Об одном вопросе из «Коуровской тетради»*

С. В. ЛАРИН
Красноярский государственный
педагогический университет им. В. П. Астафьева
e-mail: larin_serg@mail.ru

УДК 512.544

Ключевые слова: группа, совпадающая со своим коммутантом, конечно порождённая группа, группа, порождённая конечным множеством классов сопряжённых элементов, условие минимальности для нормальных подгрупп.

Аннотация

В статье доказано, что если группа G, совпадающая со своим коммутантом и порождённая конечным множеством классов сопряжённых элементов, содержит минимальную собственную нормальную подгруппу A, такую что фактор-группа G/A совпадает с нормальным замыканием одного элемента, то группа G совпадает с нормальным замыканием одного элемента. Отсюда вытекает положительный ответ на вопрос 5.52 из «Коуровской тетради» для групп с условием минимальности для нормальных подгрупп. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых группа, совпадающая со своим коммутантом и порождённая конечным множеством классов сопряжённых элементов, не совпадает с нормальным замыканием одного элемента.

Abstract

S. V. Larin, On a problem from the Kourovka Notebook, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 3, pp. 119—125.

In this article, it is proved that if a group G coincides with its commutator subgroup, is generated by a finite set of classes of conjugate elements, and contains a proper minimal normal subgroup A such that the factor group G/A coincides with the normal closure of one element, then G coincides with the normal closure of an element. From this a positive answer to question 5.52 from the Kourovka Notebook for the group with the condition of minimality on normal subgroups follows. We have found a necessary and sufficient condition for a group coinciding with its commutator subgroup and generated by a finite set of classes of conjugate elements not to coincide with the normal closure of any element.

В 1976 г. Дж. Уайголд (J. Wiegold) в «Коуровской тетради» [2] поставил следующий вопрос.

Вопрос 5.52. Нетрудно показать, что конечная группа, совпадающая со своим коммутантом, является нормальным замыканием одного элемента. Верно ли то же самое для бесконечных конечно порождённых групп?

*Работа поддержана РФФИ (грант 03-01-00356).

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 3, с. 119—125.

Доказанная ниже теорема 1 даёт положительный ответ на этот вопрос для широкого класса групп, совпадающих со своим коммутантом и порождённых конечным множеством классов сопряжённых элементов. В частности, ответ оказывается положительным для групп с условием минимальности для нормальных подгрупп (следствие 1). Теорема 2 описывает группы, для которых ответ отрицателен. Вместе с тем вопрос существования таких групп, к сожалению, остаётся открытым.

Единицу группы будем обозначать буквой e, а коммутант группы G через G'.

Лемма 1. *Если группа G совпадает со своим коммутантом, $G = AB$, подгруппы A и B поэлементно перестановочны, причём $A = \langle a^A \rangle$, $B = \langle b^B \rangle$ для некоторых $a \in A$, $b \in B$, то $G = \langle (ab)^G \rangle$.*

Доказательство. Коммутант A' порождается коммутаторами вида $[x, a^y]$, где $x, y \in A$. В то же время, используя поэлементную перестановочность подгрупп A и B, получаем

$$[x, a^y] = [x, (ab)^y] = (b^{-1}a^{-1})^{yx}(ab)^y \in \langle (ab)^G \rangle.$$

Следовательно, $A' \subseteq \langle (ab)^G \rangle$. Аналогично получаем $B' \subseteq \langle (ab)^G \rangle$. Но тогда $G = G' = A'B' = \langle (ab)^G \rangle$. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Если группа G совпадает со своим коммутантом, $G = AB$, причём $A = \langle a^G \rangle$, $B = \langle b^G \rangle$ для некоторых $a \in A$, $b \in B$, и $K = [A, B]$, то $G = \langle (ab)^G \rangle K$.*

Доказательство. Легко видеть, что фактор-группа G/K совпадает со своим коммутантом, $G/K = (A/K)(B/K)$ и подгруппы A/K и B/K поэлементно перестановочны. В то же время

$$A/K = \langle a^G \rangle / K = \langle (aK)^{G/K} \rangle = \langle (aK)^{A/K} \rangle,$$

аналогично для B/K. Следовательно, фактор-группа G/K удовлетворяет всем условиям леммы 1, а значит,

$$G/K = \langle (abK)^{G/K} \rangle = \langle (ab)^G \rangle K/K.$$

Отсюда $G = \langle (ab)^G \rangle K$. Лемма доказана. □

Теорема 1. *Пусть группа G совпадает со своим коммутантом и порождается конечным множеством классов сопряжённых элементов. Если существует минимальная собственная нормальная подгруппа A группы G, такая что фактор-группа G/A совпадает с нормальным замыканием одного элемента, то G совпадает с нормальным замыканием одного элемента.*

Доказательство. По условию G/A совпадает с нормальным замыканием одного элемента: $G/A = \langle (bA)^{G/A} \rangle = A\langle b^G \rangle / A$ для некоторого $b \in G$. Обозначим $B = \langle b^G \rangle$, тогда $G = AB$. Пусть $D = A \cap B$. Если $D = A$, то $G = AB = B = \langle b^G \rangle$, что и требовалось доказать.

Предположим, что $D \neq A$. Поскольку $G/B = AB/B \cong A/D$ и по условию G порождается конечным множеством классов сопряжённых элементов, то и фактор-группа G/B, а вместе с ней и A/D порождается конечным множеством классов сопряжённых элементов:

$$A/D = \langle (a_1D)^{A/D}, \dots, (a_kD)^{A/D} \rangle = \langle (a_1D)^{G/D}, \dots, (a_kD)^{G/D} \rangle.$$

Если $k = 1$, то A/D совпадает с нормальным замыканием в G/D одного элемента. Предположим, что $k > 1$, и будем считать k минимальным. Тогда

$$A/D \neq \langle (a_2D)^{G/D}, \dots, (a_kD)^{G/D} \rangle = \langle a_2^G, \dots, a_k^G \rangle D/D.$$

Обозначим $H = \langle a_2^G, \dots, a_k^G \rangle D$. Тогда подгруппа H строго содержится в A и нормальна в G, причём $A/H \cong (A/D)/(H/D) = \langle (a_1D)^{G/D} \rangle$. Итак, в любом случае существует собственная в A нормальная в G подгруппа A_1, такая что фактор-группа A/A_1 совпадает с нормальным замыканием в G/A_1 одного элемента: $A/A_1 = \langle (aA_1)^{G/A_1} \rangle$ для некоторого $a \in A$. Обозначим

$$\bar{G} = G/A_1, \quad \bar{a} = aA_1, \quad \bar{b} = bA_1, \quad \bar{A} = A/A_1, \quad \bar{B} = BA_1/A_1.$$

Тогда

$$\bar{G} = \bar{A}\bar{B}, \quad \bar{A} = \langle \bar{a}^{\bar{G}} \rangle, \quad \bar{B} = BA_1/A_1 = \langle b^G \rangle A_1/A_1 = \langle (bA_1)^{G/A_1} \rangle = \langle \bar{b}^{\bar{G}} \rangle.$$

Докажем, что $\bar{A}$ — минимальная нормальная подгруппа группы $\bar{G}$, такая что фактор-группа $\bar{G}/\bar{A}$ совпадает с нормальным замыканием одного элемента. Предположим противное: пусть существует нормальная в $\bar{G}$ подгруппа $\bar{C}$, строго содержащаяся в $\bar{A}$, такая что $\bar{G}/\bar{C}$ совпадает с нормальным замыканием одного элемента. Пусть C — полный прообраз подгруппы $\bar{C}$ при естественном гомоморфизме группы G на фактор-группу $\bar{G} = G/A_1$. Тогда $C < A$, $C \lhd G$ и $G/C \cong (G/A_1)/(C/A_1) = \bar{G}/\bar{C}$. Отсюда заключаем, что G/C совпадает с нормальным замыканием одного элемента. Но это противоречит минимальности подгруппы A. Итак, $\bar{A}$ — минимальная нормальная подгруппа группы $\bar{G}$, такая что фактор-группа $\bar{G}/\bar{A}$ совпадает с нормальным замыканием одного элемента.

По лемме 2 фактор-группа $\bar{G}/[\bar{A}, \bar{B}]$ совпадает с нормальным замыканием одного элемента, откуда в силу минимальности подгруппы $\bar{A}$ заключаем, что $\bar{A} = [\bar{A}, \bar{B}]$. Но тогда $\bar{G} = \bar{A}\bar{B} = [\bar{A}, \bar{B}]\bar{B} = \bar{B} = \langle \bar{b}^{\bar{G}} \rangle$. Отсюда $G/A_1 = \langle (bA_1)^{G/A_1} \rangle$, что противоречит минимальности подгруппы A. Теорема доказана. □

Следствие 1. *Пусть группа G совпадает со своим коммутантом и порождается конечным множеством классов сопряжённых элементов. Если всякая строго убывающая цепочка нормальных подгрупп группы G конечна, то G совпадает с нормальным замыканием одного элемента.*

Доказательство. По условию $G = \langle g_1^G, \dots, g_n^G \rangle$. Если $n = 1$, то утверждение доказано. Пусть $n > 1$. Будем считать, что n минимально, т. е. G не порождается меньшим количеством классов сопряжённых элементов. Обозначим $H = \langle g_2^G, \dots, g_n^G \rangle$. Тогда H — собственная нормальная подгруппа, причём $G/H = \langle (g_1H)^{G/H} \rangle$. По условию минимальности для нормальных подгрупп существует минимальная собственная нормальная подгруппа A, такая что G/A

совпадает с нормальным замыканием одного элемента. Таким образом, утверждение следствия вытекает из доказанной теоремы 1. $\square$

Следствие 2. *Пусть группа G совпадает со своим коммутантом и удовлетворяет условию минимальности для нормальных подгрупп. Если всякая неединичная нормальная в G подгруппа A, совпадающая со своим коммутантом, содержит собственную подгруппу A_1, нормальную в G, такую что фактор-группа A/A_1 порождается конечным множеством классов сопряжённых элементов, то G совпадает с нормальным замыканием одного элемента.*

Доказательство. Для единичной группы утверждение очевидно. Пусть группа G отлична от единичной. По условию группа G содержит минимальную собственную подгруппу A, нормальную в G, такую что фактор-группа G/A порождается конечным множеством классов сопряжённых элементов. Если $A = \langle e\rangle$, то группа G порождается конечным множеством классов сопряжённых элементов, и доказываемое утверждение вытекает из следствия 1.

Предположим, что $A \neq \langle e\rangle$. По условию минимальности для нормальных подгрупп существует минимальная нормальная в G подгруппа B, такая что $G = AB$. Обозначим $D = A\cap B$. Поскольку $G/A \cong B/D$, то B/D порождается конечным множеством классов сопряжённых элементов:

$$\begin{aligned}B/D = \langle (b_1D)^{B/D}, \ldots, (b_mD)^{B/D}\rangle = \\ = \langle (b_1D)^{G/D}, \ldots, (b_mD)^{G/D}\rangle = \langle b_1^G, \ldots, b_m^G\rangle D/D.\end{aligned}$$

Отсюда $B = \langle b_1^G, \ldots, b_m^G\rangle D$. Если предположить, что $B \neq \langle b_1^G, \ldots, b_m^G\rangle$, то

$$G = AB = A\langle b_1^G, \ldots, b_m^G\rangle D = A\langle b_1^G, \ldots, b_m^G\rangle,$$

что противоречит минимальности подгруппы B. Следовательно, $B=\langle b_1^G, \ldots, b_m^G\rangle$.

Далее, поскольку $(G/A)' = G'A/A = G/A$ и $G/A \cong B/D$, то $B/D = (B/D)' = B'D/D$, откуда $B = B'D$. Если теперь предположить, что $B \neq B'$, то получаем $G = AB = AB'D = AB'$, что снова противоречит минимальности B. Следовательно, $B = B'$.

Так как $G = G' = (AB)' = A'B'[A,B] = A'B$, то

$$G/A' = A'B/A' = \langle b_1^G, \ldots, b_m^G\rangle A'/A' = \langle (b_1A')^{G/A'}, \ldots, (b_mA')^{G/A'}\rangle.$$

В силу минимальности подгруппы A отсюда заключаем, что $A = A'$. По предположению подгруппа A отлична от единичной и по условию A содержит собственную подгруппу A_1, нормальную в G, такую что фактор-группа A/A_1 порождается конечным множеством классов сопряжённых элементов:

$$A/A_1 = \langle (a_1A_1)^{A/A_1}, \ldots, (a_kA_1)^{A/A_1}\rangle = \langle (a_1A_1)^{G/A_1}, \ldots, (a_kA_1)^{G/A_1}\rangle.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}G/A_1 &= AB/A_1 = (A/A_1)(BA_1/A_1) = \\ &= \langle (a_1A_1)^{G/A_1}, \ldots, (a_kA_1)^{G/A_1}\rangle(\langle b_1^G, \ldots, b_m^G\rangle A_1/A_1) = \\ &= \langle (a_1A_1)^{G/A_1}, \ldots, (a_kA_1)^{G/A_1}, (b_1A_1)^{G/A_1}, \ldots, (b_mA_1)^{G/A_1}\rangle,\end{aligned}$$

пришли к противоречию с минимальностью подгруппы A. Таким образом, следствие доказано. $\square$

Лемма 3. *Пусть группа G порождается конечным множеством классов сопряжённых элементов. Если для любой нормальной подгруппы H группы G из того, что фактор-группа G/H порождается двумя классами сопряжённых элементов, следует, что она совпадает с нормальным замыканием одного элемента, то группа G совпадает с нормальным замыканием одного из своих элементов.*

Доказательство. По условию $G = \langle g_1^G, \ldots, g_n^G \rangle$ для некоторых $g_1, \ldots, g_n \in G$. Индукцией по n докажем, что группа G совпадает с нормальным замыканием одного элемента. При $n = 1$ утверждение очевидно, а при $n = 2$ вытекает из условия, когда H — единичная подгруппа. Пусть $n > 2$ и утверждение верно для $n - 1$. Обозначим $H = \langle g_1^G, \ldots, g_{n-2}^G \rangle$. Тогда фактор-группа G/H порождается двумя классами сопряжённых элементов и по условию совпадает с нормальным замыканием одного элемента: $G/H = \langle (gH)^{G/H} \rangle$ для некоторого $g \in G$. Но тогда $G/H = \langle g^G \rangle H/H$, откуда $G = \langle g^G \rangle H = \langle g^G, g_1^G, \ldots, g_{n-2}^G \rangle$. По индуктивному предположению G совпадает с нормальным замыканием одного элемента. Лемма доказана. $\square$

Теорема 2. *Группа F, совпадающая со своим коммутантом и порождённая конечным множеством классов сопряжённых элементов, не совпадает с нормальным замыканием одного элемента тогда и только тогда, когда в F существует нормальная подгруппа H, такая что фактор-группа $G = F/H$ удовлетворяет следующим условиям: $G = \langle a_i^G \rangle \langle b^G \rangle$ для некоторых $a_i, b \in G$, $i = 0, 1, \ldots$, где $a_{i+1} \in \langle a_i^G \rangle \cap \langle b_{i+1}^G \rangle$, $b_0 = b$, $b_{i+1} = a_i b_i$, причём последовательность нормальных подгрупп $\langle a_0^G \rangle \rhd \langle a_1^G \rangle \rhd \ldots$ строго убывает, и существует нормальная в G подгруппа*

$$N \subseteq H_1 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \langle a_i^G \rangle,$$

такая что в фактор-группе $\bar{G} = G/N$ для всякого элемента $\bar{x} \in \bar{G}$ фактор-группа $\bar{G}/\langle \bar{x}^{\bar{G}} \rangle$ неабелева.

Доказательство. Необходимость. Из леммы 3 вытекает, что в F существует нормальная подгруппа H, такая что фактор-группа $G = F/H$ порождается двумя классами сопряжённых элементов и не совпадает с нормальным замыканием одного элемента. Пусть $G = \langle a^G, b^G \rangle$ для некоторых $a, b \in G$. Обозначим $A = \langle a^G \rangle$, $B = \langle b^G \rangle$ и $K = [A, B]$. По лемме 2 $G = K \langle (ab)^G \rangle$.

Обозначим $M = \langle (ab)^G \rangle$, тогда $G = KM$. Пусть $D = K \cap M$. Так как $K/D \cong G/M$ и

$$G/M = \langle a^G \rangle \langle (ab)^G \rangle / \langle (ab)^G \rangle = \langle (aM)^{G/M} \rangle,$$

то $K/D = \langle (cD)^{K/D} \rangle = \langle c^K \rangle D/D$ при некотором $c \in K$. Отсюда $K = \langle c^G \rangle D$ и $G = KM = \langle c^G \rangle DM = \langle c^G \rangle M$. Обозначив $b_1 = ab$, получим $G = \langle c^G \rangle \langle b_1^G \rangle$.

Известно [3, теорема 5], что для любых нормальных подгрупп U, V и W при условии $W \subseteq U$ выполняется модулярное тождество $(U \cap V)W = U \cap (VW)$. Следовательно, используя включения $\langle c^G\rangle \subseteq \langle b^G\rangle$ и $\langle c^G\rangle \subseteq \langle a^G\rangle$, получаем

$$(\langle a^G\rangle \cap \langle b_1^G\rangle)\langle b^G\rangle = (\langle a^G\rangle \cap \langle b_1^G\rangle)\langle c^G\rangle\langle b^G\rangle =$$
$$= (\langle a^G\rangle \cap (\langle b_1^G\rangle\langle c^G\rangle))\langle b^G\rangle = (\langle a^G\rangle \cap G)\langle b^G\rangle = \langle a^G\rangle\langle b^G\rangle = G.$$

Обозначим $P = \langle a^G\rangle \cap \langle b_1^G\rangle$, тогда $G = P\langle b^G\rangle$. Пусть $P_1 = P \cap \langle b^G\rangle$. Тогда $G/\langle b^G\rangle \cong P/P_1$, а так как $G/\langle b^G\rangle$ совпадает с нормальным замыканием одного элемента, то $P/P_1 = \langle (a_1P_1)^{P/P_1}\rangle$ при некотором $a_1 \in P$. Отсюда $P = \langle a_1^G\rangle P_1$. Но тогда

$$G = P\langle b^G\rangle = \langle a_1^G\rangle P_1\langle b^G\rangle = \langle a_1^G\rangle\langle b^G\rangle.$$

Кроме того, $\langle a_1^G\rangle \subseteq P \subseteq \langle a^G\rangle$. Если предположить, что $P = \langle a^G\rangle$, то $\langle a^G\rangle \subseteq \subseteq \langle b_1^G\rangle$ и $G = \langle a^G\rangle\langle (ab)^G\rangle = \langle b_1^G\rangle$, что противоречит условию. Следовательно, $\langle a^G\rangle \rhd \langle a_1^G\rangle$.

Пусть $i \geqslant 1$ и элементы $a_0 = a, a_1, \ldots, a_i, b_0 = b, b_1, \ldots, b_i$ уже выбраны так, что $b_i = a_{i-1}b_{i-1}$, $a_i \in \langle a_{i-1}^G\rangle \cap \langle b_i^G\rangle$ и $G = \langle a_i^G\rangle\langle b^G\rangle$, причём

$$\langle a_0^G\rangle \rhd \langle a_1^G\rangle \rhd \ldots \rhd \langle a_i^G\rangle.$$

Рассуждая аналогично, находим $b_{i+1} = a_ib_i$ и элемент $a_{i+1} \in \langle a_i^G\rangle \cap \langle b_{i+1}^G\rangle$, такой что $G = \langle a_{i+1}^G\rangle\langle b^G\rangle$, причём $\langle a_i^G\rangle \rhd \langle a_{i+1}^G\rangle$. В итоге получаем бесконечную строго убывающую цепочку нормальных подгрупп

$$\langle a_0^G\rangle \rhd \langle a_1^G\rangle \rhd \ldots \rhd \langle a_i^G\rangle \rhd \langle a_{i+1}^G\rangle \rhd \ldots.$$

Наконец, докажем, что существует нормальная в G подгруппа

$$N \subseteq H_1 = \bigcap_{i=1}^{\propto} \langle a_i^G\rangle,$$

такая что в фактор-группе $\bar{G} = G/N$ для всякого элемента $\bar{x} \in \bar{G}$ фактор-группа $\bar{G}/\langle \bar{x}^{\bar{G}}\rangle$ неабелева. Возьмём в качестве N единичную подгруппу. Группа G выбрана так, что она не совпадает с нормальным замыканием одного элемента. Поскольку F совпадает со своим коммутантом, то такова и $G = F/H$. Если теперь предположить, что для некоторого $x \in G$ фактор-группа $G/\langle x^G\rangle$ абелева, то получаем $G = G' \subseteq \langle x^G\rangle$, откуда $G = \langle x^G\rangle$ — пришли к противоречию с выбором G.

Достаточность. По условию существует нормальная в G подгруппа

$$N \subseteq H_1 = \bigcap_{i=1}^{\propto} \langle a_i^G\rangle,$$

такая что в фактор-группе $\bar{G} = G/N$ для всякого элемента $\bar{x} \in \bar{G}$ фактор-группа $\bar{G}/\langle \bar{x}^{\bar{G}}\rangle$ неабелева. Если предположить, что данная группа F совпадает с нормальным замыканием одного элемента, то этим же свойством обладает фактор-группа $G = F/H$, а значит, и фактор-группа $\bar{G} = G/N$. Следовательно, существует элемент $\bar{x} \in \bar{G}$, такой что $\bar{G} = \langle \bar{x}^{\bar{G}} \rangle$. Но тогда фактор-группа $\bar{G}/\langle \bar{x}^{\bar{G}} \rangle$ абелева, что противоречит условию. Теорема доказана. $\square$

Литература

[1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. — М.: Наука, 1977.

[2] Нерешённые вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. — Изд. 14-е. — Новосибирск, 1999.

[3] Судзуки М. Строение группы и строение структуры её подгрупп. — М.: ИЛ, 1960.