Группы порядка 24 и их полугруппы эндоморфизмов*

П. ПУУСЕМП
Таллинский технический университет
e-mail: puusemp@edu.ttu.ee

УДК 512.542

Ключевые слова: группа, полугруппа эндоморфизмов.

Аннотация

Доказывается, что среди конечных групп порядка 24 только бинарная группа тетраэдра не определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех групп.

Abstract

P. Puusemp, Groups of order 24 *and their endomorphism semigroups*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 3, pp. 155—172.

It is proved that among the finite groups of order 24 only the binary tetrahedral group is not determined by its endomorphism semigroup in the class of all groups.

1. Введение

Хорошо известно, что множество всех эндоморфизмов абелевой группы образует кольцо и многие свойства этой группы характеризуются свойствами этого кольца [7, 8]. Множество эндоморфизмов произвольной группы образует только полугруппу. Теория полугрупп эндоморфизмов групп мало развита. Во многих своих работах мы старались описать некоторые свойства заданной группы по свойствам её полугруппы эндоморфизмов. Например, в [1, 13] доказано, что прямое произведение групп и некоторые полупрямые произведения групп могут быть описаны свойствами их полугрупп эндоморфизмов. В [9] доказано, что во многих случаях суммируемость двух эндоморфизмов группы характеризуется свойствами полугруппы эндоморфизмов этой группы. Доказано также, что группы из многих известных классов определяются своими полугруппами эндоморфизмов в классе всех групп. Примерами таких групп являются конечные абелевы группы [1, теорема 4.2], непериодические делимые абелевы группы [10, теорема 1], обобщённые группы кватернионов [2, следствие 1]. С другой стороны, известно много примеров групп, которые не определяются

*Работа частично поддержана исследовательским грантом 5900 Эстонского научного фонда.

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 3, с. 155—172.
© 2005 *Центр новых информационных технологий МГУ,*
Издательский дом «Открытые системы»

своими полугруппами эндоморфизмов. Например, общеизвестен следующий результат А. Л. Корнера [5]: каждое счётное редуцированное кольцо с единицей и без кручения является кольцом эндоморфизмов континуального числа счётных редуцированных абелевых групп без кручения. Существуют и другие примеры такого типа: знакопеременная группа A_4 порядка 12 [11, теорема 4.1], некоторые полупрямые произведения конечных циклических групп [12, теорема 1]. Следовательно, полезно знать и другие примеры групп, которые определяются или не определяются своими полугруппами эндоморфизмов. В настоящей работе мы рассмотрим группы порядка 24 и докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть G^* — группа, полугруппа эндоморфизмов которой изоморфна полугруппе эндоморфизмов некоторой группы G порядка 24. Тогда*

1) *если $G = \langle a, b \mid b^3 = 1,\ aba = bab \rangle$ (бинарная группа тетраэдра), то $G^* \cong G$ или группа G^* изоморфна знакопеременной группе A_4 (группе тетраэдра);*
2) *если G не изоморфна бинарной группе тетраэдра, то $G^* \cong G$.*

Кроме общепринятых обозначений теории групп, будем придерживаться следующих обозначений:

G — группа;
$\mathrm{End}(G)$ — полугруппа эндоморфизмов группы G;
$G = H \rightthreetimes K$ — группа G является полупрямым произведением её нормального делителя H и подгруппы K;
$\hat{g}$ — внутренний автоморфизм, порождённый элементом g;
$\mathbb{Z}_n$ — кольцо вычетов по модулю n;
(n, m) — наибольший общий делитель натуральных чисел n и m;
C_n – циклическая группа порядка n;
$D_n = \langle a, b \mid b^2 = a^n = 1,\ b^{-1}ab = a^{-1} \rangle = \langle a \rangle \rightthreetimes \langle b \rangle$ — группа диэдра порядка $2n$ ($n \geqslant 2$);
$Q = \langle a, b \mid a^4 = 1,\ b^2 = a^2,\ b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ — группа кватернионов;
S_n — симметрическая группа степени n;
A_4 — знакопеременная группа степени 4 (группа тетраэдра);
$I(G)$ — множество всех идемпотентов полугруппы $\mathrm{End}(G)$;
$[x] = \{y \in I(G) \mid xy = y,\ yx = x\}$, $x \in I(G)$;
$K(x) = \{y \in \mathrm{End}(G) \mid yx = xy = y\}$;
$P(x) = \{y \in \mathrm{End}(G) \mid yx = xy = x\}$;
$H(x) = \{y \in \mathrm{End}(G) \mid xy = y,\ yx = 0\}$.

Мы будем писать отображение справа от элемента, на который оно действует. Если для заданной группы G всегда из изоморфизма полугрупп $\mathrm{End}(G)$ и $\mathrm{End}(G^*)$, где G^* — некоторая другая группа, следует изоморфизм групп G и G^*, то говорят, что группа G определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех групп.

2. Вспомогательные результаты

Для облегчения ссылок в этом разделе мы перечислим некоторые известные результаты, которыми мы будем пользоваться в следующих разделах работы.

Если x является идемпотентом полугруппы $\mathrm{End}(G)$, то G разлагается в полупрямое произведение $G = \mathrm{Ker}\, x \leftthreetimes \mathrm{Im}\, x$ и $\mathrm{Im}\, x = \{g \in G \mid gx = g\}$. Ясно, что для двух идемпотентов x и y из $\mathrm{End}(G)$ равенство $x = y$ выполняется тогда и только тогда, когда $\mathrm{Im}\, x = \mathrm{Im}\, y$ и $\mathrm{Ker}\, x = \mathrm{Ker}\, y$. Если $x \in I(G)$ и $G = \mathrm{Ker}\, x \times \mathrm{Im}\, x$, то $xy = yx = 0$, где $y \in I(G)$, $\mathrm{Im}\, y = \mathrm{Ker}\, x$, $\mathrm{Ker}\, y = \mathrm{Im}\, x$. В таком случае мы будем говорить, что идемпотент x имеет *ортогональное дополнение* y.

Лемма 2.1. *Если $x, y \in \mathrm{End}(G)$ и $xy = yx$, то $(\mathrm{Im}\, x)y \subset \mathrm{Im}\, x$ и $(\mathrm{Ker}\, x)y \subset \subset \mathrm{Ker}\, x$.*

Лемма 2.2. *Пусть $x \in I(G)$. Тогда*

$$K(x) = \{y \in \mathrm{End}(G) \mid (\mathrm{Im}\, x)y \subset \mathrm{Im}\, x,\ (\mathrm{Ker}\, x)y = \langle 1 \rangle\}$$

и $K(x)$ является подполугруппой с единицей x в $\mathrm{End}(G)$, канонически изоморфной полугруппе $\mathrm{End}(\mathrm{Im}\, x)$. При этом изоморфизме элементу $y \in K(x)$ соответствует его ограничение на подгруппу $\mathrm{Im}\, x$.

Лемма 2.3. *Если $x \in I(G)$, то*

$$H(x) = \{y \in \mathrm{End}(G) \mid (\mathrm{Im}\, x)y \subset \mathrm{Ker}\, x,\ (\mathrm{Ker}\, x)y = \langle 1 \rangle\}.$$

Лемма 2.4. *Если $x \in I(G)$, то*

$$P(x) = \{y \in \mathrm{End}(G) \mid y|_{\mathrm{Im}\, x} = 1_{\mathrm{Im}\, x},\ (\mathrm{Ker}\, x)y \subset \mathrm{Ker}\, x\}.$$

Лемма 2.5. *Если $x \in I(G)$, то $[x] = \{y \in I(G) \mid \mathrm{Ker}\, x = \mathrm{Ker}\, y\}$.*

Мы пропустим доказательства лемм 2.1—2.5 ввиду их элементарности. Перечислим ещё некоторые известные факты, потребующиеся в следующих разделах.

Лемма 2.6 ([1, теорема 4.2]). *Каждая конечная абелева группа определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех групп.*

Следовательно, для доказательства теоремы надо проверить утверждение только для некоммутативных групп порядка 24.

Лемма 2.7 ([1, теорема 1.13]). *Если группы A и B определяются своими полугруппами эндоморфизмов в классе всех групп, то и их прямое произведение $A \times B$ определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех групп.*

Лемма 2.8 ([2, следствие 1]). *Группа кватернионов Q определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех групп.*

Лемма 2.9 ([3, теорема 2]). *Симметрическая группа S_n определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех групп для каждого $n \geqslant 1$.*

Лемма 2.10 ([14, теорема]). *Предположим, что группа G разлагается в полупрямое произведение $G = C_{p^n} \leftthreetimes C_m$, где p — простое число, а n, m — некоторые положительные целые числа. Тогда группа G определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех групп.*

Лемма 2.11 ([14, теорема, леммы 4.5—4.8]). *Пусть G^* — группа, полугруппа эндоморфизмов которой изоморфна полугруппе эндоморфизмов группы*

$$G = \langle a, b \mid a^{p^n} = b^v = 1,\ b^{-1}ab = a^r \rangle = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle \cong C_{p^n} \leftthreetimes C_v,$$

где p — простое число, $p > 2$. Обозначим через x проекцию группы G на её подгруппу $\langle b \rangle$ и через x^* образ проекции x при изоморфизме $\mathrm{End}(G) \cong \mathrm{End}(G^*)$. Тогда группы G и G^* изоморфны и

$$G^* = \langle c, d \mid c^{p^n} = d^v = 1,\ d^{-1}cd = c^{r^*} = \langle c \rangle \leftthreetimes \langle d \rangle,$$

где $\mathrm{Im}(x^*) = \langle d \rangle$, $\mathrm{Ker}(x^*) = \langle c \rangle$ и $\langle r \rangle = \langle r^* \rangle$ в группе единиц кольца $\mathbb{Z}_{p^n}$.

Лемма 2.12 ([11, теорема 3.1]). *Пусть G^* — группа, полугруппа эндоморфизмов которой изоморфна полугруппе эндоморфизмов группы*

$$G = D_{2^n} = \langle a, b \mid b^2 = a^{2^n} = 1,\ b^{-1}ab = a^{-1} \rangle = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle \quad (n \geqslant 1).$$

Обозначим через x проекцию группы G на её подгруппу $\langle b \rangle$ и через x^* образ проекции x при изоморфизме $\mathrm{End}(G) \cong \mathrm{End}(G^*)$. Тогда

$$G^* = \langle c, d \mid d^2 = c^{2^n} = 1,\ d^{-1}cd = c^{-1} \rangle = \langle c \rangle \leftthreetimes \langle d \rangle,$$

где $\mathrm{Im}(x^*) = \langle d \rangle$ и $\mathrm{Ker}(x^*) = \langle c \rangle$.

Пусть G — некоторая группа, которая разлагается в полупрямые произведения

$$G = (G_1 \times G_2) \leftthreetimes K = G_1 \leftthreetimes (G_2 \leftthreetimes K) = G_2 \leftthreetimes (G_1 \leftthreetimes K) \tag{2.1}$$

своих подгрупп G_1, G_2 и K, таких что $\langle G_i, K \rangle = G_i \leftthreetimes K$ $(i = 1, 2)$. Обозначим через x, x_1 и x_2 проекции группы G на её подгруппы K, $G_1 \leftthreetimes K$ и $G_2 \leftthreetimes K$ соответственно. Тогда

$$\mathrm{Im}\, x = K, \qquad \mathrm{Im}\, x_1 = G_1 \leftthreetimes K, \qquad \mathrm{Im}\, x_2 = G_2 \leftthreetimes K, \tag{2.2}$$

$$\mathrm{Ker}\, x = G_1 \times G_2, \qquad \mathrm{Ker}\, x_1 = G_2, \qquad \mathrm{Ker}\, x_2 = G_1. \tag{2.3}$$

Предположим, что G^* — другая группа, полугруппа эндоморфизмов которой изоморфна полугруппе эндоморфизмов группы G. Обозначим через x^*, x_1^*, x_2^* образы эндоморфизмов x, x_1, x_2 при этом изоморфизме. В [13, теоремы 2.1 и 3.1] доказано, что при таких условиях группа G^* разлагается аналогично разложениям (2.1), т. е.

$$G^* = (G_1^* \times G_2^*) \leftthreetimes K^* = G_1^* \leftthreetimes (G_2^* \leftthreetimes K^*) = G_2^* \leftthreetimes (G_1^* \leftthreetimes K^*), \tag{2.4}$$

где $\langle G_i^*, K^* \rangle = G_i^* \leftthreetimes K^*$ $(i = 1, 2)$ и

$$\mathrm{Im}\, x^* = K^*, \qquad \mathrm{Im}\, x_1^* = G_1^* \leftthreetimes K^*, \qquad \mathrm{Im}\, x_2^* = G_2^* \leftthreetimes K^*, \tag{2.5}$$

$$\mathrm{Ker}\, x^* = G_1^* \times G_2^*, \qquad \mathrm{Ker}\, x_1^* = G_2^*, \qquad \mathrm{Ker}\, x_2^* = G_1^*. \tag{2.6}$$

3. Некоммутативные группы порядка 24

Все некоммутативные группы порядка меньше 32 описаны в [6, таблица 1 в конце книги]. Некоммутативные группы порядка 24 исчерпываются следующими группами $\mathcal{G}_1$—$\mathcal{G}_{12}$ (с точностью изоморфизма):

- $\mathcal{G}_1 = C_2 \times A_4$;
- $\mathcal{G}_2 = C_2 \times D_6 \cong D_2 \times D_3$;
- $\mathcal{G}_3 = C_3 \times D_4$;
- $\mathcal{G}_4 = C_3 \times Q$;
- $\mathcal{G}_5 = C_4 \times D_3$;
- $\mathcal{G}_6 = C_2 \times \mathcal{G}_0$, где $\mathcal{G}_0 = \langle a, b \mid b^4 = a^3 = 1,\ b^{-1}ab = a^{-1}\rangle = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle \cong C_3 \leftthreetimes C_4$;
- $\mathcal{G}_7 = D_{12}$;
- $\mathcal{G}_8 = S_4$;
- $\mathcal{G}_9 = \langle a, b \mid b^3 = 1,\ aba = bab\rangle$ (бинарная группа тетраэдра);
- $\mathcal{G}_{10} = \langle a, b \mid b^4 = a^6 = (ba)^2 = (b^{-1}a)^2 = 1\rangle$;
- $\mathcal{G}_{11} = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^3\rangle$;
- $\mathcal{G}_{12} = \langle a, b \mid b^4 = a^{12} = 1,\ b^2 = a^6,\ b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$.

Лемма 3.1. *Группы $\mathcal{G}_9$, $\mathcal{G}_{10}$, $\mathcal{G}_{11}$ и $\mathcal{G}_{12}$ могут быть заданы следующим образом*:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_9 &= \langle a, b, c \mid c^3 = a^4 = 1,\ a^2 = b^2,\ b^{-1}ab = a^{-1},\ c^{-1}ac = b,\ c^{-1}bc = ab\rangle = \\
&= \langle a, b\rangle \leftthreetimes \langle c\rangle \cong Q \leftthreetimes C_3,\\
\mathcal{G}_{10} &= \langle a, b, c \mid a^3 = b^4 = c^2 = 1,\ ac = ca,\ b^{-1}ab = a^{-1},\ c^{-1}bc = b^{-1}\rangle = \\
&= \langle a\rangle \leftthreetimes (\langle b\rangle \leftthreetimes \langle c\rangle) \cong C_3 \leftthreetimes D_4,\\
\mathcal{G}_{11} &= \langle a, b \mid b^8 = a^3 = 1,\ b^{-1}ab = a^{-1}\rangle = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle \cong C_3 \leftthreetimes C_8,\\
\mathcal{G}_{12} &= \langle a, b, c \mid b^4 = 1,\ b^2 = c^2,\ b^{-1}cb = c^{-1},\ a^3 = 1,\ b^{-1}ab = a^{-1},\ ca = ac\rangle = \\
&= \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b, c\rangle \cong C_3 \leftthreetimes Q.
\end{aligned}$$

Доказательство. Обозначив $c = ab^{-1}$ и $d = aba = bab$, преобразуем первоначальные определяющие соотношения группы $\mathcal{G}_9$:

$$aba = bab \Longrightarrow b^{-1}ab = aba^{-1} \Longrightarrow b^{-1}a^3b = ab^3a^{-1} = 1 \Longrightarrow a^3 = 1,$$

$$(ab)^2 = abab = aaba = a^2ba = a^{-1}ba,$$

$$d^4 = aba \cdot bab \cdot aba \cdot bab = (ab)^6 = (a^{-1}ba)^3 = 1,$$

$$d^2 = aba \cdot bab = ab \cdot aba \cdot b = ab \cdot bab \cdot b = ab^{-1}ab^{-1} = c^2,$$

$$b^{-1}db = b^{-1} \cdot bab \cdot b = ab^{-1} = c,$$

$$dcd = aba \cdot ab^{-1} \cdot bab = ab^{-1} = c,$$

$$b^{-1}cb = b^{-1}ab^{-1}b = b^{-1}a = b \cdot bab \cdot b^{-1} = b \cdot aba \cdot b^{-1} = dc.$$

Следовательно,

$$\langle d, c\rangle = \langle d, c \mid d^4 = 1,\ d^2 = c^2,\ dcd = c\rangle \cong Q$$

и

$$\mathcal{G}_9 = \langle b, c, d \mid b^3 = 1,\ d^4 = 1,\ d^2 = c^2,\ dcd = c,\ b^{-1}db = c,\ b^{-1}cb = dc\rangle = \\ = \langle d, c\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle \cong Q \leftthreetimes C_3.$$

Обозначив элементы b, c и d соответственно через c, b и a, получим первое утверждение леммы.

Рассмотрим теперь определяющие соотношения группы $\mathcal{G}_{10}$:

$$(ba)^2 = (b^{-1}a)^2 = 1 \Longrightarrow baba = b^{-1}ab^{-1}a = 1 \Longrightarrow \\ \Longrightarrow bab = a^{-1} = b^{-1}ab^{-1} \Longrightarrow b^2ab^2 = a \Longrightarrow b^2a = ab^2, \\ b^{-1}ab = b^3ab = b^2 \cdot bab = b^2a^{-1}.$$

Обозначим $c = a^3$ и $d = a^2$. Тогда

$$\langle a\rangle = \langle d\rangle \times \langle c\rangle, \quad d^3 = c^2 = 1, \quad dc = cd, \\ b^{-1}db = b^{-1}a^2b = (b^{-1}ab)^2 = b^4a^{-2} = a^{-2} = d^{-1},$$

$$c^{-1}bc = a^{-3}ba^3 = b \cdot b^{-1}a^{-3}b \cdot a^3 = b(b^{-1}ab)^{-3}a^3 = \\ = b(b^2a^{-1})^{-3}a^3 = bb^{-6}a^3a^3 = b^3 = b^{-1}$$

и

$$\mathcal{G}_{10} = \langle b, c, d \mid b^4 = d^3 = c^2 = 1,\ dc = cd,\ b^{-1}db = d^{-1},\ c^{-1}bc = b^{-1}\rangle = \\ = \langle d\rangle \leftthreetimes (\langle b\rangle \leftthreetimes \langle c\rangle \cong C_3 \leftthreetimes D_4.$$

Обозначив элемент d через a, получим второе утверждение леммы.

Аналогично группам $\mathcal{G}_9$ и $\mathcal{G}_{10}$ преобразуем определяющие соотношения группы $\mathcal{G}_{11}$:

$$ababab = a^2 = b^2 \Longrightarrow \begin{cases} a^2b = ba^2,\ b^2a = ab^2, \\ babab = a,\ ababa = b, \end{cases}$$

$$b^2 = ababa \cdot ababa = aba \cdot a^2b^2 \cdot aba = aba \cdot b^4 \cdot aba = \\ = aba \cdot aba \cdot b^4 = a \cdot a^2b^2 \cdot a \cdot b^4 = a^4b^2b^4 = b^{10}, \\ b^8 = 1,$$

$$a^2 = babab \cdot babab = bab \cdot a^2b^2 \cdot bab = bab \cdot a^4 \cdot bab = \\ = bab \cdot bab \cdot a^4 = b \cdot a^2b^2 \cdot b \cdot a^4 = b^4a^2a^4 = a^{10}, \\ a^8 = 1,$$

$$(ab)^3 = b^2, \quad (ab)^{12} = b^8 = 1, \quad ((ab)^4)^3 = 1.$$

Обозначим $c = (ab)^4 = b^2ab = ab^3 = a^3b$. Тогда $c^3 = 1$ и

$$a^2 = b^2 \Longrightarrow a = b^2a^{-1} \Longrightarrow ba = b^3a^{-1} = ba^{-1} \cdot b^2 = abab \cdot b^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow bab^2 = ab \cdot ab \cdot b^4 = b^2ab \cdot b^2ab = c^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow b^{-1}cb = b^{-1} \cdot b^2ab \cdot b = bab^2 = c^2,\ b^{-1}cb = c^2 = c^{-1}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{G}_{11} = \langle a, b\rangle = \langle b, c \mid b^8 = c^3 = 1,\ b^{-1}cb = c^{-1}\rangle = \langle c\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle \cong C_3 \leftthreetimes C_8.$$

Обозначив элемент c через a, получим третье утверждение леммы.

Рассмотрим, наконец, определяющие соотношения группы $\mathcal{G}_{12}$. Обозначим $d = a^4$ и $c = a^3$. Тогда

$$cd = dc, \quad b^2 = c^2, \quad b^{-1}db = b^{-1}a^4b = (b^{-1}ab)^4 = a^{-4} = d^{-1},$$
$$b^{-1}cb = c^{-1}, \quad \langle b, c\rangle \cong Q,$$

и

$$\mathcal{G}_{12} = \langle b, c, d \mid b^4 = 1,\ b^2 = c^2,\ b^{-1}cb = c^{-1},\ d^3 = 1,\ b^{-1}db = d^{-1},\ cd = dc\rangle =$$
$$= \langle d\rangle \leftthreetimes \langle b, c\rangle \cong C_3 \leftthreetimes Q.$$

Обозначив элемент d через a, получим четвёртое утверждение леммы. Лемма доказана.

Известно, что полугруппа эндоморфизмов некоторой группы G изоморфна полугруппе эндоморфизмов знакопеременной группы A_4 степени 4 тогда и только тогда, когда группа G изоморфна группе A_4 или бинарной группе тетраэдра $\mathcal{G}_9$ [11, теорема 4.1]. Следовательно, для доказательства теоремы достаточно доказать, что все вышеуказанные группы $\mathcal{G}_i$ при $i \neq 9$ определяются своими полугруппами эндоморфизмов в классе всех групп. В силу лемм 2.6—2.10, группы $\mathcal{G}_2$—$\mathcal{G}_6$, $\mathcal{G}_8$ и $\mathcal{G}_{11}$ определяются своими полугруппами эндоморфизмов в классе всех групп. В следующих разделах мы покажем, что этот факт справедлив также для оставшихся групп $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_7$, $\mathcal{G}_{10}$ и $\mathcal{G}_{12}$.

4. Описание группы $\mathcal{G}_1$ её полугруппой эндоморфизмов

Всюду в этом разделе $G = \mathcal{G}_1 = C_2 \times A_4$. Предположим, что G^* — некоторая другая группа, полугруппа эндоморфизмов которой изоморфна полугруппе эндоморфизмов группы G:

$$\mathrm{End}(G) \cong \mathrm{End}(G^*). \tag{4.1}$$

Докажем, что группы G и G^* также изоморфны. В дальнейшем всюду z^* будет обозначать образ элемента $z \in \mathrm{End}(G)$ при изоморфизме (4.1).

Обозначим через x и y проекции группы G на её подгруппы C_2 и A_4 соответственно. Тогда

$$G = \operatorname{Im} x \times \operatorname{Im} y, \quad \operatorname{Im} x = \operatorname{Ker} y, \quad \operatorname{Im} y = \operatorname{Ker} x.$$

По [1, теорема 1.13] из изоморфизма (4.1) вытекают аналогичные равенства для x^* и y^* в группе G^*:

$$G^* = \operatorname{Im} x^* \times \operatorname{Im} y^*, \quad \operatorname{Im} x^* = \operatorname{Ker} y^*, \quad \operatorname{Im} y^* = \operatorname{Ker} x^*.$$

При этом

$$\begin{aligned} \operatorname{End}(\operatorname{Im} x^*) &\cong \operatorname{End}(\operatorname{Im} x) \cong \operatorname{End}(C_2), \\ \operatorname{End}(\operatorname{Im} y^*) &\cong \operatorname{End}(\operatorname{Im} y) \cong \operatorname{End}(A_4). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Отсюда по лемме 2.6

$$\operatorname{Im} x^* \cong C_2. \tag{4.3}$$

Из изоморфизма (4.2) и замечания, сделанного в конце предыдущего раздела, вытекает, что

$$\operatorname{Im} y^* \cong A_4 \quad \text{или} \quad \operatorname{Im} y^* \cong \mathcal{G}_9 = Q \leftthreetimes C_3.$$

Так как группа $A_4 = \operatorname{Ker} x$ имеет три элемента порядка 2 и $\operatorname{Im} x = C_2$, то по лемме 2.3 $|H(x)| = 4$. Ввиду изоморфизма (4.1)

$$|H(x^*)| = 4. \tag{4.4}$$

Группа $\mathcal{G}_9$ имеет только один элемент второго порядка. Если $\operatorname{Im} y^* \cong \mathcal{G}_9$, то по (4.3) и лемме 2.3 имеем $|H(x^*)| = 2$. Это противоречит равенству (4.4). Следовательно, $\operatorname{Im} y^* \cong A_4$, $G^* \cong C_2 \times A_4$, и группа G определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех групп.

5. Описание группы диэдра её полугруппой эндоморфизмов

В этом разделе мы рассмотрим группу диэдра

$$D_n = \langle a, b \mid b^2 = a^n = 1,\ b^{-1}ab = a^{-1} \rangle = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$$

порядка $2n$ ($n \geqslant 2$) и покажем, что она определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех групп.

Представим число n в виде

$$n = 2^k m, \quad 2 \nmid m,\ k \geqslant 0.$$

Обозначим

$$c = a^{2^k}, \quad d = a^m.$$

Тогда

$$\begin{gathered} \langle c \rangle \cong C_m, \quad \langle d \rangle \cong C_{2^k}, \quad \langle a \rangle = \langle c \rangle \times \langle d \rangle, \\ b^{-1}cb = c^{-1}, \quad b^{-1}db = d^{-1} \end{gathered}$$

и

$$D_n = \langle c\rangle \leftthreetimes (\langle d\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle) = \langle d\rangle \leftthreetimes (\langle c\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle) = (\langle c\rangle \times \langle d\rangle) \leftthreetimes \langle b\rangle,$$
$$\langle c\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle = D_m, \quad \langle d\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle = D_{2^k}.$$

Обозначим через x, x_1 и x_2 проекции группы G на её подгруппы $\langle b\rangle$, $\langle d\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle = D_{2^k}$ и $\langle c\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle = D_m$ соответственно.

Предположим, что G^* — некоторая другая группа, полугруппа эндоморфизмов которой изоморфна полугруппе эндоморфизмов группы G. Пусть x^*, x_1^*, x_2^* соответствуют элементам x, x_1, x_2 при этом изоморфизме. Выберем в равенствах (2.1)—(2.3) $K = \langle b\rangle$, $G_1 = \langle d\rangle$ и $G_2 = \langle c\rangle$. Тогда группа G^* будет удовлетворять равенствам (2.4)—(2.6).

По лемме 2.2 из изоморфизма $K(x_1) \cong K(x_1^*)$ вытекает, что

$$\operatorname{End}(\operatorname{Im} x_1^*) \cong \operatorname{End}(\operatorname{Im} x_1) = \operatorname{End}(\langle d\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle) = \operatorname{End}(D_{2^k}). \tag{5.1}$$

Ввиду (5.1) и леммы 2.11 (нужно взять там $G = \operatorname{Im} x_1 = \langle d\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$ и $G^* = \operatorname{Im} x_1^*$) имеем

$$\operatorname{Im} x_1^* = \langle d_1\rangle \leftthreetimes \langle b_1\rangle = \langle b_1, d_1 \mid b_1^2 = d_1^{2^k} = 1,\ b_1^{-1} d_1 b_1 = d_1^{-1}\rangle,$$

где

$$\langle b_1\rangle = \operatorname{Im} x^*, \quad \langle d_1\rangle = \operatorname{Ker} x^* \cap \operatorname{Im} x_1^* = G_1^*.$$

Аналогично, по лемме 2.2 из изоморфизма $K(x_2) \cong K(x_2^*)$ вытекает

$$\operatorname{End}(\operatorname{Im} x_2^*) \cong \operatorname{End}(\operatorname{Im} x_2) = \operatorname{End}(\langle c\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle) = \operatorname{End}(D_m). \tag{5.2}$$

В силу (5.2) и леммы 2.12 (нужно взять там $G = \operatorname{Im} x_2 = \langle c\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$ и $G^* = \operatorname{Im} x_2^*$), имеем

$$\operatorname{Im} x_2^* = \langle c_1\rangle \leftthreetimes \langle b_2\rangle = \langle b_2, c_1 \mid b_2^2 = c_1^m = 1,\ b_2^{-1} c_1 b_2 = c_1^{r_1}\rangle,$$

где

$$\langle b_2\rangle = \operatorname{Im} x^*, \quad \langle c_1\rangle = \operatorname{Ker} x^* \cap \operatorname{Im} x_2^* = G_2^*$$

и $\langle r_1\rangle = \langle -1\rangle$ в группе единиц кольца $\mathbb{Z}_m$. Так как $2 \nmid m$ и $\operatorname{Im} x^* \cong C_2$, то $r_1 = -1$ и $b_1 = b_2$. Следовательно,

$$\operatorname{Im} x_2^* = \langle c_1\rangle \leftthreetimes \langle b_1\rangle = \langle b_1, c_1 \mid b_1^2 = c_1^m = 1,\ b_1^{-1} c_1 b_1 = c_1^{-1}\rangle. \tag{5.3}$$

Из равенств (2.4)—(2.6), (5.1) и (5.3) заключаем, что

$$\begin{aligned} G^* &= (\langle c_1\rangle \times \langle d_1\rangle) \leftthreetimes \langle b_1\rangle = \\ &= \langle b_1, c_1, d_1 \mid b_1^2 = c_1^m = d_1^{2^k} = 1,\ b_1^{-1} c_1 b_1 = c_1^{-1},\ b_1^{-1} d_1 b_1 = d_1^{-1}\rangle \cong \\ &\cong D_{2^k m} = D_n. \end{aligned}$$

Этим доказано, что группа диэдра D_n определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех групп. Следовательно, группа $\mathcal{G}_7 = D_{12}$ также определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех групп.

6. Описание группы $\mathcal{G}_{10}$ её полугруппой эндоморфизмов

В этом разделе мы рассмотрим группу

$$G=\mathcal{G}_{10}=\langle a,b,c \mid a^3=b^4=c^2=1,\ ac=ca,\ b^{-1}ab=a^{-1},\ c^{-1}bc=b^{-1}\rangle = \\ =\langle a\rangle \leftthreetimes (\langle b\rangle \leftthreetimes \langle c\rangle)\cong C_3 \leftthreetimes D_4$$

и покажем, что она определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех групп. Сначала докажем некоторые свойства полугруппы $\mathrm{End}(G)$. Оформим эти результаты в виде лемм.

Отметим, что каждый элемент группы G может быть представлен в виде $c^ib^ja^k$, где $i\in\mathbb{Z}_2$, $j\in\mathbb{Z}_4$, $k\in\mathbb{Z}_3$, и каждый $u\in\mathrm{Aut}(G)$ полностью определяется образами cu, bu, au порождающих c, b, a.

Лемма 6.1. *Группа автоморфизмов группы G состоит из отображений*

$$u\colon \begin{cases} b\mapsto a^{-s}\cdot b^j\cdot a^s,\\ c\mapsto cb^{2l},\\ a\mapsto a^m,\end{cases} \tag{6.1}$$

где

$$j\in\{1,3\},\quad l\in\{0,1\},\quad m\in\{1,2\},\quad s\in\{0,1,3\}, \tag{6.2}$$

и

$$|\,\mathrm{Aut}(G)|=24. \tag{6.3}$$

Доказательство. Предположим, что $u\in\mathrm{Aut}(G)$. Так как $\langle a\rangle$ является единственной силовской 3-подгруппой группы G, то $au=a^m$ для некоторого $m\in\mathbb{Z}_3$, $3\nmid m$. Каждый 2-элемент, коммутирующий с элементом a, имеет вид c^kb^{2l}. Поэтому $cu=c^kb^{2l}$ для некоторых $k,l\in\mathbb{Z}_2$. Поскольку все силовские 2-подгруппы группы G сопряжены, то $bu=a^{-s}\cdot c^ib^j\cdot a^s$ для некоторых i, j, s. Следовательно,

$$u\colon \begin{cases} b\mapsto a^{-s}\cdot c^ib^j\cdot a^s,\\ c\mapsto c^kb^{2l},\\ a\mapsto a^m,\end{cases} \tag{6.4}$$

где $i,k,l\in\mathbb{Z}_2$, $j\in\mathbb{Z}_4$, $s,m\in\mathbb{Z}_3$ и $3\nmid m$. Отображение (6.4) сохраняет определяющие соотношения группы G тогда и только тогда, когда

$$\begin{gathered} j(1+(-1)^i)\equiv 0 \pmod 2,\quad 1+(-1)^j\equiv 0 \pmod 3,\\ j(1+(-1)^{i+k})\equiv 0 \pmod 4.\end{gathered} \tag{6.5}$$

Решениями системы (6.5) будут

$$j\in\{1,3\},\quad i=0,\quad k=1 \tag{6.6}$$

и

$$j\in\{1,3\},\quad i=1,\quad k=0. \tag{6.7}$$

Решениям (6.7) соответствуют собственные эндоморфизмы группы G, так как bu является элементом второго порядка. Решения (6.6) дадут автоморфизмы группы G, так как $\langle au, bu, cu\rangle = G$. Следовательно, $\mathrm{Aut}(G)$ состоит из отображений (6.1), удовлетворяющих условиям (6.2). Отсюда вытекает также равенство (6.3). Лемма доказана.

Лемма 6.2. *Пусть $\mathcal{S}_3$ является силовской 3-подгруппой группы $\mathrm{Aut}(G)$. Тогда группа $\mathcal{S}_3$ нормальна в $\mathrm{Aut}(G)$ и $\mathcal{S}_3 \cong C_3$.*

Доказательство. Каждая силовская 3-подгруппа группы $\mathrm{Aut}(G)$ изоморфна в силу (6.3) группе C_3. Обозначим через $\mathcal{A}$ множество всех автоморфизмов группы G вида

$$\alpha\colon \begin{cases} b \mapsto b^j, \\ c \mapsto cb^{2l}, \\ a \mapsto a^m. \end{cases}$$

Легко проверить, что $\mathcal{A}$ является подгруппой группы $\mathrm{Aut}(G)$ и $|\mathcal{A}| = 8$. Следовательно, $\mathcal{A}$ является силовской 2-подгруппой группы $\mathrm{Aut}(G)$. Силовская 3-подгруппа группы $\mathrm{Aut}(G)$ порождается автоморфизмом

$$\beta\colon \begin{cases} b \mapsto a^{-1}ba, \\ c \mapsto c, \\ a \mapsto a, \end{cases}$$

поскольку $\beta^3 = 1$. Обозначим $\mathcal{S}_3 = \langle\beta\rangle$. Так как

$$\alpha^{-1}\colon \begin{cases} b \mapsto b^k, \\ c \mapsto cb^{2kl}, \\ a \mapsto a^n, \end{cases}$$

где

$$jk \equiv 1 \pmod 4, \quad nm \equiv 1 \pmod 3,$$

и

$$\alpha^{-1}\beta\alpha\colon \begin{cases} b \mapsto a^{-m}ba^m, \\ c \mapsto c, \\ a \mapsto a, \end{cases}$$

то $\alpha^{-1}\beta\alpha = \beta^m$. Следовательно, $\mathcal{S}_3$ нормальна в группе $\mathrm{Aut}(G)$. Лемма доказана.

Обозначим через x и y проекции группы G на её подгруппы $\langle b\rangle \leftthreetimes \langle c\rangle$ и $\langle c\rangle$ соответственно. Тогда $x, y \in I(G)$ и $y \in K(x)$.

Лемма 6.3. *Проекции x и y удовлетворяют следующим свойствам.*

1. $K(x) \cong \mathrm{End}(D_4)$.
2. $H(x) = \{0\}$.
3. *x не обладает нетривиальным ортогональным дополнением.*

4. $P(x) \cong \mathrm{End}(C_3)$.
5. $yz = y$ *для каждого элемента* z *третьего порядка группы* $\mathrm{Aut}(G)$.

Доказательство. По лемме 2.2 имеем

$$K(x) \cong \mathrm{End}(\mathrm{Im}\, x) = \mathrm{End}(\langle b \rangle \leftthreetimes \langle c \rangle \cong \mathrm{End}(D_4),$$

т. е. свойство 1 выполняется. Так как $\mathrm{Im}\, x$ и $\mathrm{Ker}\, x$ являются соответственно 2-группой и 3-группой, то свойство 2 вытекает из леммы 2.3. Свойство 3 вытекает сразу из определяющих соотношений группы G. В силу леммы 2.4 $P(x)$ состоит из эндоморфизмов u вида

$$u\colon \begin{cases} c \mapsto c, \\ b \mapsto b, \\ a \mapsto a^i \ (i \in \mathbb{Z}_3). \end{cases} \tag{6.8}$$

Отображение (6.8) сохраняет определяющие соотношения группы G для каждого i и, следовательно, будет эндоморфизмом группы G. Поэтому $P(x) \cong \mathrm{End}(C_3)$ и свойство 4 выполняется. Наконец, предположим, что z является элементом третьего порядка группы $\mathrm{Aut}(G)$. В обозначениях леммы 6.2 тогда $z = \beta$ или $z = \beta^2$. В обоих случаях имеем $yz = y$. Отсюда вытекает свойство 5. Лемма доказана.

Предположим, что G^* — некоторая другая группа, полугруппа эндоморфизмов которой изоморфна полугруппе эндоморфизмов группы G:

$$\mathrm{End}(G) \cong \mathrm{End}(G^*). \tag{6.9}$$

Докажем, что группы G и G^* также изоморфны. В дальнейшем всюду z^* будет обозначать образ элемента $z \in \mathrm{End}(G)$ при изоморфизме (6.9). Отметим, что группа G^* должна быть конечной, поскольку полугруппа $\mathrm{End}(G^*)$ конечна [4, теорема 2]. Ввиду изоморфизма (6.9), свойства 3 леммы 6.3 и [1, следствие 1.12] идемпотент x^* также не имеет нетривиального ортогонального дополнения. Из изоморфизма (6.9) и свойств, полученных для x и y, вытекают следующие свойства для x^* и y^*.

1^*. $|\,\mathrm{Aut}(G^*)| = 24$.
2^*. $y^* \in K(x^*)$.
3^*. $K(x^*) \cong \mathrm{End}(D_4)$.
4^*. $H(x^*) = \{0^*\}$.
5^*. x^* не обладает нетривиальным ортогональным дополнением.
6^*. $P(x^*) \cong \mathrm{End}(C_3)$.
7^*. $y^* z^* = y^*$ для каждого элемента z^* третьего порядка группы $\mathrm{Aut}(G^*)$.

По свойству 2^* и лемме 2.1 имеем

$$G^* = \mathrm{Ker}\, x^* \leftthreetimes \mathrm{Im}\, x^* = \mathrm{Ker}\, y^* \leftthreetimes \mathrm{Im}\, y^*,$$
$$\mathrm{Im}\, x^* = (\mathrm{Ker}\, y^* \cap \mathrm{Im}\, x^*) \leftthreetimes \mathrm{Im}\, y^*,$$
$$\mathrm{Ker}\, x^* \subset \mathrm{Ker}\, y^* = \mathrm{Ker}\, x^* \leftthreetimes (\mathrm{Ker}\, y^* \cap \mathrm{Im}\, x^*).$$

Из леммы 2.2 и свойства 3^* вытекает изоморфизм

$$\mathrm{End}(\mathrm{Im}\, x^*) \cong \mathrm{End}(D_4). \tag{6.10}$$

Теперь можно применить лемму 2.12 для $\mathrm{Im}\, x^*$ и изоморфизма (6.10). Поэтому

$$\mathrm{Im}\, y^* = \langle c^* \rangle, \quad \mathrm{Ker}\, y^* \cap \mathrm{Im}\, x^* = \langle b^* \rangle,$$
$$\mathrm{Im}\, x^* = \langle b^*, c^* \mid {c^*}^2 = {b^*}^4 = 1,\ {c^*}^{-1} b^* c^* = {b^*}^{-1} \rangle$$

для некоторых $b^*, c^* \in \mathrm{Im}\, x^*$. Переобозначим теперь элементы b^* и c^* соответственно через b и c, т. е.

$$\mathrm{Im}\, x^* = \langle b, c \mid c^2 = b^4 = 1,\ c^{-1} bc = b^{-1} \rangle$$

и

$$G^* = \mathrm{Ker}\, x^* \leftthreetimes (\langle b \rangle \leftthreetimes \langle c \rangle) = (\mathrm{Ker}\, x^* \leftthreetimes \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle c \rangle.$$

По лемме 2.3 и свойству 4^* имеем $\mathrm{Hom}(\mathrm{Im}\, x^*, \mathrm{Ker}\, x^*) = \{0^*\}$ и, следовательно,

$$2 \nmid |\mathrm{Ker}\, x^*|.$$

Лемма 6.4. *Группа $N_3 = \mathrm{Ker}\, x^*$ является элементарной абелевой 3-группой.*

Доказательство. Выберем произвольный $\{2, 3\}'$-элемент $g \in G^*$. Тогда $g \in \mathrm{Ker}\, x^*$, и по свойству 1^* имеем $\hat{g} = 1$, т. е. g принадлежит центру группы G^*. Следовательно, $\mathrm{Ker}\, x^*$ и G^* разлагаются в прямые произведения

$$\mathrm{Ker}\, x^* = N \times N_3, \quad G^* = N \times (N_3 \leftthreetimes (\langle b \rangle \leftthreetimes \langle c \rangle)),$$

где N — $\{2,\ 3\}'$-группа и N_3 является силовской 3-подгруппой группы G^*. Обозначим через z^* проекцию группы G^* на её подгруппу $N_3 \leftthreetimes (\langle b \rangle \leftthreetimes \langle c \rangle)$. Тогда $z^* \in P(x^*)$ и по свойству 6^* имеем $z^* = 1^*$ или $z^* = x^*$. Равенство $z^* = x^*$ противоречит свойству 5^*, поэтому $z^* = 1^*$, $N = \langle 1 \rangle$, $\mathrm{Ker}\, x^* = N_3$ и

$$G^* = N_3 \leftthreetimes (\langle b \rangle \leftthreetimes \langle c \rangle). \tag{6.11}$$

Первое полупрямое произведение в (6.11) не может быть прямым произведением.

Из свойства 1^* вытекает, что $\widehat{N_3}$ является циклической группой третьего порядка. Поэтому из изоморфизма $\widehat{N_3} \cong N_3/(N_3 \cap Z(G^*))$ следует, что N_3 — абелева группа. Следовательно, отображение

$$\tau_i \colon \begin{cases} c \mapsto c, \\ b \mapsto b, \\ h \mapsto h^i,\ h \in N_3, \end{cases}$$

будет эндоморфизмом группы G^* для каждого i. Кроме того, $\tau_i \in P(x^*)$. Отсюда по свойству 6^* имеем $h^3 = 1$ для каждого $h \in N_3$. Следовательно, $N_3 = \mathrm{Ker}\, x^*$ является элементарной абелевой 3-группой. Лемма доказана.

Лемма 6.5. *Если $h \in N_3$, то $ch = hc$.*

Доказательство. Предположим, что $h \in N_3$. В силу леммы 6.4 $\hat{h} = 1$ или $\hat{h}$ — автоморфизм третьего порядка. В первом случае утверждение леммы получено. Во втором случае свойство 7^* влечёт

$$c = cy^* = c(y^*\hat{h}) = (cy^*)\hat{h} = c\hat{h},$$

т. е. $ch = hc$. Лемма доказана.

Выберем элемент $d \in N_3 \setminus Z(G^*)$. Так как $\widehat{N_3} \cong C_3$, то

$$\widehat{N_3} = \langle \hat{d} \rangle \cong N_3/(N_3 \cap Z(G^*)) \cong C_3.$$

По леммам 6.4 и 6.5 имеем $bd \neq db$. Поэтому существует $h \in N_3 \cap Z(G^*)$, такой что $b^{-1}db = dh$ или $b^{-1}db = d^{-1}h$. В обоих случаях

$$b^{-4}db^4 = dh^4, \quad d = dh^4, \quad h^4 = 1,$$

т. е. $h = 1$. Поскольку $bd \neq db$, то $b^{-1}db = d^{-1}$. Следовательно,

$$dc = cd, \quad d^3 = 1, \quad b^{-1}db = d^{-1},$$
$$N_3 = (N_3 \cap Z(G^*)) \times \langle d \rangle,$$
$$G^* = (N_3 \cap Z(G^*)) \times (\langle d \rangle \leftthreetimes (\langle b \rangle \leftthreetimes \langle c \rangle)).$$

Обозначим через z^* проекцию группы G^* на её подгруппу $\langle d \rangle \leftthreetimes (\langle b \rangle \leftthreetimes \langle c \rangle)$. Тогда $z^* \in P(x^*) \cong \mathrm{End}(C_3)$, откуда вследствие $z^* \neq x^*$ и $z^* \in I(G^*)$ имеем $z^* = 1^*$. Поэтому $N_3 \cap Z(G^*) = \{1\}$ и

$$G^* = \langle b, c, d \mid c^2 = b^4 = d^3 = 1,\ cd = dc,\ c^{-1}bc = b^{-1},\ b^{-1}db = d^{-1} \rangle =$$
$$= \langle d \rangle \leftthreetimes (\langle b \rangle \leftthreetimes \langle c \rangle).$$

Следовательно, группы G и G^* изоморфны. Этим доказано, что группа $\mathcal{G}_{10}$ определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех групп.

7. Описание группы $\mathcal{G}_{12}$ её полугруппой эндоморфизмов

В этом разделе мы рассмотрим группу

$$G = \mathcal{G}_{12} =$$
$$= \langle a, b, c \mid b^4 = 1,\ b^2 = c^2,\ b^{-1}cb = c^{-1},\ a^3 = 1,\ b^{-1}ab = a^{-1},\ ca = ac \rangle =$$
$$= \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b, c \rangle = C_3 \leftthreetimes Q.$$

и покажем, что она определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех групп. Сначала докажем некоторые свойства полугруппы $\mathrm{End}(G)$.

Обозначим через x проекцию группы G на её подгруппу $Q = \langle b, c \rangle$, т. е. $\mathrm{Im}\, x = Q = \langle b, c \rangle$ и $\mathrm{Ker}\, x = \langle a \rangle$.

Лемма 7.1. *Проекция x удовлетворяет следующим свойствам в полугруппе* $\mathrm{End}(G)$.

1. $K(x) \cong \mathrm{End}(Q)$.
2. $H(x) = \{0\}$.
3. $|\,[x]\,| = 3$.
4. $P(x) \cong \mathrm{End}(C_3)$.

Доказательство. Свойство 1 вытекает непосредственно из леммы 2.2. Так как числа $|\operatorname{Im} x|$ и $|\operatorname{Ker} x|$ взаимно просты, то из леммы 2.3 вытекает справедливость свойства 2. По лемме 2.5 $|\,[x]\,|$ равняется числу полупрямых дополнений подгруппы $\operatorname{Ker} x = \langle a \rangle$ в G, т. е. числу силовских 2-подгрупп группы G. Поэтому $|\,[x]\,| = 3$, и свойство 3 выполняется.

В силу леммы 2.4 $P(x)$ состоит из эндоморфизмов группы G вида

$$z\colon \begin{cases} b \mapsto b, \\ c \mapsto c, \\ a \mapsto a^i, \end{cases} \tag{7.1}$$

где $i \in \mathbb{Z}_3$. Отображение (7.1) сохраняет определяющие соотношения группы G и является эндоморфизмом группы G для каждого $i \in \mathbb{Z}_3$. Следовательно, свойство 4 также справедливо. Лемма доказана.

Предположим, что G^* — некоторая другая группа, полугруппа эндоморфизмов которой изоморфна полугруппе эндоморфизмов группы G:

$$\mathrm{End}(G) \cong \mathrm{End}(G^*). \tag{7.2}$$

Докажем, что группы G и G^* также изоморфны. В дальнейшем всюду z^* будет обозначать образ элемента $z \in \mathrm{End}(G)$ при изоморфизме (7.2). Отметим, что группа G^* должна быть конечной, поскольку полугруппа $\mathrm{End}(G^*)$ конечна [4, теорема 2]. Из изоморфизма (7.2) и леммы 7.1 вытекает, что x^* удовлетворяет следующим свойствам.

1^*. $K(x^*) \cong \mathrm{End}(Q)$.

2^*. $H(x^*) = \{0^*\}$.

3^*. $|\,[x^*]\,| = 3$.

4^*. $P(x^*) \cong \mathrm{End}(C_3)$.

Так как $x^* \in I(G^*)$, то

$$G = \operatorname{Ker} x^* \leftthreetimes \operatorname{Im} x^*. \tag{7.3}$$

По лемме 2.2

$$\mathrm{End}(Q) = \mathrm{End}(\operatorname{Im} x) \cong K(x) \cong K(x^*) \cong \mathrm{End}(\operatorname{Im} x^*).$$

Лемма 2.8 влечёт $\operatorname{Im} x^* \cong Q$. Отождествим

$$\operatorname{Im} x^* = Q = \langle b, c \rangle = \langle b, c \mid b^4 = 1,\ b^2 = c^2,\ b^{-1}cb = c^{-1} \rangle.$$

Из леммы 2.3 и свойства 3^* вытекает

$$(\,|\operatorname{Im} x^*|, |\operatorname{Ker} x^*|\,) = 1. \tag{7.4}$$

Поэтому ввиду леммы 2.5 $|[x^*]|$ равняется числу силовских 2-подгрупп группы G^* и $[x^*] = \{x^*\hat{g} \mid g \in \operatorname{Ker} x^*\}$. Теперь из свойства 3^* получим

$$[\operatorname{Ker} x^* : C_{\operatorname{Ker} x^*}(\operatorname{Im} x^*)] = 3. \tag{7.5}$$

Лемма 7.2. $\operatorname{Ker} x^*$ *является абелевой* 3*-группой.*

Доказательство. Выберем $h \in C_{\operatorname{Ker} x^*}(\operatorname{Im} x^*)$. Тогда $\hat{h} \in P(x^*)$. Поскольку $x^* \in P(x^*)$ и $\hat{h} \neq x^*$, то из свойства 4^* вытекает, что $\hat{h}^2 = 1$, т. е. $h^2 \in Z(G^*)$. Вследствие (7.4) и $h \in \operatorname{Ker} x^*$ имеем $h \in Z(G^*)$. Следовательно,

$$C_{\operatorname{Ker} x^*}(\operatorname{Im} x^*) \subset Z(G^*), \quad C_{\operatorname{Ker} x^*}(\operatorname{Im} x^*) \lhd G^*, \tag{7.6}$$

и ввиду (7.5) $\operatorname{Ker} x^*/C_{\operatorname{Ker} x^*}(\operatorname{Im} x^*)$ является циклической группой третьего порядка. Поэтому $\operatorname{Ker} x^*$ — абелева группа. Кроме того, все $3'$-элементы группы $\operatorname{Ker} x^*$ принадлежат центру $Z(G^*)$. Следовательно, $\operatorname{Ker} x^* = P_{3'} \times P_3$ и

$$G^* = P_{3'} \times (P_3 \leftthreetimes \operatorname{Im} x^*),$$

где P_3 и $P_{3'}$ являются соответственно 3-подгруппой Силова и $3'$-подгруппой Холла группы $\operatorname{Ker} x^*$.

Обозначим через z^* проекцию группы G^* на её подгруппу $P_3 \leftthreetimes \operatorname{Im} x^*$. Тогда $z^* \in I(G^*)$, $z^* \neq x^*$ и $z^* \in P(x^*)$. Поскольку $P(x^*)$ имеет в силу свойства 4^* только два идемпотента x^* и 1^*, то $z^* = 1^*$, $P_{3'} = \{1\}$, $\operatorname{Ker} x^* = P_3$, и $\operatorname{Ker} x^*$ является абелевой 3-группой. Лемма доказана.

Выберем произвольный элемент $a \in \operatorname{Ker} x^* \setminus C_{\operatorname{Ker} x^*}(\operatorname{Im} x^*)$. Тогда в силу (7.5) и (7.6)

$$b^{-1}ab = ah \quad \text{или} \quad b^{-1}ab = a^{-1}h$$

для некоторого $h \in \operatorname{Ker} x^* \cap Z(G^*)$. В обоих случаях

$$b^{-4}ab^4 = ah^4, \quad a = ah^4, \quad h^4 = 1.$$

Так как h — 3-элемент, то $h = 1$ и

$$b^{-1}ab = a \quad \text{или} \quad b^{-1}ab = a^{-1}. \tag{7.7}$$

Аналогично,

$$c^{-1}ac = a \quad \text{или} \quad c^{-1}ac = a^{-1}. \tag{7.8}$$

Лемма 7.3. $\operatorname{Ker} x^* = \langle a \rangle \cong C_3$.

Доказательство. Рассмотрим отображения

$$z_i^* \colon \begin{cases} b \mapsto b, \\ c \mapsto c, \\ h \mapsto h^i, \ h \in P_3, \end{cases}$$

где i — некоторое натуральное число. Используя равенство (7.3), легко проверить, что z_i^* обладает единственным расширением до эндоморфизма группы G^*. При этом $z_i^* \in P(x^*)$. По лемме 7.1 и свойству 4^* получаем, что эндоморфизмы

z_0^*, z_1^*, z_2^* различны, $P(x^*) = \{z_0^*, z_1^*, z_2^*\}$ и $z_3^* = z_0^*$, т. е. $h^3 = 1$ для каждого $h \in \operatorname{Ker} x^*$. Следовательно, $\operatorname{Ker} x^*$ является элементарной абелевой 3-группой и $\langle a \rangle \cong C_3$ будет прямым множителем группы $\operatorname{Ker} x^*$. По (7.5), (7.7) и (7.8) имеем

$$\operatorname{Ker} x^* = (\operatorname{Ker} x^* \cap Z(G^*)) \times \langle a \rangle,$$
$$G^* = (\operatorname{Ker} x^* \cap Z(G^*)) \times (\langle a \rangle \leftthreetimes \langle b, c \rangle).$$

Обозначим через z^* проекцию группы G^* на её подгруппу $\langle a \rangle \leftthreetimes \langle b, c \rangle$. Тогда $z^* \in I(G^*)$, $z^* \neq x^*$ и $z^* \in P(x^*)$. В силу свойства 4* x^* и 1^* являются единственными идемпотентами множества $P(x^*)$. Поэтому $z^* = 1^*$, т. е. $\operatorname{Ker} x^* \cap$ $\cap\, Z(G^*) = \{1\}$ и $\operatorname{Ker} x^* = \langle a \rangle$. Лемма доказана.

Уже доказано, что

$$G^* = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b, c \rangle, \quad a^3 = 1,$$

где a, b, c удовлетворяют равенствам (7.7) и (7.8). Ввиду (7.5) невозможно, чтобы $b^{-1}ab = a$ и $c^{-1}ac = a$. Так как отображение $b \mapsto c$, $c \mapsto b$ может быть расширено до автоморфизма группы $Q = \langle b, c \rangle$, то можно предполагать, что $b^{-1}ab = a^{-1}$. Отображение $b \mapsto b$, $c \mapsto cb$ может быть расширено до автоморфизма группы Q. Поэтому при $c^{-1}ac = a^{-1}$ имеем

$$(cb)^{-1}a(cb) = b^{-1} \cdot c^{-1}ac \cdot b = b^{-1}a^{-1}b = (b^{-1}ab)^{-1} = a,$$

и элемент c можно заменить элементом cb, т. е. можно предполагать, что $c^{-1}ac = a$, $ac = ca$.

Уже получено, что

$$G^* = \langle a, b, c \mid b^4 = 1,\ b^2 = c^2,\ b^{-1}cb = c^{-1},\ a^3 = 1,\ b^{-1}ab = a^{-1},\ ca = ac \rangle.$$

Сравнивая определяющие соотношения групп G^* и $G = \mathcal{G}_{12}$, видим, что $G^* \cong G$. Следовательно, группа $\mathcal{G}_{12}$ определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех групп.

Теорема, сформулированная во введении, полностью доказана.

Литература

[1] Пуусемп П. Идемпотенты полугрупп эндоморфизмов групп // Учёные записки Тартуского ун-та. — 1975. — Т. 366. — С. 76—104.

[2] Пуусемп П. Полугруппы эндоморфизмов обобщённых групп кватернионов // Учёные записки Тартуского ун-та. — 1976. — Т. 390. — С. 84—103.

[3] Пуусемп П. О полугруппах эндоморфизмов симметрических групп // Учёные записки Тартуского ун-та. — 1985. — Т. 700. — С. 42—49.

[4] Alperin J. L. Groups with finitely many automorphisms // Pacific J. Math. — 1962. — Vol. 12, no. 1. — P. 1—5.

[5] Corner A. L. S. Every countable reduced torsion-free ring is an endomorphism ring // Proc. London Math. Soc. — 1963. — Vol. 13, no. 52. — P. 687—710.

[6] Coxeter H. S. M., Moser W. O. J. Generators and Relations for Discrete Groups. — Springer, 1972.

[7] Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A. Properties of endomorphism rings of Abelian groups. I // J. Math. Sci. — 2002. — Vol. 112, no. 6. — P. 4598—4735.

[8] Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A. Properties of endomorphism rings of Abelian groups. II // J. Math. Sci. — 2003. — Vol. 113, no. 1. — P. 1—174.

[9] Puusemp P. On the torsion subgroups and endomorphism semigroups of Abelian groups // Algebras Groups Geom. — 1997. — Vol. 14. — P. 407—422.

[10] Puusemp P. A characterization of divisible and torsion Abelian groups by their endomorphism semigroups // Algebras Groups Geom. — 1999. — Vol. 16. — P. 183—193.

[11] Puusemp P. On endomorphism semigroups of dihedral 2-groups and alternating group A_4 // Algebras Groups Geom. — 1999. — Vol. 16. — P. 487—500.

[12] Puusemp P. Characterization of a semidirect product of cyclic groups by its endomorphism semigroup // Algebras Groups Geom. — 2000. — Vol. 17. — P. 479—498.

[13] Puusemp P. Characterization of a semidirect product of groups by its endomorphism semigroup // Smith, Paula (ed.) et al. Semigroups. Proceedings of the International Conference, Braga, Portugal, June 18—23, 1999. — Singapore: World Scientific, 2000. — P. 161—170.

[14] Puusemp P. On the definability of a semidirect product of cyclic groups by its endomorphism semigroup // Algebras Groups Geom. — 2002. — Vol. 19. — P. 195—212.