алгебры с четырьмя унарными операциями. Кроме того, описано счётное множество решёток топологий конечных алгебр с двумя унарными операциями, ни одна из которых не изоморфна решётке топологий никакого унара (т. е. алгебры с одной унарной операцией).

Abstract

A. V. Kartashova, An analogue of McKenzie's theorem for topology lattices of finite algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 3, pp. 109—117.

In this paper, it is shown that the topology lattice of any finite algebra is isomorphic to the topology lattice of some finite algebra with four unary operations. Further, we present countably many unary algebras whose topology lattices are distributive and nonisomorphic to a topology lattice of any unar (a unar is an algebra with one unary operation).

Введение

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ — произвольная алгебра и σ — топология на множестве A. Тогда n-арная операция $F \in \Omega$ называется *непрерывной* относительно топологии σ, если для любых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ и произвольной окрестности U элемента $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ найдутся такие окрестности $U_1, U_2, \ldots, U_n$ элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ соответственно, что $F(U_1, U_2, \ldots, U_n) \subseteq U$.

Топология на множестве A, относительно которой каждая операция из Ω является непрерывной, называется *топологией на алгебре* $\mathfrak{A}$.

Множество всех топологий на алгебре $\mathfrak{A}$, упорядоченное по включению, является решёткой, которую будем обозначать через $\Im(\mathfrak{A})$.

Решётка конгруэнций алгебры $\mathfrak{A}$, как обычно, обозначается через $\operatorname{Con}\mathfrak{A}$.

Как известно, поставленная Гретцером в [1] проблема IV.36 — всякая ли конечная решётка представима как решётка конгруэнций конечной алгебры — остаётся открытой.

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 3, с. 109—117.

Согласно теореме Маккензи решётка конгруэнций конечной алгебры изоморфна решётке конгруэнций подходящей конечной алгебры с четырьмя унарными операциями (см., например, [5, теорема 5.3]). Неизвестно, можно ли в данной теореме уменьшить число унарных операций. Однако в [5, теорема 5.6] построена конечная алгебра с двумя унарными операциями, решётка конгруэнций которой не изоморфна решётке конгруэнций никакого унара (т. е. алгебры с одной унарной операцией).

В настоящей работе изучаются аналогичные вопросы для класса решёток топологий алгебр. Полученные результаты анонсированы в [2].

§ 1. Свойства топологий конечных алгебр

Пусть σ — топология на конечном множестве A. Тогда наименьшую по включению окрестность элемента $x \in A$ в топологическом пространстве (A, σ) будем обозначать через M_x^σ.

Непосредственно из определений вытекает следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ — произвольная конечная алгебра и σ — топология на множестве A. Тогда n-арная операция $F \in \Omega$ непрерывна относительно топологии σ в том и только в том случае, если*

$$F(M_{a_1}^\sigma, M_{a_2}^\sigma, \ldots, M_{a_n}^\sigma) \subseteq M_{F(a_1, a_2, \ldots, a_n)}^\sigma$$

для любых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$. □

Напомним теперь, что если $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ — произвольная алгебра, $F \in \Omega$ — n-арная операция, $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in A$ и $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то унарная операция $F^i_{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}} \colon A \to A$, заданная по правилу

$$F^i_{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}}(x) = F(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_{n-1}) \text{ для любого } x \in A,$$

называется *элементарной трансляцией* алгебры $\mathfrak{A}$ [3].

Известно, что всякая эквивалентность θ на множестве A является конгруэнцией алгебры $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда θ стабильна относительно каждой элементарной трансляции этой алгебры (см., например, [3, предложение 6.1]).

Если $\mathfrak{A}$ — конечная алгебра, то аналогичное утверждение имеет место и для топологий на ней.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ — произвольная конечная алгебра и σ — топология на множестве A. Тогда σ является топологией на алгебре $\mathfrak{A}$ в том и только в том случае, когда все элементарные трансляции этой алгебры непрерывны относительно σ.*

Доказательство. Непосредственно из определений вытекает, что каждая элементарная трансляция произвольной алгебры непрерывна относительно любой топологии на этой алгебре.

Предположим теперь, что каждая элементарная трансляция алгебры $\mathfrak{A}$ непрерывна относительно σ, $F \in \Omega$ — n-арная операция, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ и $b = F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Покажем, что

$$F(M^\sigma_{a_1}, M^\sigma_{a_2}, \ldots, M^\sigma_{a_n}) \subseteq M^\sigma_b, \tag{1}$$

где $M^\sigma_{a_1}, M^\sigma_{a_2}, \ldots, M^\sigma_{a_n}, M^\sigma_b$ — наименьшие по включению окрестности элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ соответственно.

Действительно, пусть $x_1 \in M^\sigma_{a_1},\ x_2 \in M^\sigma_{a_2}, \ldots,\ x_n \in M^\sigma_{a_n}$. В силу леммы 1 справедливо включение

$$F^1_{a_2,\ldots,a_{n-1}}(M^\sigma_{a_1}) \subseteq M^\sigma_b,$$

поскольку $b = F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = F^1_{a_2,\ldots,a_{n-1}}(a_1)$ и элементарная трансляция $F^1_{a_2,\ldots,a_{n-1}}$ непрерывна относительно σ. Это означает, что $F(x_1, a_2, \ldots, a_n) \in M^\sigma_b$, так как $x_1 \in M^\sigma_{a_1}$. Поэтому

$$M^\sigma_{F(x_1,a_2,\ldots,a_n)} \subseteq M^\sigma_b. \tag{2}$$

Применяя к равенству $F(x_1, a_2, \ldots, a_n) = F^2_{x_1,a_3,\ldots,a_n}(a_2)$ рассуждения, аналогичные приведённым выше, имеем

$$F(x_1, x_2, a_3, \ldots, a_n) \in M^\sigma_{F(x_1,a_2,a_3,\ldots,a_n)}$$

и, значит, $M^\sigma_{F(x_1,x_2,a_3,\ldots,a_n)} \subseteq M^\sigma_b$ в силу (2).

Продолжая этот процесс, через n шагов получим

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M^\sigma_b,$$

т. е. справедливо включение (1). Таким образом, $\sigma \in \Im(\mathfrak{A})$ согласно лемме 1. □

Из теоремы 1 непосредственно вытекает следствие.

Следствие. *Решётка топологий произвольной конечной алгебры изоморфна решётке топологий некоторой унарной алгебры с тем же носителем.* □

Заметим, что условие конечности алгебры в теореме 1 существенно.

Пример. Пусть Ω — произвольная функциональная сигнатура, содержащая хотя бы один символ арности больше 1.

Для каждого символа $F \in \Omega$ арности n зададим операцию на множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел по правилу

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} x_1 + x_2, & \text{если } n \geqslant 2, \\ x_1, & \text{если } n = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Рассмотрим топологию σ на множестве $\mathbb{Z}$, в которой замкнутыми множествами являются множество $\mathbb{Z}$ и все его конечные подмножества.

Непосредственная проверка показывает, что каждая элементарная трансляция алгебры $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}, \Omega \rangle$ непрерывна относительно σ.

Убедимся, что $\sigma \notin \Im(\mathfrak{A})$. Для этого зафиксируем произвольную операцию G алгебры $\mathfrak{A}$ арности $n > 1$. Из (3) вытекает, что

$$G(0, 1, \ldots, n-1) = 0 + 1 = 1.$$

Если теперь предположить, что $\sigma \in \Im(\mathfrak{A})$, то найдутся такие окрестности $U_0, U_1, \ldots, U_{n-1}$ элементов $0, 1, \ldots, n-1$ соответственно в топологическом пространстве $(\mathbb{Z}, \sigma)$, что

$$G(U_0, U_1, \ldots, U_{n-1}) \subseteq \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Поэтому согласно (3) при любом $z \in \mathbb{Z}$ справедлива импликация

$$z \in U_0 \implies -z \notin U_1. \tag{4}$$

С другой стороны, множество U_0 бесконечно, поскольку U_0 — окрестность элемента 0 в $(\mathbb{Z}, \sigma)$. Следовательно, ввиду (4) множество $\mathbb{Z} \setminus U_1$ также бесконечно, что противоречит определению σ. Таким образом, $\sigma \notin \Im(\mathfrak{A})$.

§ 2. Аналог теоремы Маккензи

В этом параграфе используются конструкции и методы, изложенные при доказательстве известной теоремы Маккензи (см. [5, теорема 5.3]). Для решёток топологий конечных алгебр справедлив следующий аналог этой теоремы.

Теорема 2. *Для любой конечной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ существует конечная унарная алгебра $\mathfrak{B} = \langle B, \Omega' \rangle$ с четырьмя операциями, такая что $\Im(\mathfrak{A}) \cong \Im(\mathfrak{B})$.*

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно рассмотреть случай, когда алгебра $\mathfrak{A}$ унарная.

Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $\Omega = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ и $\mathfrak{B} = \langle B, g_1, g_2, g_3, g_4 \rangle$ — алгебра, построенная Маккензи [5, теорема 5.3]. Тогда $B = A^{m+n+1}$ и

$$\begin{aligned}
g_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n+1}) &= (a_1, a_2, \ldots, a_n, f_1(x_1), f_2(x_1), \ldots, f_m(x_1), x_1),\\
g_2(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n+1}) &= (x_2, x_2, x_3, \ldots, x_{m+n+1}),\\
g_3(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n+1}) &= (x_{m+n+1}, x_1, x_2, \ldots, x_{m+n}),\\
g_4(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n+1}) &= (x_2, x_1, x_3, x_4, \ldots, x_{m+n+1})
\end{aligned}$$

при любом $(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n+1}) \in B$.

Пусть теперь σ — произвольная топология на алгебре $\mathfrak{A}$. Для каждого элемента $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{m+n+1}) \in B$ положим

$$H(x) = \{(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{m+n+1}) \mid x'_i \in M^{\sigma}_{x_i} \text{ при всех } 1 \leqslant i \leqslant m+n+1\}, \tag{5}$$

где $M^{\sigma}_{x_i}$, $1 \leqslant i \leqslant m+n+1$, — наименьшая по включению окрестность x_i в (A, σ).

Убедимся, что совокупность подмножеств $\{H(x)\}_{x \in B}$ множества B образует базу некоторой топологии на этом множестве.

Действительно, если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{m+n+1})$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{m+n+1})$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{m+n+1})$, $x, y, z \in B$ и $z \in H(x) \cap H(y)$, то $z_i \in M^{\sigma}_{x_i} \cap M^{\sigma}_{y_i}$ при всех $1 \leqslant i \leqslant m+n+1$ ввиду (5), откуда

$$M^{\sigma}_{z_i} \subseteq M^{\sigma}_{x_i} \cap M^{\sigma}_{y_i},$$

так как $M^\sigma_{z_i}$ — наименьшая по включению окрестность элемента z_i в топологическом пространстве (A, σ).

Если теперь $b = (b_1, b_2, \ldots, b_{m+n+1}) \in H(z)$, то, снова используя (5), получаем

$$b_i \in M^\sigma_{z_i} \subseteq M^\sigma_{x_i} \cap M^\sigma_{y_i}$$

при любом $1 \leqslant i \leqslant m + n + 1$. Поэтому $b \in H(x) \cap H(y)$.

Таким образом, справедлива импликация

$$z \in H(x) \cap H(y) \implies H(z) \subseteq H(x) \cap H(y).$$

Кроме того, $B = \bigcup\limits_{x \in B} H(x)$. Следовательно, совокупность $\{H(x)\}_{x \in B}$ — база некоторой топологии на множестве B. Обозначим эту топологию через $\varphi(\sigma)$. Из (5) непосредственно следует, что $M^{\varphi(\sigma)}_x = H(x)$ при всех $x \in B$.

Покажем, что $\varphi(\sigma) \in \Im(\mathfrak{B})$. Согласно лемме 1 для этого достаточно проверить, что

$$g_j(M^{\varphi(\sigma)}_x) \subseteq M^{\varphi(\sigma)}_{g_j(x)} \tag{6}$$

при любых $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{m+n+1}) \in B$ и $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

При $j \geqslant 2$ включение (6) вытекает из (5) и определений операций алгебры $\mathfrak{B}$.

Рассмотрим случай $j = 1$. Пусть $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{m+n+1}) \in M^{\varphi(\sigma)}_x$. Тогда $y_1 \in M^\sigma_{x_1}$ ввиду (5), откуда

$$f_i(y_1) \in M^\sigma_{f_i(x_1)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m + n + 1,$$

в силу леммы 1. Поэтому

$$g_1(y) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, f_1(y_1), f_2(y_1), \ldots, f_m(y_1), y_1) \in M^{\varphi(\sigma)}_{g_1(x)}.$$

Таким образом, соответствие $\sigma \mapsto \varphi(\sigma)$ отображает $\Im(\mathfrak{A})$ в $\Im(\mathfrak{B})$.

Из равенства (5) имеем

$$\sigma_1 \subseteq \sigma_2 \iff \varphi(\sigma_1) \subseteq \varphi(\sigma_2)$$

для любых двух топологий $\sigma_1, \sigma_2 \in \Im(\mathfrak{A})$.

Осталось показать, что отображение $\varphi\colon \Im(\mathfrak{A}) \to \Im(\mathfrak{B})$ сюръективно.

Пусть $\tau \in \Im(\mathfrak{B})$ и $a \in A$. Положим

$$K(a) = \{a' \in A \mid (a', a', \ldots, a') \in M^\tau_{(a,a,\ldots,a)}\}, \tag{7}$$

где $M^\tau_{(a,a,\ldots,a)}$ — наименьшая по включению окрестность точки $(a, \ldots, a)$ в топологическом пространстве (B, τ). Непосредственная проверка показывает, что совокупность подмножеств $\{K(a)\}_{a \in A}$ множества A образует базу некоторой топологии σ на A и $K(a) = M^\sigma_a$ при всех $a \in A$.

Убедимся, что $\sigma \in \Im(\mathfrak{A})$. Для этого проверим, что для любого элемента $a \in A$ справедливо включение

$$f_i(M^\sigma_a) \subseteq M^\sigma_{f_i(a)},$$

где $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Действительно, если $x = f_i(y)$, где $y \in M_a^\sigma$, то $(y, y, \ldots, y) \in M^\tau_{(a,a,\ldots,a)}$ ввиду (7).

Как показано в [5, теорема 5.3], найдутся термы u_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, сигнатуры алгебры $\mathfrak{B}$, такие что

$$(f_i(z), f_i(z), \ldots, f_i(z)) = u_i(z, z, \ldots, z)$$

при всех $z \in A$. Поэтому

$$(x, x, \ldots, x) = u_i(y, y, \ldots, y) \in M^\tau_{u_i(a,a,\ldots,a)} = M^\tau_{(f_i(a), f_i(a), \ldots, f_i(a))},$$

откуда $x \in M^\sigma_{f_i(a)}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, согласно (7). Таким образом, $\sigma \in \Im(\mathfrak{A})$ по лемме 1.

Проверим теперь, что $\varphi(\sigma) = \tau$, т. е. $M_x^\tau = M_x^{\varphi(\sigma)}$ для любого элемента $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{m+n+1}) \in B$.

Пусть $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{m+n+1}) \in M_x^\tau$. Тогда согласно [5, теорема 5.3] для любого номера $i \in \{1, 2, \ldots, m+n+1\}$ найдётся терм v_i, такой что $(x_i, x_i, \ldots, x_i) = v_i(x)$ и $(y_i, y_i, \ldots, y_i) = v_i(y)$. Отсюда вытекает, что

$$(y_i, y_i, \ldots, y_i) \in M^\tau_{(x_i,\ldots,x_i)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m+n+1,$$

поскольку $\tau \in \Im(\mathfrak{B})$. Следовательно, $y_i \in M^\sigma_{x_i}$, где $1 \leqslant i \leqslant m+n+1$, в силу (7) и, значит, $y \in M_x^{\varphi(\sigma)}$ согласно (5).

Обратно, пусть $y \in M_x^{\varphi(\sigma)}$. Тогда из (7) и (5) получаем

$$(y_i, y_i, \ldots, y_i) \in M^\tau_{(x_i,\ldots,x_i)} \tag{8}$$

при всех $i \in \{1, 2, \ldots, m+n+1\}$.

По [5, теорема 5.3] существуют термы w_i, $1 \leqslant i \leqslant m+n+1$, такие что $w_i(z_i, z_i, \ldots, z_i) = (y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, z_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{m+n+1})$ для каждого элемента $z_i \in A$. Отсюда, используя (8) и лемму 1, имеем

$$y \in M^\tau_{(y_1,y_2,\ldots,y_{m+n},x_{m+n+1})} \subseteq \\ \subseteq M^\tau_{(y_1,\ldots,y_{m+n-1},x_{m+n},x_{m+n+1})} \subseteq \ldots \subseteq M^\tau_{(x_1,x_2,\ldots,x_{m+n+1})}.$$

Следовательно, $y \in M_x^\tau$.

Таким образом, отображение $\varphi\colon \Im(\mathfrak{A}) \to \Im(\mathfrak{B})$ является изоморфизмом решёток. □

§ 3. О решётках топологий унарных алгебр с двумя операциями

В дальнейшем $\mathbb{N}$ означает множество целых положительных чисел.

Для каждого элемента a унара $\mathfrak{A} = \langle A, f\rangle$ через $f^n(a)$ обозначается результат n-кратного применения операции f к элементу a, при этом считается, что $f^0(a) = a$.

Однопорождённый унар с порождающим элементом a, операцией f и определяющим соотношением $f^n(a) = f^{n+m}(a)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$, будем обозначать через C_m^n.

Теорема 3. *Для любого целого положительного числа m существует алгебра $\mathfrak{A}$ порядка $2^m + 1$ с двумя унарными операциями, такая что решётка $\Im(\mathfrak{A})$ топологий этой алгебры дистрибутивна, состоит из $4m + 1$ элементов и не изоморфна решётке топологий никакого унара.*

Доказательство. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Зададим операции f и g на множестве $A = \{0, 1, \ldots, 2^m\}$ по следующим правилам:

$$f(k) = \begin{cases} k+1, & \text{если } k < 2^m, \\ 1, & \text{если } k = 2^m, \end{cases} \tag{9}$$

и

$$g(k) = \begin{cases} f(k), & \text{если } k > 0, \\ 2^{m-1} + 1, & \text{если } k = 0, \end{cases} \tag{10}$$

для всех чисел $k \in A$.

Каждый из унаров $\langle A, f \rangle$ и $\langle A, g \rangle$ изоморфен унару $C_{2^m}^1$. Из определений вытекает, что решётка $\Im(\mathfrak{A})$ топологий алгебры $\mathfrak{A} = \langle A, f, g \rangle$ является подрешёткой решётки топологий унара $\langle A, f \rangle$. Поэтому в силу [6, следствие из леммы 13] решётка $\Im(\mathfrak{A})$ дистрибутивна.

Проверим, что $|\Im(\mathfrak{A})| = 4m + 1$. Заметим сначала, что элементы множества $B = \{1, 2, \ldots, 2^m\}$ образуют подунар $\mathfrak{B}$ унара $\langle A, f \rangle$, причём $\mathfrak{B} \cong C_{2^m}^0$.

Пусть теперь σ является топологией на унаре $\langle A, f \rangle$. Обозначим через σ_B топологию, индуцированную топологией σ на множестве B. Тогда σ_B является топологией на унаре $\mathfrak{B}$ в силу [6, с. 1096]. Определим бинарное отношение $s(\sigma)$ на множестве B следующим образом. Пусть $x, y \in B$. Тогда $(x, y) \in s(\sigma)$, если для любого множества $X \in \sigma_B$ справедлива эквиваленция

$$x \in X \iff y \in X. \tag{11}$$

В [6, с. 1087] показано, что $s(\sigma) \in \operatorname{Con} \mathfrak{B}$.

Лемма 2. *Пусть σ — произвольная топология на унаре $\langle A, f \rangle$. Тогда справедливы импликации*

$$s(\sigma) \neq 0_{\operatorname{Con} \mathfrak{B}} \implies \sigma \in \Im(\mathfrak{A})$$

и

$$s(\sigma) = 0_{\operatorname{Con} \mathfrak{B}} \;\&\; \sigma \in \Im(\mathfrak{A}) \implies \sigma = 1_{\Im(\mathfrak{A})}.$$

Доказательство. Предположим, что $s(\sigma) \neq 0_{\operatorname{Con} \mathfrak{B}}$. В силу [4, лемма 2] решётка конгруэнций унара $\mathfrak{B}$ является цепью и $(1, 2^{m-1} + 1) \in \theta$ для любой конгруэнции θ, отличной от $0_{\operatorname{Con} \mathfrak{B}}$. Поэтому

$$(1, 2^{m-1} + 1) \in s(\sigma). \tag{12}$$

Покажем, что

$$g^{-1}(X) = f^{-1}(X) \tag{13}$$

для любого множества $X \in \sigma$.

Пусть $X \in \sigma$ и $k \in g^{-1}(X)$. Тогда $g(k) \in X$. Если при этом $k \neq 0$, то $f(k) = g(k)$ ввиду определения (10), откуда $k \in f^{-1}(X)$. Если $k = 0$, то $f(k) = 1$ и $g(k) = 2^{m-1} + 1$ в силу определений (9) и (10). Отсюда, используя (11) и (12), получаем, что $f(k) \in X$, т. е. $k \in f^{-1}(X)$. Следовательно,

$$g^{-1}(X) \subseteq f^{-1}(X).$$

Симметричными рассуждениями убеждаемся, что

$$f^{-1}(X) \subseteq g^{-1}(X).$$

Итак, равенство (13) справедливо при любом $X \in \sigma$.

Поскольку операция f непрерывна относительно топологии σ, то согласно (13) относительно этой топологии непрерывна и операция g. Это означает, что справедлива первая из доказываемых импликаций.

Пусть теперь $\sigma \in \Im(\mathfrak{A})$ и $s(\sigma) = 0_{\mathrm{Con}\,\mathfrak{B}}$. Тогда в силу [6, следствие из леммы 12] получаем, что $\{k\} \in \sigma$ при любом $k \in A \backslash \{0\}$ и $\{2^m, 0\} \in \sigma$, $\{2^{m-1}, 0\} \in \sigma$, откуда $\{0\} \in \sigma$. Таким образом, σ — дискретная топология на $\mathfrak{A}$. $\square$

В [6, лемма 13] построен изоморфизм решёток

$$\varphi\colon \widetilde{\mathrm{Con}\,\mathfrak{B}} \times L \times L \to \Im(\langle A, f\rangle),$$

где $\widetilde{\mathrm{Con}\,\mathfrak{B}}$ — решётка, двойственная к решётке конгруэнций унара $\mathfrak{B}$ и $L = \langle \{0, 1\}, \leqslant \rangle$ — двухэлементная цепь. При этом отображение s, определённое по правилу (11), удовлетворяет условию $s(\varphi(\theta, l, r)) = \theta$ для любых $\theta \in \mathrm{Con}\,\mathfrak{B}$ и $l, r \in L$. Отсюда по [4, лемма 2] вытекает, что мощность решётки $\Im(\langle A, f\rangle)$ топологий унара $\langle A, f\rangle$ равна $4m + 4$. Все топологии σ, для которых $s(\sigma) \neq 0_{\mathrm{Con}\,\mathfrak{B}}$ являются топологиями на алгебре $\mathfrak{A}$ согласно лемме 2.

Условие $s(\sigma) = 0_{\mathrm{Con}\,\mathfrak{B}}$ выполняется для четырёх топологий: $\varphi(0_{\mathrm{Con}\,\mathfrak{B}}, 0, 0)$, $\varphi(0_{\mathrm{Con}\,\mathfrak{B}}, 0, 1)$, $\varphi(0_{\mathrm{Con}\,\mathfrak{B}}, 1, 0)$ и $\varphi(0_{\mathrm{Con}\,\mathfrak{B}}, 1, 1) = 1_{\Im(\mathfrak{A})}$. Первые три из них не являются топологиями на алгебре $\mathfrak{A}$ в силу леммы 2. Следовательно, $|\Im(\mathfrak{A})| = 4m + 1$.

Далее, из леммы 2 в силу [6, лемма 13] получаем, что решётка $\Im(\mathfrak{A})$ топологий алгебры $\mathfrak{A}$ содержит три атома: $\varphi(1_{\mathrm{Con}\,\mathfrak{B}}, 0, 1)$, $\varphi(1_{\mathrm{Con}\,\mathfrak{B}}, 1, 0)$ и $\varphi(\theta_0, 0, 0)$, где θ_0 — атом решётки $\widetilde{\mathrm{Con}\,\mathfrak{B}}$. В то же время решётка $\Im(\mathfrak{A})$ содержит только один коатом — $\varphi(\theta_1, 1, 1)$, где θ_1 — коатом решётки $\widetilde{\mathrm{Con}\,\mathfrak{B}}$. Это означает, что решётка $\Im(\mathfrak{A})$ не является самодуальной.

С другой стороны, по [6, теорема 8] каждая модулярная решётка топологий унара самодуальна. Следовательно, решётка $\Im(\mathfrak{A})$ топологий алгебры $\mathfrak{A} = \langle A, f, g\rangle$ не изоморфна решётке топологий никакого унара. $\square$

Литература

[1] Гретцер Г. Общая теория решёток. — М.: Мир, 1982.

[2] Карташова А. В. Аналог теоремы Маккензи для решёток топологий унарных алгебр // Международная алгебраическая конференция, посвящённая 250-летию Московского университета. Тезисы докладов. — М., 2004. — С. 65—66.

[3] Кон П. Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968.

[4] Berman J. On the congruence lattices of unary algebras // Proc. Amer. Math. Soc. — 1972. — Vol. 36, no. 1. — P. 34—38.

[5] Johnsson J., Seifert R. L. A survey of multi-unary algebra, Mimeographed seminar notes. — U. C. Berkeley, 1967.

[6] Kartashova A. V. On lattices of topologies of unary algebras // J. Math. Sci. — 2003. — Vol. 114, no. 2. — P. 1086—1118.