Обратимые матрицы над решётками с псевдодополнениями

Е. Е. МАРЕНИЧ
Мурманский государственный педагогический университет
e-mail: marenich1@yandex.ru

В. Г. КУМАРОВ
Мурманский государственный педагогический университет
e-mail: kvg@bk.ru

УДК 519.1

Ключевые слова: решётка, матрица.

Аннотация

Получена формула для нахождения наибольшего решения систем линейных уравнений над решётками. Приводятся применения полученного результата к теории решёточных матриц.

Пусть $(P, \leqslant)$ — решётка с псевдодополнениями с $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$, $A = \|a_{ij}\|_{n\times n}$, $a_{ij} \in P$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$. Пусть $A^* = \|a'_{ij}\|_{n\times n}$, $a'_{ij} = \bigwedge\limits_{\substack{r=1\\ r\neq j}}^{n} a^*_{ri}$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$, где a^* — псевдодополнение $a \in P$ в $(P, \leqslant)$. Матрица A обратима справа над $(P, \leqslant)$ тогда и только тогда, когда $A \cdot A^* = E$ над $(P, \leqslant)$. Если A обратима справа над $(P, \leqslant)$, то A^* — наибольшая правая обратная к A над $(P, \leqslant)$. Матрица A обратима справа над $(P, \leqslant)$ тогда и только тогда, когда A ортогональна по столбцам над $(P, \leqslant)$. Матрица $D = A \cdot A^*$ является наибольшей диагональной матрицей, делящейся слева на матрицу A над $(P, \leqslant)$.

Обратимые матрицы над дистрибутивной решёткой $(P, \leqslant)$ образуют полную линейную группу $\mathrm{GL}_n(P, \leqslant)$ относительно умножения. Пусть $(P, \leqslant)$ — конечная дистрибутивная решётка, k — число компонент связности диаграммы Хассе частично упорядоченного множества $(\mathrm{join}(P, \leqslant) - \tilde{0}, \leqslant)$, где $\mathrm{join}(P, \leqslant)$ — множество дизъюнктивно неприводимых элементов решётки $(P, \leqslant)$. Тогда $\mathrm{GL}_n(P, \leqslant) \cong S_n^k$.

Приводятся некоторые свойства обратимых матриц над решётками с псевдодополнениями.

Abstract

E. E. Marenich, V. G. Kumarov, Inversion of matrices over a pseudocomplemented lattice, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 3, pp. 139—154.

We compute the greatest solutions of systems of linear equations over a lattice $(P, \leqslant)$. We also present some applications of the obtained results to lattice matrix theory. Let $(P, \leqslant)$ be a pseudocomplemented lattice with $\tilde{0}$ and $\tilde{1}$ and let $A = \|a_{ij}\|_{n\times n}$, where $a_{ij} \in P$ for $i, j = 1, \ldots, n$. Let $A^* = \|a'_{ij}\|_{n\times n}$ and $a'_{ij} = \bigwedge\limits_{\substack{r=1\\ r\neq j}}^{n} a^*_{ri}$ for $i, j = 1, \ldots, n$, where a^* is the pseudocomplement of $a \in P$ in $(P, \leqslant)$. A matrix A has a right inverse over $(P, \leqslant)$ if and only if $A \cdot A^* = E$ over $(P, \leqslant)$. If A has a right inverse over $(P, \leqslant)$, then A^* is the greatest right inverse of A over $(P, \leqslant)$. The matrix A has a right inverse over $(P, \leqslant)$ if and only if A is a column orthogonal over $(P, \leqslant)$. The matrix $D = A \cdot A^*$ is the greatest diagonal such that A is a left divisor of D over $(P, \leqslant)$.

Invertible matrices over a distributive lattice $(P, \leqslant)$ form the general linear group $\mathrm{GL}_n(P, \leqslant)$ under multiplication. Let $(P, \leqslant)$ be a finite distributive lattice and let k be the number of components of the covering graph $\Gamma(\mathrm{join}(P, \leqslant) - \{\tilde{0}\}, \leqslant)$, where $\mathrm{join}(P, \leqslant)$ is the set of join irreducible elements of $(P, \leqslant)$. Then $\mathrm{GL}_n(P, \leqslant) \cong S_n^k$.

We give some further results concerning inversion of matrices over a pseudocomplemented lattice.

Введение

Пусть $(P, \leqslant)$ — решётка с $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$. Квадратная матрица B называется обратной к квадратной матрице A над $(P, \leqslant)$, если $A \cdot B = B \cdot A = E$ над $(P, \leqslant)$.

В 1952 г. Р. Д. Люк [10] показал, что матрица A обратима над решёткой $(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$ тогда и только тогда, когда она является ортогональной, т. е. $A \cdot {}^tA = E$ над $(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$ и, следовательно, ${}^tA$ — обратная к A над $(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$. В 1963 г. Д. Е. Ратерфорд [12] показал, что если матрица A обратима над решёткой $(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$, то обратная к ней матрица над $(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$ обратима над $(P, \leqslant)$. Таким образом, обратная матрица над $(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$, если она существует, определена единственным образом и равна ${}^tA$. Над решёткой $(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$ обратимы только матрицы перестановок.

В 1986 г. Л. А. Скорняков [6] показал, что матрица A обратима над дистрибутивной решёткой $(P, \leqslant)$ тогда и только тогда, когда она является ортогональной матрицей, т. е. $A \cdot {}^tA = {}^tA \cdot A = E$. Обратимые матрицы над дистрибутивной решёткой $(P, \leqslant)$ образуют полную линейную группу $\mathrm{GL}_n(P, \leqslant)$ относительно умножения. Некоторые свойства группы $\mathrm{GL}_n(P, \leqslant)$ установлены Л. А. Скорняковым и Д. П. Егоровой в [7] и Л. А. Скорняковым в [6].

Обозначения и терминология

Мы приведём некоторые определения и факты, непосредственно связанные с теорией решеток. Детально с ними можно ознакомиться по [1—3, 8].

Пусть $(P, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество, m, n — натуральные числа. Обозначим через $\tilde{0}$ ($\tilde{1}$) наименьший (наибольший) элемент в $(P, \leqslant)$ (если он существует). Если $(P, \leqslant)$ — решётка, то через $\vee$ и $\wedge$ мы обозначаем соответственно операции объединения и пересечения.

Идеалом частично упорядоченного множества $(P, \leqslant)$ называется множество $I \subseteq P$, такое что если $b \in I$ и $a \leqslant b$, то $a \in I$. Аналогично, фильтр частично упорядоченного множества $(P, \leqslant)$ — это подмножество $F \subseteq P$, такое что если $a \in F$ и $a \leqslant b$, то $b \in F$.

Число элементов множества P обозначается $|P|$.

Обозначим через $P^{m\times n}$ множество всех $(m\times n)$-матриц с элементами из P. Элементы матриц мы обозначаем соответствующими малыми буквами: $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$, $B=\|b_{ij}\|_{m\times n}$, $C=\|c_{ij}\|_{m\times n}$, $X=\|x_{ij}\|_{m\times n},\ldots$

Произведение матриц $C=A_{n\times n}\cdot B_{n\times n}$ определим следующим образом:

$$c_{ij}=\bigvee_{r=1}^{n}(a_{ir}\wedge b_{rj})\quad \text{для всех}\quad i,j=1,\ldots,n.$$

Относительно этой операции множество $P^{n\times n}$ над дистрибутивной решёткой является полугруппой.

Матрицу, полученную из A транспонированием, мы обозначаем через ${}^tA$. Матрица $E\in P^{n\times n}$, такая что

$$e_{ij}=\begin{cases}\tilde{1}, & \text{если } i=j,\\ \tilde{0}, & \text{если } i\neq j,\end{cases}$$

называется единичной матрицей.

Матрица $A\in P^{n\times n}$ называется ортогональной по строкам над $(P,\leqslant)$, если

$$\begin{aligned}&a_{ir}\wedge a_{jr}=\tilde{0} && \text{для всех}\ \ i\neq j,\ r=1,\ldots,n;\\ &a_{i1}\vee\ldots\vee a_{in}=\tilde{1} && \text{для всех}\ \ i=1,\ldots,n\end{aligned}$$

Матрица $A\in P^{n\times n}$ называется ортогональной по столбцам над $(P,\leqslant)$, если

$$\begin{aligned}&a_{ri}\wedge a_{rj}=\tilde{0} && \text{для всех}\ \ i\neq j,\ r=1,\ldots,n;\\ &a_{1i}\vee\ldots\vee a_{ni}=\tilde{1} && \text{для всех}\ \ i=1,\ldots,n.\end{aligned}$$

Матрица $A\in P^{n\times n}$ ортогональна по строкам над $(P,\leqslant)$ тогда и только тогда, когда $A\cdot{}^tA=E$ над $(P,\leqslant)$. Матрица $A\in P^{n\times n}$ ортогональна по столбцам над $(P,\leqslant)$ тогда и только тогда, когда ${}^tA\cdot A=E$ над $(P,\leqslant)$. Матрица $A\in P^{n\times n}$ ортогональна над $(P,\leqslant)$, если $A\cdot{}^tA={}^tA\cdot A=E$ над $(P,\leqslant)$.

Матрица $A\in P^{n\times n}$ называется диагональной, если $a_{ij}=\tilde{0}$ для всех $i\neq j$.

Определим на множестве $P^{m\times n}$ частичный порядок $\leqslant$: $A\leqslant B$ равносильно тому, что $a_{ij}\leqslant b_{ij}$ для всех i, j. Частично упорядоченное множество $(P^{m\times n},\leqslant)$ изоморфно решётке $(P,\leqslant)^{mn}$. Если $A\leqslant B$, то $A\cdot C\leqslant B\cdot C$ и $C\cdot A\leqslant C\cdot B$.

Пусть $(P,\leqslant)$ — решётка, $a,b\in P$. Обозначим через $S_{\leqslant}(a,b)$ множество решений x решёточного неравенства

$$a\wedge x\leqslant b.$$

Если в частично упорядоченном множестве $(S_{\leqslant}(a,b),\leqslant)$ существует наибольший элемент, то будем обозначать его через $\left\langle{b\atop a}\right\rangle$. Элемент $\left\langle{b\atop a}\right\rangle$ называется относительным псевдодополнением элемента a в b. В дальнейшем мы используем стандартные свойства относительных псевдодополнений, которые можно найти в [1,2].

Решётка называется брауэровой, если для любых её двух элементов существует относительное псевдодополнение одного элемента в другом.

Пусть $(P, \leqslant)$ — решётка с $\tilde{0}$, $a \in P$. Обозначим через $S_{=}(a, \tilde{0})$ множество решений x уравнения

$$a \wedge x = \tilde{0}.$$

Если в частично упорядоченном множестве $(S_{=}(a, \tilde{0}), \leqslant)$ существует наибольший элемент, то будем обозначать его через $a^* = \left\langle \begin{smallmatrix} \tilde{0} \\ a \end{smallmatrix} \right\rangle$. Элемент a^* называется псевдодополнением элемента a в решётке $(P, \leqslant)$. В дальнейшем мы используем стандартные свойства псевдодополнений, которые можно найти в работах [1, 2].

Определим множество

$$S(P) = \{a^* \mid a \in P\}.$$

По теореме Гливенко—Фринка (см. [3]) частично упорядоченное множество $(S(P), \leqslant)$ является булевой решёткой, с решёточными операциями объединения $\sqcup$ и пересечения $\wedge$, где

$$a \sqcup b = (a^* \wedge b^*)^* = (a \vee b)^{**}, \quad a \wedge b \in S(P) \ \text{ для всех } \ a, b \in S(P).$$

Имеем $a \vee b \leqslant a \sqcup b$ для всех $a, b \in S(P)$, a^* — дополнение элемента $a \in S(P)$ в $(S(P), \leqslant)$.

Решётка $(P, \leqslant)$ называется решёткой с псевдодополнениями, если для любого $a \in P$ существует a^*.

1. Системы линейных уравнений

Пусть $A, B \in P^{m \times n}$, $b, x \in P^{n \times 1}$, $c \in P^{m \times 1}$. Обозначим через $S_{=}(A, c)$ множество решений x уравнения

$$Ax = c. \tag{1.1}$$

Через $S_{\leqslant}(a, b)$ обозначим множество решений x неравенства

$$Ax \leqslant c. \tag{1.2}$$

Если частично упорядоченное множество $(S_{\leqslant}(A, c), \leqslant)$ имеет наибольший элемент, то оно является решёткой. Множество $S_{=}(A, c)$ является фильтром частично упорядоченного множества $(S_{\leqslant}(A, c), \leqslant)$.

Будем говорить, что пара (A, c) обладает UMS-свойством, если для всех i, j существуют относительные псевдодополнения $\left\langle \begin{smallmatrix} c_i \\ a_{ij} \end{smallmatrix} \right\rangle$.

Теорема 1.1. *Пусть пара (A, c) обладает UMS-свойством. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Наибольшим решением неравенства* (1.2) *является вектор*

$$\left\langle \begin{matrix} c \\ A \end{matrix} \right\rangle = \left(\bigwedge_{i=1}^{m} \left\langle \begin{matrix} c_i \\ a_{i1} \end{matrix} \right\rangle, \ldots, \bigwedge_{i=1}^{m} \left\langle \begin{matrix} c_i \\ a_{in} \end{matrix} \right\rangle \right)^t; \tag{1.3}$$

2. *Уравнение* (1.1) *имеет решение тогда и только тогда, когда вектор* $\left\langle \begin{smallmatrix} c \\ A \end{smallmatrix} \right\rangle$ *является его наибольшим решением.*

Доказательство.
1. Неравенство (1.2) мы можем переписать в виде

$$\begin{cases} (a_{11} \wedge x_1) \vee \ldots \vee (a_{1n} \wedge x_n) \leqslant c_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_{m1} \wedge x_1) \vee \ldots \vee (a_{mn} \wedge x_n) \leqslant c_m, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} \wedge x_1 \leqslant c_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \wedge x_1 \leqslant c_m \end{cases}, \ \ldots, \ \begin{cases} a_{1n} \wedge x_n \leqslant c_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{mn} \wedge x_n \leqslant c_m. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$x_1 \leqslant \bigwedge_{i=1}^{m} \left\langle \frac{c_i}{a_{i1}} \right\rangle, \ \ldots, \ x_n \leqslant \bigwedge_{i=1}^{m} \left\langle \frac{c_i}{a_{in}} \right\rangle.$$

Следовательно, $\left\langle \frac{c}{A} \right\rangle$ — наибольшее решение (1.2).

2. Если $x \in S_{=}(A, c)$, то $x \in S_{\leqslant}(A, c)$. Уравнение (1.1) имеет решение тогда и только тогда, когда наибольшее решение неравенства (1.2) является его решением. $\square$

Теорема 1.1 над брауэровыми решётками даёт критерий совместности любой системы линейных уравнений.

2. Наибольшая правая (левая) обратные матрицы

Пусть $(P, \leqslant)$ — решётка с $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$, $A, B \in P^{n\times n}$. Матрица B называется правой обратной к A над $(P, \leqslant)$, если $A \cdot B = E$ над $(P, \leqslant)$. Аналогично, матрица B называется левой обратной к A над $(P, \leqslant)$, если $B \cdot A = E$ над $(P, \leqslant)$. Матрица B называется обратной к A над $(P, \leqslant)$, если $A \cdot B = B \cdot A = E$ над $(P, \leqslant)$. Матрица $A \in P^{n\times n}$ называется обратимой над $(P, \leqslant)$, если A имеет обратную над $(P, \leqslant)$.

Пусть $A \in P^{n\times n}$ и $\{a_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, n\} \subseteq S(P)$. Тогда существуют матрицы

$$A^* = \|a'_{ij}\|_{n\times n}, \quad a'_{ij} = \bigwedge_{\substack{r=1 \\ r\neq j}}^{n} a^*_{ri} \ \text{ для всех } \ i, j = 1, \ldots, n,$$

$$^*A = \|a''_{ij}\|_{n\times n}, \quad a''_{ij} = \bigwedge_{\substack{r=1 \\ r\neq i}}^{n} a^*_{jr} \ \text{ для всех } \ i, j = 1, \ldots, n.$$

Матрицы A^* и $^*A$ мы будем называть соответственно правой и левой псевдообратными к A над $(P, \leqslant)$.

Теорема 2.1. *Пусть $(P, \leqslant)$ — решётка с $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$, $A, E \in P^{n\times n}$ и $\{a_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, n\} \subseteq S(P)$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Матрица A обратима справа над $(P, \leqslant)$ тогда и только тогда, когда $A \cdot A^* = E$ над $(P, \leqslant)$. Если B правая обратная к A над $(P, \leqslant)$, то $B \leqslant A^*$.*

2. *Матрица A обратима слева над $(P, \leqslant)$ тогда и только тогда, когда $A \cdot A^* = E$ над $(P, \leqslant)$. Если B левая обратная к A над $(P, \leqslant)$, то $B \leqslant {}^*A$.*

Доказательство.

1. Пусть A обратима справа над $(P, \leqslant)$. Тогда матричное уравнение

$$A \cdot X = E \tag{2.1}$$

имеет решение над $(P, \leqslant)$.

Матричное неравенство

$$A \cdot X \leqslant E$$

над решёткой $(P, \leqslant)$ мы можем записать в виде

$$\bigvee_{r=1}^{n} (a_{ir} \wedge x_{rj}) \leqslant e_{ij} \quad \text{для всех} \quad i, j = 1, \dots, n. \tag{2.2}$$

Система неравенств (2.2) обладает UMS-свойством. По теореме 1.1 отсюда следует, что матрица $A^* = \|a'_{ij}\|_{n \times n}$ правая обратная к A над $(P, \leqslant)$,

$$a'_{ij} = \bigwedge_{r=1}^{n} \left\langle \frac{e_{rj}}{a_{ri}} \right\rangle = \bigwedge_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^{n} \left\langle \frac{\tilde{0}}{a_{ri}} \right\rangle = \bigwedge_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^{n} a^*_{ri},$$

где $\left\langle \frac{\tilde{1}}{a_{ji}} \right\rangle = \tilde{1}$.

По теореме 1.1 получаем, что если B правая обратная к A над $(P, \leqslant)$, то $B \leqslant A^*$. □

Если A обратима справа над $(P, \leqslant)$, то A^* наибольшая правая обратная к A над $(P, \leqslant)$. Если A обратима слева над $(P, \leqslant)$, то ${}^*A$ наибольшая левая обратная к A над $(P, \leqslant)$.

Лемма 2.1. *Пусть $A, B \in P^{n \times n}$, $\{a_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n\} \subseteq S(P)$, $\{b_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n\} \subseteq S(P)$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если A обратима справа над $(P, \leqslant)$, то ${}^t(A^*) = {}^*({}^tA)$. Если A обратима слева над $(P, \leqslant)$, то ${}^t({}^*A) = ({}^tA)^*$.*
2. *Если $A \leqslant B$, то $A^* \geqslant B^*$, ${}^*A \geqslant {}^*B$.*
3. *Если $A \leqslant B$, то $A^{**} \leqslant B^{**}$, ${}^{**}A \leqslant {}^{**}B$, ${}^*(A^*) \leqslant {}^*(B^*)$, $({}^*A)^* \leqslant ({}^*B)^*$.*

Доказательство.

1. Над решёткой $(P, \leqslant)$ условия $A \cdot X = E$, $X \leqslant A^*$ равносильны условиям ${}^tX \cdot {}^tA = E$, ${}^tX \leqslant {}^*({}^tA)$, $X \leqslant {}^t({}^*({}^tA))$. Следовательно, $A^* = {}^t({}^*({}^tA))$.

2. Имеем

$$a_{ij} \leqslant b_{ij}, \quad a^*_{ij} \geqslant b^*_{ij}, \quad \bigwedge_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^{n} a^*_{ri} \geqslant \bigwedge_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^{n} b^*_{ri}, \quad A^* \geqslant B^*.$$

Лемма доказана. □

Суммы
$$r_i(A) = \bigvee_{r=1}^{n} a_{ir}, \quad c_i(A) = \bigvee_{r=1}^{n} a_{ri}, \quad i = 1, \ldots, n,$$
называются соответственно строчечной и столбцовой суммами матрицы $A \in P^{n\times n}$ над $(P, \leqslant)$.

Лемма 2.2. *Если $A \in P^{n\times n}$ обратима справа (слева) над решёткой $(P, \leqslant)$, то $r_i(A) = c_i(A) = \tilde{1}$ для всех $i = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Пусть $A, B \in P^{n\times n}$, $A \cdot B = E$. Имеем
$$\tilde{1} \geqslant \bigvee_{s=1}^{n} a_{is} \geqslant \bigvee_{s=1}^{n} (a_{is} \wedge b_{si}) = \tilde{1} \quad \text{для всех} \quad i = 1, \ldots, n.$$
Следовательно, $r_i(A) = \tilde{1}$ для всех $i = 1, \ldots, n$. □

3. Полная линейная группа над конечными дистрибутивными решётками

Пусть $(P, \leqslant)$ — дистрибутивная решётка с $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$, $A \in P^{n\times n}$.

Обратимые матрицы над дистрибутивной решёткой $(P, \leqslant)$ образуют полную линейную группу $\mathrm{GL}_n(P, \leqslant)$ относительно умножения. Если A обратима над $(P, \leqslant)$, то
$$A^* = {}^*A = A^{-1}.$$
Следующая теорема принадлежит Л. А. Скорнякову [6].

Теорема (теорема Скорнякова об обратимости). *Пусть $(P, \leqslant)$ — дистрибутивная решётка с $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$, $A \in P^{n\times n}$. Матрица A обратима над $(P, \leqslant)$ тогда и только тогда, когда $A \cdot {}^tA = {}^tA \cdot A = E$ над $(P, \leqslant)$.*

Из этой теоремы следует, что матрицы $A \in \mathrm{GL}_n(P, \leqslant)$ являются ортогональными. Так как $A^* = {}^*A = A^{-1}$, то все a_{ij} имеют дополнения в $(P, \leqslant)$. Пусть
$$D = \{a \mid a \in P,\ a \text{ имеет дополнение в } (P, \leqslant)\}.$$
Как известно [2], частично упорядоченное множество $(D, \leqslant)$ является подрешёткой решётки $(P, \leqslant)$. Решётка $(D, \leqslant)$ булева.

Следствием теоремы Скорнякова об обратимости является следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть $(P, \leqslant)$ — дистрибутивная решётка с $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$. Тогда $\mathrm{GL}_n(P, \leqslant) = \mathrm{GL}_n(D, \leqslant)$.* □

Если A обратима над дистрибутивной решёткой $(P, \leqslant)$, то матрицы ${}^*A$ и A^* не обязаны совпадать с матрицей ${}^tA$ даже для дистрибутивных решёток.

Квадратная матрица называется $(\tilde{0}, \tilde{1})$-матрицей перестановок, если в каждой её строке и каждом столбце имеется ровно одна $\tilde{1}$, а все остальные элементы равны $\tilde{0}$. $(\tilde{0}, \tilde{1})$-матрицы перестановок порядка n образуют группу $\mathrm{Per}_n(P, \leqslant)$ относительно операции умножения. Группа $\mathrm{Per}_n(P, \leqslant)$ изоморфна симметрической группе S_n множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Из теоремы 3.1 мы получаем следующее простое утверждение.

Следствие 3.1 (теорема Скорнякова об изоморфизме, [6]). *Пусть $(P, \leqslant)$ — дистрибутивная решётка с $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$. Группа $\mathrm{GL}_n(P, \leqslant)$ совпадает с группой $\mathrm{Per}_n(P, \leqslant)$ тогда и только тогда, когда дополнениями в решётке $(P, \leqslant)$ обладают только $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$.* □

Из этого утверждения следует, в частности, что над конечной цепью $(P, \leqslant)$ имеет место изоморфизм $\mathrm{GL}_n(P, \leqslant) \cong S_n$.

Решётку всех подмножеств k-элементного множества U будем называть булеаном ранга k и обозначать $\mathrm{Bul}(k) = \mathrm{Bul}(U) = (2^U, \subseteq)$. Обозначим через $\overline{\prod\limits_{u \in U}} G_u$ декартово произведение групп G_u, определённое в [4].

Теорема 3.2. *Группа $\mathrm{GL}_n(\mathrm{Bul}(U))$ изоморфна декартовому произведению групп $\Pi = \overline{\prod\limits_{u \in U}} G_u$, где каждая группа G_u изоморфна группе S_n.*

Доказательство. Положим

$$\delta_u(a) = \begin{cases} \tilde{1}, & \text{если } u \in a, \\ \tilde{0}, & \text{если } u \notin a \end{cases} \quad \text{для всех} \quad u \in U, \ a \in 2^U.$$

Для каждой матрицы $A \in (2^U)^{n \times n}$ определим $(\tilde{0}, \tilde{1})$-матрицы

$$A_u = \|\delta_u(a_{ij})\|_{n \times n} \quad \text{для} \quad u \in U. \tag{3.1}$$

Легко показать, что функция

$$f \colon A \to \overline{\prod_{u \in U}} A_u$$

является биекцией множества $P^{n \times n}$ на множество Π. Проверим, что

$$(AB)_u = A_u B_u \quad \text{для всех} \quad A, B \in (2^U)^{n \times n}, \quad u \in U. \tag{3.2}$$

Пусть $C = AB$. Для всех $i, j = 1, \ldots, n$ имеем

$$\delta_u(c_{ij}) = \delta_u\biggl(\bigcup_{r=1}^{n} (a_{ir} \cap b_{rj})\biggr) = \bigvee_{r=1}^{n} (\delta_u(a_{ir}) \wedge \delta_u(b_{rj})).$$

Отсюда следует (3.2). Показано, что $\mathrm{GL}_n(\mathrm{Bul}(U)) \cong \Pi$, $G_u \cong \mathrm{GL}_n(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$. Матрица $A_u \in \mathrm{GL}_n(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$ обратима над цепью $(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$ тогда и только тогда, когда она является $(\tilde{0}, \tilde{1})$-матрицей перестановок. Поэтому $G_u \cong S_n$. □

Следствие 3.2. *Пусть $(P, \leqslant)$ — дистрибутивная решётка с $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$. Если $(D, \leqslant) \cong \mathrm{Bul}(U)$, то $\mathrm{GL}_n(P, \leqslant)$ изоморфна $\overline{\prod\limits_{u \in U}} G_u$, и $G_u \cong S_n$ для всех $u \in U$.* □

В [2,5] приведены необходимые и достаточные условия, при которых решётка $(D, \leqslant)$ изоморфна булеану $\mathrm{Bul}(U)$.

Пусть $\mathrm{join}(P, \leqslant)$ — множество всех дизъюнктивно неприводимых элементов решётки $(P, \leqslant)$, $\mathrm{Id}(\mathrm{join}(P, \leqslant) - \{\tilde{0}\}, \subseteq)$ — решётка идеалов частично упорядоченного множества $(\mathrm{join}(P, \leqslant) - \{\tilde{0}\}, \leqslant)$, S_n^k — прямое произведение k групп S_n.

Следствие 3.3. *Пусть* $(P, \leqslant)$ *— дистрибутивная решётка с* $\tilde{0}$ *и* $\tilde{1}$*. Если* $(D, \leqslant) \cong \mathrm{Bul}(k)$*, то* $\mathrm{GL}_n(P, \leqslant) \cong S_n^k$*.* □

Теорема 3.3. *Группа обратимых* $(n \times n)$*-матриц над конечной дистрибутивной решёткой* $(P, \leqslant)$ *изоморфна группе* S_n^k*, где* k *— число компонент связности диаграммы Хассе частично упорядоченного множества* $(\mathrm{join}(P, \leqslant) - \{\tilde{0}\}, \leqslant)$.

Доказательство. Решётка $(D, \leqslant)$ булева. Из [1, 8] следует, что $(D, \leqslant) \cong \cong \mathrm{Bul}(U)$, где U — конечное множество. По следствию 3.3 $\mathrm{GL}_n(P, \leqslant) \cong S_n^k$, где k — размерность $(D, \leqslant)$. По фундаментальной теореме для конечных дистрибутивных решёток (см. [6])

$$(P, \leqslant) \cong \mathrm{Id}(\mathrm{join}(P, \leqslant) - \{\tilde{0}\}, \leqslant).$$

Пусть φ — изоморфизм $(P, \leqslant)$ на $\mathrm{Id}(\mathrm{join}(P, \leqslant) - \{\tilde{0}\}, \leqslant)$. Если $a \in P$, то $\varphi(a)$ — идеал и $\varphi(a)$ имеет дополнение в частично упорядоченном множестве $\mathrm{Id}(\mathrm{join}(P, \leqslant) - \{\tilde{0}\}, \subseteq)$. Если a — атом решётки $(D, \leqslant)$, то $\varphi(a)$ — компонента связности диаграммы Хассе частично упорядоченного множества $(\mathrm{join}(P, \leqslant) - \{\tilde{0}\}, \leqslant)$. Таким образом, k — число компонент связности диаграммы Хассе частично упорядоченного множества $(\mathrm{join}(P, \leqslant) - \{\tilde{0}\}, \leqslant)$. □

Из теоремы 3.3 следует, что число обратимых $(n \times n)$-матриц над конечной дистрибутивной решёткой равно $(n!)^k$, где k — число компонент связности диаграммы Хассе частично упорядоченного множества $(\mathrm{join}(P, \leqslant) - \{\tilde{0}\}, \leqslant)$.

Пусть $\mathrm{div}(m)$ — множество делителей числа m, $\mathrm{Div}(m) = (\mathrm{div}(m), |\,)$ — решётка делителей числа m. Из теоремы 3.3 следует, что $\mathrm{GL}_n(\mathrm{Div}(m)) \cong S_n^k$, где k — число простых делителей числа m.

Пусть $\mathrm{FD}(m)$ — свободная дистрибутивная решётка. Тогда по теореме 3.3 $\mathrm{GL}_n(\mathrm{FD}(m)) \cong S_n$ для $m \geqslant 3$.

Из [5] следует, что для $n \leqslant 3$ группа $\mathrm{GL}_n(P, \leqslant)$ над дистрибутивной решёткой $(P, \leqslant)$ разрешима. Следующее утверждение непосредственно вытекает из теоремы 3.3.

Следствие 3.4. *Пусть* $(P, \leqslant)$ *— дистрибутивная решётка, такая что решётка* $(D, \leqslant)$ *конечна. Группа* $\mathrm{GL}_n(P, \leqslant)$ *разрешима тогда и только тогда, когда* $n \leqslant 4$*.* □

4. Критерий обратимости

Если $(P, \leqslant)$ — решётка с псевдодополнениями, то все элементы матриц A^* и ${}^*A$ принадлежат множеству $S(P)$.

Лемма 4.1. *Пусть $A, B \in S(P)^{n\times n}$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $A \cdot B = E$ над $(P, \leqslant)$, то $A \cdot B = B \cdot A = E$ над $(S(P), \leqslant)$.*
2. *Если $A \cdot B = E$ над $(S(P), \leqslant)$, то $A \cdot B$ — диагональ над $(P, \leqslant)$.*

Доказательство. Имеем

$$\bigvee_{s=1}^{n}(a_{is} \wedge b_{sj}) = e_{ij} \quad \text{для всех} \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

откуда $a_{is} \wedge b_{sj} = \tilde{0}$ над решётками $(P, \leqslant)$ и $(S(P), \leqslant)$ для всех $i \neq j$. Тогда

$$\bigsqcup_{s=1}^{n}(a_{is} \wedge b_{sj}) = \tilde{0} \quad \text{для всех} \quad i \neq j.$$

Имеем также

$$\tilde{1} \geqslant \bigsqcup_{s=1}^{n}(a_{is} \wedge b_{si}) \geqslant \bigvee_{s=1}^{n}(a_{is} \wedge b_{si}) = \tilde{1} \quad \text{для всех} \quad i = 1, \ldots, n,$$

откуда

$$\bigsqcup_{s=1}^{n}(a_{is} \wedge b_{si}) = \tilde{1} \quad \text{для всех} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, $A \cdot B = E$ и A обратима над $(S(P), \leqslant)$.

Второе утверждение доказывается аналогично. □

Лемма 4.2. *Пусть $A \in P^{n\times n}$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если A обратима справа над $(P, \leqslant)$, то A^* является обратной к A и ортогональной над $(S(P), \leqslant)$. Матрица ${}^t(A^*) = {}^*(A^*)$ является правой обратной к матрице A^* над $(S(P), \leqslant)$, причём $A \leqslant {}^*(A^*)$, ${}^tA \leqslant A^*$.*
2. *Если A обратима слева над $(P, \leqslant)$, то ${}^*A$ является левой обратной к A и ортогональной над $(S(P), \leqslant)$. Матрица ${}^t({}^*A) = ({}^*A)^*$ является обратной к ${}^*A$ над $(S(P), \leqslant)$, причём $A \leqslant ({}^*A)^*$, ${}^tA \leqslant {}^*A$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $B \in P^{n\times n}$, такую что $A \cdot B = E$ над решёткой $(P, \leqslant)$. Из теоремы 2.1 следует, что $A \cdot A^* = E$ над $(P, \leqslant)$. Следовательно, A^* обратима слева над $(P, \leqslant)$. По теореме 2.1 ${}^*(A^*) \cdot A^* = E$ и $A \leqslant {}^*(A^*)$ над $(P, \leqslant)$.

Матрицы A^* и ${}^*(A^*)$ — матрицы с элементами из $S(P)$. Имеем ${}^*(A^*) \cdot A^* = E$ над булевой решёткой $(S(P), \leqslant)$. Матрица A^* ортогональна над $(S(P), \leqslant)$. Таким образом, ${}^t({}^*A) = ({}^*A)^*$.

Второе утверждение доказывается аналогично. □

Заметим, что

$$({}^*(A^*))^* = ({}^t(A^*))^* = {}^t({}^*(A^*)) = {}^t({}^t(A^*)) = A^*.$$

Следующая теорема обобщает теорему Скорнякова об обратимости.

Теорема 4.1. *Пусть $(P, \leqslant)$ — решётка с псевдодополнениями, $A \in P^{n\times n}$.*

1. *Матрица A обратима слева над $(P, \leqslant)$ тогда и только тогда, когда она ортогональна по строкам над $(P, \leqslant)$.*
2. *Матрица A обратима справа над $(P, \leqslant)$ тогда и только тогда, когда она ортогональна по столбцам над $(P, \leqslant)$.*
3. *Матрица A обратима над $(P, \leqslant)$ тогда и только тогда, когда она ортогональна над $(P, \leqslant)$.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть A обратима справа над $(P, \leqslant)$. Из леммы 4.2 следует, что ${}^tA \leqslant A^*$, $A \cdot {}^tA \leqslant A \cdot A^* = E$ над $(P, \leqslant)$. Следовательно, матрица $A \cdot {}^tA$ диагональна над $(P, \leqslant)$. Все строчечные суммы матрицы A равны $\tilde{1}$ над $(P, \leqslant)$. Таким образом, $A \cdot {}^tA = E$ над $(P, \leqslant)$. □

Следствие 4.1. *Пусть $(P, \leqslant)$ — решётка с псевдодополнениями. Если $(\tilde{0}, \tilde{1})$-матрица A обратима справа над $(P, \leqslant)$, то она является матрицей перестановок.*

Доказательство. Пусть A обратима справа над $(P, \leqslant)$. Тогда A обратима над $(S(P), \leqslant)$. Так как любая обратимая матрица ортогональна над $(S(P), \leqslant)$, то A — матрица перестановок. □

5. Некоторые свойства левых (правых) псевдообратных матриц

Пусть $(P, \leqslant)$ — решётка с псевдодополнениями.

Лемма 5.1. *Пусть $A \in S(P)^{n\times n}$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если A обратима справа над $(P, \leqslant)$, то ${}^tA = A^*$.*
2. *Если A обратима слева над $(P, \leqslant)$, то ${}^tA = {}^*A$.*
3. *Если A обратима над $(P, \leqslant)$, то ${}^tA = A^* = {}^*A$, $A = ({}^tA)^* = {}^*({}^tA)$.*

Доказательство.
1. Имеем $A \cdot A^* = E$ над $(P, \leqslant)$. Тогда $A \cdot A^* = A^* \cdot A = E$ над $(S(P), \leqslant)$, откуда следует, что A ортогональна над $(S(P), \leqslant)$ и $A^* = {}^tA$.
3. Имеем ${}^*A = A^* = {}^tA$, $A = {}^t({}^*A) = {}^t(A^*)$. □

Определим множества

$$R_n = \{A^* \mid A \in P^{n\times n},\ A \text{ обратима справа над } (P, \leqslant)\},$$
$$L_n = \{{}^*A \mid A \in P^{n\times n},\ A \text{ обратима слева над } (P, \leqslant)\}.$$

Из леммы 5.1 следует, что $\mathrm{Per}_n(P, \leqslant) \subseteq R_n$, $\mathrm{Per}_n(P, \leqslant) \subseteq L_n$. Если $C \in$ $\in \mathrm{Per}_n(P, \leqslant)$, то $C = ({}^tC)^* \in R_n$.

Теорема 5.1. *Пусть $(P, \leqslant)$ — решётка с псевдодополнениями. Справедливы следующие утверждения.*

1. *R_n — множество всех матриц $C \in S(P)^{n\times n}$, ортогональных по столбцам над $(P, \leqslant)$.*
2. *L_n — множество всех матриц $C \in S(P)^{n\times n}$, ортогональных по строкам над $(P, \leqslant)$.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть $C \in R_n$, $C = A^*$, матрица $A \in P^{n\times n}$ обратима справа над $(P, \leqslant)$. Имеем $C \in S(P)^{n\times n}$, $A \cdot C = A \cdot A^* = E$ над $(P, \leqslant)$. Поэтому $C = A^*$ левая обратная к A над $(P, \leqslant)$. По теореме 4.1 $C = A^*$ ортогональна по столбцам над $(P, \leqslant)$.

Пусть $C \in S(P)^{n\times n}$ ортогональна по столбцам над $(P, \leqslant)$. Тогда C обратима слева над $(P, \leqslant)$. Из леммы 5.1 следует, что $C = {}^t({}^*C) = ({}^tC)^* \in R_n$. □

Заметим, что $L_n = {}^tR_n$, $R_n = {}^tL_n$.

Лемма 5.2. *Пусть $(P, \leqslant)$ — решётка с $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$, элементы матрицы $A \in P^{n\times n}$ принадлежат $S(P)$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *$a_{is} \wedge a'_{sj} = \tilde{0}$ для $i \neq j$, $s = 1, \ldots, n$.*
2. *Матрицы $A \cdot A^*$ и ${}^*A \cdot A$ являются диагоналями над $(P, \leqslant)$.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Если $i \neq j$, то

$$a_{is} \wedge a'_{sj} = a_{is} \wedge \left(\bigwedge_{\substack{r=1 \\ r\neq j}}^{n} a^*_{rs} \right) = 0. \quad \square$$

Пусть $(P, \leqslant)$ — решётка с $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$, $A, B, D \in P^{n\times n}$. Если $A \cdot B = D$ над $(P, \leqslant)$, то будем говорить, что матрица A является левым делителем матрицы D над $(P, \leqslant)$. Если $B \cdot A = D$ над $(P, \leqslant)$, то A — правый делитель D над $(P, \leqslant)$.

Теорема 5.2. *Пусть $(P, \leqslant)$ — брауэрова решётка с $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$, $A \in P^{n\times n}$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *$D = A \cdot A^*$ — наибольшая диагональ, делящаяся на A слева.*
2. *$D = {}^*A \cdot A$ — наибольшая диагональ, делящаяся на A справа.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть $A \cdot B = D$ над $(P, \leqslant)$, $D \in P^{n\times n}$ — диагональная матрица. Рассмотрим над решёткой $(P, \leqslant)$ уравнение и неравенство

$$A \cdot X = D, \tag{5.1}$$

$$A \cdot X \leqslant D \tag{5.2}$$

относительно неизвестной матрицы $X \in P^{n\times n}$. Матрица $X = B$ является решением (5.1). Систему линейных неравенств (5.2) мы можем записать в виде

$$\bigvee_{r=1}^{n} (a_{ir} \wedge x_{rj}) \leqslant d_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{5.3}$$

Система (5.2) обладает UMS-свойством. По теореме 1.1 наибольшее решение (5.3) определяет матрицу $\left\langle{D \atop A}\right\rangle = \|\bar{a}_{ij}\|_{n\times n}$, где

$$\bar{a}_{ij} = \bigwedge_{r=1}^{n} \left\langle{d_{rj} \atop a_{ri}}\right\rangle = \left\langle{d_{jj} \atop a_{ji}}\right\rangle \wedge \left(\bigwedge_{\substack{r=1\\ r\neq j}}^{n} \left\langle{\tilde{0} \atop a_{ri}}\right\rangle\right) = \left\langle{d_{jj} \atop a_{ji}}\right\rangle \wedge \left(\bigwedge_{\substack{r=1\\ r\neq j}}^{n} a^*_{ri}\right) = \left\langle{d_{jj} \atop a_{ji}}\right\rangle \wedge a'_{ij}.$$

Имеем $\bar{a}_{ij} \leqslant a'_{ij}$, $\left\langle{D \atop A}\right\rangle \leqslant A^*$. Так как $\left\langle{D \atop A}\right\rangle$ — решение (5.1), то

$$D = A \cdot \left\langle{D \atop A}\right\rangle \leqslant A \cdot A^*. \quad \square$$

Если матрица A является левым (правым) делителем диагональной матрицы D над $(P, \leqslant)$, то A является левым (правым) делителем любой диагонали $B \leqslant D$.

6. Свойства обратимых матриц

Пусть $(P, \leqslant)$ — решётка с псевдодополнениями. Матрицу $C \in P^{n\times n}$ будем называть ассоциирующей над $(P, \leqslant)$, если для всех $A, B \in P^{n\times n}$

$$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot C &= A \cdot (B \cdot C),\\ (A \cdot C) \cdot B &= A \cdot (C \cdot B),\\ (C \cdot B) \cdot A &= C \cdot (B \cdot A). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Лемма 6.1. *Пусть $(P, \leqslant)$ — решётка с псевдодополнениями, имеющая $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$, $C \in P^{n\times n}$. Если матрица C — $(\tilde{0}, \tilde{1})$-матрица перестановок, то она является ассоциирующей матрицей над $(P, \leqslant)$.*

Доказательство. Пусть

$$c_{ij} = \begin{cases} \tilde{1}, & \text{если } j = \pi(i),\\ \tilde{0}, & \text{если } j \neq \pi(i) \end{cases}$$

для всех $i, j = 1, \ldots, n$. Элемент (i, j) матрицы $(A \cdot B) \cdot C$ равен

$$d_{ij} = \bigvee_{r=1}^{n} (a_{ir} \wedge b_{r\pi^{-1}(j)}) \quad \text{для всех} \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

Равенства $(A \cdot C) \cdot B = A \cdot (C \cdot B)$, $(C \cdot B) \cdot A = C \cdot (B \cdot A)$ проверяются аналогично. $\square$

Лемма 6.2. *Пусть $(P, \leqslant)$ — решётка с дополнениями, имеющая $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$, а $C \in P^{n\times n}$ — $(\tilde{0}, \tilde{1})$-матрица перестановок. Тогда матрица ${}^tC$ является единственной правой (левой) обратной к C над $(P, \leqslant)$.*

Доказательство. Пусть B — левая обратная к C над $(P, \leqslant)$. Имеем $B \cdot C = E$. Из леммы 6.1 следует, что

$$^tC = E \cdot {}^tC = (B \cdot C) \cdot {}^tC = B \cdot (C \cdot {}^tC) = B \cdot E = B. \quad \square$$

Теорема 6.1. *Пусть $(P, \leqslant)$ — решётка с псевдодополнениями, имеющая $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$. Следующие утверждения равносильны.*

1. *Если матрица $C \in P^{n \times n}$ обратима справа (слева) над $(P, \leqslant)$, то C является $(\tilde{0}, \tilde{1})$-матрицей перестановок.*
2. $R_n = \mathrm{Per}_n(P, \leqslant)$.
3. $L_n = \mathrm{Per}_n(P, \leqslant)$.

Доказательство.

Докажем, что выполняется импликация $1 \implies 2$. Пусть $C \in R_n$. Имеем $C = A^*$, $A \cdot A^* = E$ над $(P, \leqslant)$. По лемме 6.2 $C = A^*$ — $(\tilde{0}, \tilde{1})$-матрица перестановок.

Проверим справедливость импликации $2 \implies 1$. Пусть A обратима справа над $(P, \leqslant)$. Имеем $A^* \in R_n$, A^* — $(\tilde{0}, \tilde{1})$-матрица перестановок. Тогда $A \cdot A^* = E$, и по лемме 6.2 A также является $(\tilde{0}, \tilde{1})$-матрицей перестановок.

Так как $L_n = {}^tR_n$, $R_n = {}^tL_n$, то утверждения 2 и 3 эквивалентны. $\square$

Следствие 6.1. *Пусть $(P, \leqslant)$ — решётка с псевдодополнениями, имеющая $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$, $|S(P)| = 2$, $C \in P^{n \times n}$. Если C обратима справа (слева) над $(P, \leqslant)$, то C — $(\tilde{0}, \tilde{1})$-матрица перестановок.* $\square$

Теорема 6.2. *Пусть $(P, \leqslant)$ — решётка с псевдодополнениями, имеющая $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$. Если множество всех матриц, обратимых слева (справа) над решёткой $(P, \leqslant)$, совпадает с множеством $(\tilde{0}, \tilde{1})$-матриц перестановок, то дополнениями в решётке $(P, \leqslant)$ обладают только $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$.*

Доказательство. Пусть множество всех $(n \times n)$-матриц, обратимых справа над $(P, \leqslant)$, совпадает с множеством всех $(\tilde{0}, \tilde{1})$-матриц перестановок порядка n. Пусть $u, v \in P$, $u, v \notin \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$, $u \wedge v = \tilde{0}$ и $u \vee v = \tilde{1}$. Тогда матрица

$$\begin{pmatrix} u & v & \tilde{0} & \dots & \tilde{0} \\ v & u & \tilde{0} & \dots & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} & \dots & \tilde{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \dots & \tilde{1} \end{pmatrix}$$

обратима справа над $(P, \leqslant)$, что противоречит условию теоремы. $\square$

Теорема 6.3. *Пусть $(P, \leqslant)$ — решётка с $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$, $a \vee b = a \sqcup b$ для всех $a, b \in S(P)$. Справедливы следующие утверждения.*

1. $R_n = \mathrm{GL}_n(S(P), \leqslant)$.
2. $L_n = \mathrm{GL}_n(S(P), \leqslant)$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть $C \in R_n$. Имеем $C = A^*$, ${}^*(A^*) \cdot A^* = E$ над $(P, \leqslant)$. Тогда ${}^*(A^*) \cdot A^* = E$ над $(S(P), \leqslant)$ и, значит, $C = A^* \in \mathrm{GL}_n(S(P), \leqslant)$.

Пусть $C \in \mathrm{GL}_n(S(P), \leqslant)$. Тогда $C \cdot B = E$ над $(S(P), \leqslant)$ для некоторой матрицы $B \in \mathrm{GL}_n(S(P), \leqslant)$. Тогда $C \cdot B = E$ над $(P, \leqslant)$, и по лемме 5.1 $C = ({}^tC)^* \in R_n$. $\square$

Следствие 6.2. *Пусть $(P, \leqslant)$ — решётка с $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$, $a \vee b = a \sqcup b$ для всех $a, b \in S(P)$. Следующие утверждения равносильны.*

1. $|S(P)| = 2$.
2. $R_n = L_n = \mathrm{Per}_n(P, \leqslant)$.

Доказательство.

Проверим импликацию $1 \implies 2$. Из теоремы Скорнякова об изоморфизме следует, что

$$R_n = L_n = \mathrm{GL}_n(S(P), \leqslant) = \mathrm{Per}_n(P, \leqslant).$$

Проверим импликацию $2 \implies 1$. Пусть матрица A обратима над $(S(P), \leqslant)$. Тогда A обратима над $(P, \leqslant)$. Матрица $A^* \in R_n = \mathrm{Per}_n(P, \leqslant)$ является $(\tilde{0}, \tilde{1})$-матрицей перестановок. Из равенства $A \cdot A^* = E$ следует, что и A — матрица перестановок. Так как $\mathrm{GL}_n(S(P), \leqslant)$ состоит только из матриц перестановок, то $|S(P)| = 2$. $\square$

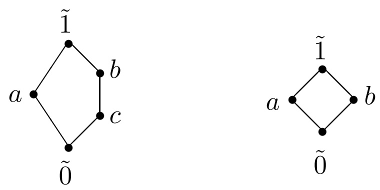

Рис. 1

Для пентагона $(P, \leqslant)$, диаграмма Хассе которого изображена на рис. 1, имеем $S(P) = \{\tilde{0}, \tilde{1}, a, b\}$, объединение $\vee$ в решётке $(P, \leqslant)$ совпадает с объединением $\sqcup$ в решётке $(S(P), \leqslant)$. Поэтому над пентагоном $(P, \leqslant)$ обратимы справа (слева) не только матрицы перестановок. Следовательно,

$$R_n = \mathrm{GL}_n(S(P), \leqslant) \cong S_n^2.$$

Литература

[1] Айгнер М. Комбинаторная теория. — М.: Мир, 1982.
[2] Биркгоф Г. Теория решёток. — М.: Наука, 1984.
[3] Гретцер Г. Общая теория решёток. — М.: Мир, 1982.

[4] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. — М.: Наука, 1972.

[5] Скорняков Л. А. Элементы теории структур. — М.: Наука, 1970.

[6] Скорняков Л. А. Обратимые матрицы над дистрибутивными структурами // Сиб. мат. журн. — 1986. — Т. XXVII, № 2. — С. 182—185.

[7] Скорняков Л. А., Егорова Д. П. Нормальные подгруппы полной линейной группы степени 3 над дистрибутивной структурой // Алгебра и логика. — 1984. — Т. 23, № 6. — С. 670—683.

[8] Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. — М: Мир, 1990.

[9] Kim Ki Hang. Boolean Matrix Theory and Applications. — New York: Marcel Dekker, 1982.

[10] Luce R. D. A note on Boolean matrix theory // Proc. Amer. Math. Soc. — 1952. — Vol. 3, no. 2. — P. 382—388.

[11] Reutenauer Ch., Staubing H. Inversion of matrices over a commutative semiring // J. Algebra. — 1984. — Vol. 88, no. 2. — P. 350—360.

[12] Rutherford D. E. Inverses of Boolean matrices // Proc. Glasgow Math. Assoc. — 1963. — Vol. 6, no. 1. — P. 49—53.

[13] Wedderburn J. H. M. Boolean linear associative algebra // Ann. Math. — 1934. — Vol. 35, no. 1. — P. 185—194.