Представления бесконечного ранга порядков в неполупростых алгебрах и модульные категории

В. РУМП
Университет Штутгарта, Германия
e-mail: rump@mathematik.uni-stuttgart.de

УДК 512.583

Ключевые слова: большая решётка, разложение, неполупростая алгебра.

Аннотация

Пусть R — дедекиндова область с полем частных K и Λ — R-порядок в K-алгебре A конечной размерности, такой что $A/\operatorname{Rad} A$ сепарабельно. Мы покажем, что если A неполупростая, то существует максимальный R-порядок Δ в теле, такой что категория Λ-$\mathbf{Lat}$ всех R-проективных Λ-модулей допускает полную модульную категорию Δ-$\mathbf{Mod}$ как подфактор.

Abstract

W. Rump, Infinite rank representations of orders in nonsemisimple algebras, and module categories, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 3, pp. 173—187.

Let R be a Dedekind domain with quotient field K and let Λ be an R-order in a finite-dimensional K-algebra A such that $A/\operatorname{Rad} A$ is separable. We show that if A is not semisimple, then there exists a maximal R-order Δ in a skew-field such that the category Λ-$\mathbf{Lat}$ of R-projective Λ-modules admits a full module category Δ-$\mathbf{Mod}$ as a subfactor.

Введение

Бесконечные модули над алгебрами конечной размерности изучаются почти три десятилетия, почти со времени введения почти расщепляемых последовательностей Ауслендером и Райтеном. В то время как бесконечные модули представляют собой основательный предмет для изучения, важность которого всё возрастает [5, 9], их естественному двойнику в теории интегральных представлений долгое время не уделялось должного внимания.

В начале текущего тысячелетия Р. Брайантом и независимо от него А. Кумджианом и Н. Ч. Филлипсом была поставлена проблема классификации интегральных матричных представлений бесконечного ранга для циклических групп C_2. Для произвольной группы C_p простого порядка М. Ч. Р. Батлер, Дж. М. Кэмпбелл и Л. Г. Ковач [4] доказали, что любое матричное представление бесконечного ранга над $\mathbb{Z}$ разлагается на (конечно порождённые) $\mathbb{Z}C_p$-решётки.

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 3, с. 173—187.

Более общо, пусть R — дедекиндова область с полем частных K и Λ — R-порядок в K-алгебре A конечного порядка. Следуя [4], мы определим *обобщённую Λ-решётку* как R-проективный Λ-модуль. Кажется удивительным, что такой естественный подход не был обнаружен раньше. С другой стороны, обобщение Λ-решёток не такой уж очевидный шаг. Например, каждый морфизм в категории Λ-$\mathbf{Lat}$ обобщённых Λ-решёток имеет ядро, но не обязательно коядро (см. замечание 1). Для A-модуля M Λ-подмодули $L \in \Lambda$-$\mathbf{Lat}$ с $KL = M$ образуют частично упорядоченное множество $\mathfrak{L}_\Lambda(M)$, замкнутое относительно пересечений. Но так как $\dim M = \infty$, сумма $L_1, L_2 \in \mathfrak{L}_\Lambda(M)$ не может быть обобщённой Λ-решёткой. Что хуже всего, всегда существуют $L_1, L_2 \in \mathfrak{L}_\Lambda(M)$, такие что $L_1 + L_2 = M$ (см. [11, пример 4]). Также совсем не очевидно, как показать, что $\mathfrak{L}_\Lambda(M) \neq \varnothing$ для любого A-модуля M.

Будем называть обобщённую Λ-решётку L *вполне разложимой*, если L допускает разложение на Λ-решётки. Например, теорема Батлера, Кэмпбелла и Ковача [4] утверждает, что любая обобщённая $\mathbb{Z}C_p$-решётка (где p простое) вполне разложима. В [12] мы ставили в соответствие каждому R-порядку Λ в сепарабельной K-алгебре гиперграф $\mathrm{H}(\Lambda)$, определяющий, является ли обобщённая Λ-решётка вполне разложимой. Если $L \in \Lambda$-$\mathbf{Lat}$ не является вполне разложимой, очень разные явления могут иметь место. В простейшем случае L является неразложимой. В [12, пример 2] мы построили обобщённую Λ-решётку L, без конечно порождённых прямых слагаемых, отличных от нуля, такую что L и $L^{(\aleph_0)}$ локально изоморфны. (Открытым вопросом остаётся, является ли такая L разложимой.) С другой стороны, может случиться, что каждая обобщённая Λ-решётка L имеет бесконечно много ненулевых конечно порождённых прямых слагаемых, хотя L не обязательно вполне разложимая [12, пример 1].

В этой работе мы рассмотрим случай, когда K-алгебра A не является полупростой. Если A не является конечно представимой, то по теореме Ауслендера [3] существует неразложимый A-модуль M бесконечной размерности. Отсюда любая $L \in \mathfrak{L}_\Lambda(M)$ неразложима и не является конечно порождённой. Наш основной результат заключается в том, что в случае сепарабельного $A/\operatorname{Rad} A$ и неполупростой $A = K\Lambda$ существует максимальный порядок Δ в теле, такой что полная модульная категория Δ-$\mathbf{Mod}$, возникает как подфактор Λ-$\mathbf{Lat}$, т. е. Δ-$\mathbf{Mod}$ эквивалентна фактор-категории всех подкатегорий Λ-$\mathbf{Lat}$. Заметим, что Δ-$\mathbf{Mod}$ лишь простое обобщение категории $\mathbb{Z}$-$\mathbf{Mod}$ всех абелевых групп. Например, мы рассматриваем R-порядки вида

$$\mathrm{T}_2(\Lambda) := \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda \end{pmatrix}$$

с максимальным R-порядком Λ. Тогда имеет место эквивалентность категорий

$$\mathrm{T}_2(\Lambda)\text{-}\overline{\mathbf{Lat}} \approx \Lambda\text{-}\mathbf{Mod},$$

где $\mathrm{T}_2(\Lambda)$-$\overline{\mathbf{Lat}}$ обозначает фактор-категорию $\mathrm{T}_2(\Lambda)$-$\mathbf{Lat}$ по модулю инъективных объектов. Хотя ни один из неразложимых инъективных Λ-модулей не является конечно порождённым, это не противоречит тому, что каждая неразложимая обобщённая $\mathrm{T}_2(\Lambda)$-решётка является конечно порождённой [10, предложение 7]. Подобная эквивалентность будет доказана для R-порядков $\Lambda[N]$ с максимальным R-порядком Λ и пропорождающей ${}_\Lambda N_\Lambda$. Отметим, что $K(\Lambda[N])$ может быть рассмотрена как подалгебра алгебры $\mathrm{T}_2(A)$ при вложении A как диагонали $\{(\alpha(a), a) \mid a \in A\}$ в $A \times A$ для подходящего автоморфизма $\alpha \in \mathrm{Aut}_K(A)$. Мы покажем, что Λ-**Mod** эквивалентна градуированной постоянной категории $\Lambda[N]$-$\underline{\mathbf{Lat}}_{\mathrm{gr}}$ (теорема 1). Основной результат будет следовать из теоремы 2, которая утверждает, что для любого R-порядка Λ в неполупростой K-алгебре A с сепарабельным $A/\operatorname{Rad} A$ или $\Delta[N]$-**Lat** (для подходящего N), или $\Delta[\Delta]$-$\mathbf{Lat}_{\mathrm{gr}}$ (Δ — максимальный порядок в теле) возникает как полная подкатегория Λ-**Lat**.

1. Функторы редукции

Далее везде R — дедекиндова область с полем частных K. R-алгебра Λ называется *R-порядком*, если Λ является конечно порождённой и проективной как R-модуль. Соответственно Λ-*решётка* определяется как Λ-модуль L с конечно порождённым и проективным ${}_\Lambda L$. Если ${}_R L$ только проективен, но необязательно конечно порождён, то L называется *обобщённой* Λ-*решёткой* [4]. Категория всех (всех обобщённых) Λ-решёток обозначается Λ-**lat** (соответственно Λ-**Lat**). Через Λ-**Mod** обозначим категорию всех Λ-модулей. Если L принадлежит Λ-**Lat**, но не принадлежит Λ-**lat**, будем называть L — abus de langage — *большой* Λ-*решёткой*. (Строго говоря, это определение бессодержательно, но мы надеемся, что читатель согласится с его полезностью!) Кардинальное число $\rho(L) := \dim KL$ будем называть *рациональным рангом* L. Как и для обычных Λ-решёток, естественный гомоморфизм $L \to K \otimes_R L$ является мономорфизмом для $L \in \Lambda$-**Lat**, так как ${}_R L$ — прямое слагаемое свободного R-модуля. Следовательно, существует естественное вложение $L \hookrightarrow K \otimes_R L$, которое позволяет нам писать KL вместо $K \otimes_R L$. Для полной подкатегории $\mathcal{C}$ категории Λ-**Lat** идеал, порождённый тождественными морфизмами 1_C, $C \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, будем обозначать $[\mathcal{C}]$. Через $\operatorname{Add} \mathcal{C}$ обозначим полную подкатегорию категории Λ-**Lat**, состоящую из всех прямых слагаемых копроизведений $\coprod\limits_{i \in I} C_i$, где $C_i \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$. В частности, будем использовать обозначение Λ-$\mathbf{Proj} := \operatorname{Add}\{{}_\Lambda\Lambda\} \subset \Lambda$-**Lat** для полной подкатегории проективных Λ-модулей. Также рассмотрим полную подкатегорию Λ-$\mathbf{Inj} := \operatorname{Add}\{\Lambda^*\}$ всех *инъективных* обобщённых Λ-решёток, где $\Lambda^* := \operatorname{Hom}_R(\Lambda, R) \in \Lambda$-**lat**. (По [10, предложение 1] Λ-**Inj** состоит из всех инъективных объектов из Λ-**Lat** относительно коротких точных последовательностей в Λ-**Lat**.) Соответственно мы можем образовать фактор-категории

$$\Lambda\text{-}\underline{\mathbf{Lat}} := \Lambda\text{-}\mathbf{Lat}/[\Lambda\text{-}\mathbf{Proj}], \quad \Lambda\text{-}\overline{\mathbf{Lat}} := \Lambda\text{-}\mathbf{Lat}/[\Lambda\text{-}\mathbf{Inj}]. \tag{1}$$

Заметим, что гомоморфизм

$$f\colon \Lambda \to \Gamma \tag{2}$$

между R-порядками может рассматриваться как морфизм в Λ-**lat**. Если f является эпиморфизмом в Λ-**lat**, т. е. если Γ является надпорядком в $f(\Lambda)$, то Γ называется *обобщённым надпорядком* в Λ. В этом случае бимодуль ${}_\Lambda\Gamma_\Gamma$ приводит к сопряжённой паре функторов

$$\Gamma\text{-}\mathbf{Lat} \underset{\mathrm{Hom}_\Lambda(\Gamma,-)}{\overset{\Gamma\otimes_\Gamma -}{\rightleftarrows}} \Lambda\text{-}\mathbf{Lat}, \tag{3}$$

или, что то же самое, к естественному изоморфизму

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(L', L) \cong \mathrm{Hom}_\Gamma(L', \mathrm{Hom}_\Lambda(\Gamma, L)) \tag{4}$$

для $L \in \Lambda\text{-}\mathbf{Lat}$ и $L' \in \Gamma\text{-}\mathbf{Lat}$.

Предложение 1. *Пусть Γ — обобщённый надпорядок в Λ. Забывающий функтор $\Gamma\text{-}\mathbf{Lat} \to \Lambda\text{-}\mathbf{Lat}$ определяет точное полное вложение*

$$\Gamma\text{-}\mathbf{Lat} \hookrightarrow \Lambda\text{-}\mathbf{Lat}, \tag{5}$$

такое что каждая короткая точная последовательность $L' \rightarrowtail L \twoheadrightarrow L''$ в Λ-$\mathbf{Lat}$ с $L \in \Gamma\text{-}\mathbf{Lat}$ принадлежит Γ-$\mathbf{Lat}$.

Доказательство. Коединица (3) задаётся следующим образом:

$$\varepsilon_L\colon \Gamma \otimes_\Gamma \mathrm{Hom}_\Lambda(\Gamma, L) = \mathrm{Hom}_\Lambda(\Gamma, L) \to L, \tag{6}$$

где $L \in \Lambda\text{-}\mathbf{Lat}$ такая, что $g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\Gamma, L)$ отображается в $g(1) \in L$. Более того, ε_L является мономорфизмом L, так что $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Gamma, L)$ можно отождествить с наибольшим Γ-подмодулем L. Тогда из (4) следует, что забывающий функтор $\Gamma\text{-}\mathbf{Lat} \to \Lambda\text{-}\mathbf{Lat}$ точный. Теперь пусть $L' \rightarrowtail L \twoheadrightarrow L''$ является короткой точной последовательностью в Λ-$\mathbf{Lat}$, такой что $L \in \Gamma\text{-}\mathbf{Lat}$. Тогда мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_\Lambda(\Gamma, L') \arrow[r, tail] \arrow[d, hook] & \mathrm{Hom}_\Lambda(\Gamma, L) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_\Lambda(\Gamma, L'') \arrow[d, hook] \\
L' \arrow[r, tail] & L \arrow[r, two heads] & L''
\end{tikzcd}$$

с точными строками. Тогда правое вертикальное отображение обратимо и L'' и L' принадлежат Γ-$\mathbf{Lat}$. $\square$

Замечание 1. Категория Λ-$\mathbf{Lat}$ содержит ядра, но не каждый морфизм имеет коядро. Простейшим примером является свободное представление

$$\mathbb{Z}^{(I)} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^{(J)} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}^{\aleph_0}$$

группы Бэра—Шпекера $\mathbb{Z}^{\aleph_0}$. Здесь f не может иметь коядра в $\mathbb{Z}$-$\mathbf{Lat}$, в противном случае $\mathbb{Z}^{\aleph_0}$ должно содержать свободное прямое слагаемое ранга $\aleph_0$, что противоречит теореме Сасиады [1, предложение 94.2].

Замечание 2. Так как Λ-$\mathbf{Lat}$ имеет ядра, то идемпотенты расщепляются в Λ-$\mathbf{Lat}$. Отсюда каждое полное вложение (5) с R-порядками Λ и Γ сохраняет неразложимые объекты. Предложение 1 даёт более сильную версию этого факта.

Замечание 3. По построению функтор (5) из предложения 1 сохраняет рациональный ранг.

Рассмотрим конечно порождённый проективный правый Λ-модуль P. Тогда $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(P)$ является R-порядком и P становится бимодулем ${}_\Gamma P_\Lambda$. При $\hat{P} := \mathrm{Hom}_\Lambda(P, \Lambda)$ имеем

$$P \otimes_\Lambda L \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\hat{P}, \Lambda) \otimes_\Lambda L \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\hat{P}, L) \in \Gamma\text{-}\mathbf{Lat} \tag{7}$$

для всех $L \in \Lambda\text{-}\mathbf{Lat}$. Отсюда получаем сопряжение

$$\Lambda\text{-}\mathbf{Lat} \underset{\mathrm{Hom}_\Gamma(P,-)}{\overset{P\otimes_\Lambda -}{\rightleftarrows}} \Gamma\text{-}\mathbf{Lat}. \tag{8}$$

Предложение 2. *Пусть P — конечно порождённый проективный правый Λ-модуль и $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(P)$. Тогда функтор $H := \mathrm{Hom}_\Gamma(P, -)$ даёт полное вложение* (5)*, сохраняющее рациональный ранг больших Γ-решёток.*

Доказательство. По (7) имеем

$$P \otimes_\Lambda \mathrm{Hom}_\Gamma(P, L') \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\hat{P}, \mathrm{Hom}_\Gamma(P, L')) \cong$$
$$\cong \mathrm{Hom}_\Gamma(P \otimes_\Lambda \hat{P}, L') \cong \mathrm{Hom}_\Gamma(\Gamma, L') \cong L'$$

для каждого $L' \in \Gamma\text{-}\mathbf{Lat}$. Поэтому коединица $\varepsilon\colon TH \to 1$ сопряжения (8), где $T := P \otimes_\Lambda -$, обратима. Отсюда функтор $H\colon \Gamma\text{-}\mathbf{Lat} \to \Lambda\text{-}\mathbf{Lat}$ является точным по [7, IV.3, теорема 1]. Пусть L' — большая Γ-решётка. Вложения $HL' \subset \mathrm{Hom}_R(P, L')$ и $L' \cong THL' \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\hat{P}, HL') \subset \mathrm{Hom}_R(\hat{P}, HL')$ влекут $\rho(HL') = \rho(L')$. □

Замечание 4. Функтор $P \otimes_\Lambda -$ в (8) также имеет левый сопряжённый

$$\hat{P} \otimes_\Gamma -\colon \Gamma\text{-}\mathbf{Mod} \to \Lambda\text{-}\mathbf{Mod}.$$

Но это не годится для наших целей, так как $\hat{P} \otimes_\Gamma L'$ не обязательно обобщённая Λ-решётка, если $L' \in \Gamma\text{-}\mathbf{Lat}$. Например, рассмотрим R-порядок

$$\Lambda = \begin{pmatrix} R & 0 & 0 & 0 \\ R & R & 0 & 0 \\ R & 0 & R & 0 \\ R & R & R & R \end{pmatrix}.$$

Строки этого матричного порядка соответствуют неразложимым проективным правым Λ-модулям P_1, P_2, P_3, P_4. Соответственно, Λ можно изобразить графом

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr] & \\ 1 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & 4 \\ & 3 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

с коммутативными отношениями. Если мы возьмём $P := P_1 \oplus P_2 \oplus P_3$, то

$$\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(P) = \begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ R & R & 0 \\ R & 0 & R \end{pmatrix}.$$

По [11, пример 4] существуют обобщённые R-решётки L_1 и L_2, для которых $KL_1 = KL_2 =: X \in K$-**Mod** и $L_1 + L_2 = X$, если R — любое полное дискретное нормированное кольцо с полем частных K. Тогда

$$L' := \begin{pmatrix} L_1 \cap L_2 \\ L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \in \Gamma\text{-}\mathbf{Lat}, \quad \hat{P} \otimes_\Gamma L' = \begin{pmatrix} L_1 \cap L_2 \\ L_1 \\ L_2 \\ L_1 + L_2 \end{pmatrix} \notin \Lambda\text{-}\mathbf{Lat}.$$

2. Два специальных класса R-порядков

В этом разделе мы предполагаем, что Λ — максимальный R-порядок в A. Напомним, что *группа Пикара* [6, § 55] $\mathrm{Pic}(\Lambda)$ состоит из пропорождающих $P \in \Lambda$-**lat**, где $\mathrm{End}_\Lambda(P)^{\mathrm{op}} = \Lambda$. Групповая операция задаётся тензорным произведением $\otimes_\Lambda$. Для любого $P \in \mathrm{Pic}(\Lambda)$ имеем $\mathrm{End}_{K\Lambda}(KP)^{\mathrm{op}} = K\Lambda = A$, и A — полупростая K-алгебра, так как порядок Λ максимальный. Таким образом, KP можно получить из бимодуля ${}_AA_A$, сочетая правое умножение с некоторым K-автоморфизмом α.

Каждому $N \in \mathrm{Pic}(\Lambda)$ сопоставим два R-порядка:

$$\Lambda[N] := \Lambda \oplus N, \quad \mathrm{T}(\Lambda, N) := \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ N & \Lambda \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $N^2 = 0$ в первом случае. Таким образом, $\Lambda[N]$ — R-порядок в полупростой K-алгебре $A \oplus A\varepsilon$, где $\varepsilon^2 = 0$ и умножение задаётся правилом $\varepsilon a = \alpha(a)\varepsilon$ для $a \in A$ и некоторого фиксированного $\alpha \in \mathrm{Aut}_K(A)$. Аналогично, $\mathrm{T}(\Lambda, N)$ — R-порядок в алгебре треугольных матриц $\mathrm{T}_2(A)$. Более того, имеем естественное вложение

$$\Lambda[N] \cong \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ N & \Lambda \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ N & \Lambda \end{pmatrix} = \mathrm{T}(\Lambda, N), \tag{10}$$

где Λ–Λ обозначает диагональ $\Lambda \times \Lambda$. Хотя $\mathrm{T}(\Lambda, N)$ не обобщённый надпорядок в $\Lambda[N]$, будет полезно применить сопряжение (3). Имеет место изоморфизм $\Lambda[N]$-решёток $\mathrm{T}(\Lambda, N)$ и $\binom{\Lambda}{N} \oplus \binom{0}{\Lambda} \cong \Lambda[N] \oplus \Lambda$. Следовательно, если $L \in \Lambda[N]$-**Lat**, то

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda[N]}(\mathrm{T}(\Lambda, N), L) \cong L \oplus [N]L, \tag{11}$$

где $[N]L := \{x \in L \mid Nx = 0\}$. Здесь умножение в $L \oplus [N]L$ на элементы N задаётся посредством

$$N \otimes_\Lambda L \to [N]L. \tag{12}$$

Вообще, каждый объект L' из $\mathrm{T}(\Lambda, N)$-$\mathbf{Lat}$ имеет вид $L' = L_0 \oplus L_1$, где $L_0, L_1 \in \Lambda$-$\mathbf{Lat}$, и умножение на элементы N задаётся Λ-линейным отображением

$$m\colon N \otimes_\Lambda L_1 \to L_0. \tag{13}$$

Теперь мы можем отождествить L' с гомоморфизмом (13). Поскольку N — пропорождающая, ядро m может быть записано в виде $N \otimes_\Lambda L_1'$, где $L_1' \subset L_1$. Аналогично можем предположить, что $\operatorname{Im} m = N \otimes_\Lambda L_1''$. Таким образом, получаем расщепляющуюся короткую точную последовательность

$$\begin{tikzcd} N \otimes_\Lambda L_1' \arrow[r, tail] \arrow[d] & N \otimes_\Lambda L_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "m"] & N \otimes_\Lambda L_1'' \arrow[d, hook] \\ 0 \arrow[r] & L_0 \arrow[r, equal] & L_0 \end{tikzcd}$$

в $\mathrm{T}(\Lambda, N)$-$\mathbf{Lat}$. Другими словами, мы получили расщепляющую теорию кручения

$$(\mathcal{T}, \mathrm{T}(\Lambda, N)\text{-}\mathbf{Lat}_0) \tag{14}$$

в $\mathrm{T}(\Lambda, N)$-$\mathbf{Lat}$, где класс без кручения $\mathrm{T}(\Lambda, N)$-$\mathbf{Lat}_0$ состоит из всех объектов (13), где m — мономорфизм, и $\mathcal{T}$ состоит из объектов (13) с $L_0 = 0$. Заметим, что объекты $\mathrm{T}(\Lambda, N)$-$\mathbf{Lat}_0$ — пары обобщённых Λ-решёток L_0, L_1, таких что L_1 — подмодуль L_0. Для таких пар соответствующий гомоморфизм (13) задаётся посредством

$$N \otimes_\Lambda \operatorname{Hom}_\Lambda(N, L_1) \cong L_1 \hookrightarrow L_0.$$

Лемма 1. *Для любой обобщённой $\Lambda[N]$-решётки L существует короткая точная последовательность*

$$[N]L \hookrightarrow L \overset{q}{\twoheadrightarrow} \operatorname{Hom}_\Lambda(N, NL) \tag{15}$$

в $\Lambda[N]$-$\mathbf{Lat}$, такая что $q(x)(b) = bx$ для $x \in L$ и $b \in N$.

Доказательство. Имеем $\operatorname{Ker} q = [N]L$. Рассмотрим естественную сюръекцию $p\colon N \otimes_\Lambda L \twoheadrightarrow NL$. Так как N — пропорождающая, p индуцирует сюръекцию $L \cong \operatorname{Hom}_\Lambda(N, N \otimes_\Lambda L) \twoheadrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(N, NL)$, которая совпадает с q. $\square$

Для $L \in \Lambda[N]$-$\mathbf{Lat}$ пусть HL — часть без кручения обобщённой $\mathrm{T}(\Lambda, N)$-решётки (11) относительно (14). Тогда получаем аддитивный функтор

$$H\colon \Lambda[N]\text{-}\mathbf{Lat} \to \mathrm{T}(\Lambda, N)\text{-}\mathbf{Lat}_0, \tag{16}$$

и HL задаётся Λ-линейным отображением

$$N \otimes_\Lambda \operatorname{Hom}_\Lambda(N, NL) \cong NL \hookrightarrow [N]L. \tag{17}$$

Обратно, забывающий функтор $\mathrm{T}(\Lambda, N)$-$\mathbf{Lat} \to \Lambda[N]$-$\mathbf{Lat}$ вместе с вложением $\mathrm{T}(\Lambda, N)$-$\mathbf{Lat}_0 \hookrightarrow \mathrm{T}(\Lambda, N)$-$\mathbf{Lat}$ даёт функтор

$$F\colon \mathrm{T}(\Lambda, N)\text{-}\mathbf{Lat}_0 \to \Lambda[N]\text{-}\mathbf{Lat}, \tag{18}$$

который отображает объект (13) из $\mathrm{T}(\Lambda, N)$-$\mathbf{Lat}_0$ в $L_0 \oplus L_1 \in \Lambda[N]$-$\mathbf{Lat}$, где операция N задаётся (13). По лемме 1 имеем

$$FHL \cong L \tag{19}$$

для каждого объекта $L \in \Lambda[N]$-$\mathbf{Lat}$. Однако из этого не следует, что $FH \cong 1$. Лемма 1 показывает, что любой морфизм $f\colon L \to L'$ в $\Lambda[N]$-$\mathbf{Lat}$ приводит к коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
{[N]L} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_0"] & L \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[d, "f"] & \mathrm{Hom}_\Lambda(N, NL) \arrow[d, "f_1"] \\
{[N]L'} \arrow[r, hook] & L' \arrow[r, two heads, "q"] & \mathrm{Hom}_\Lambda(N, NL')
\end{tikzcd} \tag{20}$$

в Λ-$\mathbf{Lat}$. Поэтому определим функтор

$$\mathrm{Gr}\colon \Lambda[N]\text{-}\mathbf{Lat} \to \Lambda[N]\text{-}\mathbf{Lat}_{\mathrm{gr}}, \tag{21}$$

который отображает L на ассоциативный градуированный объект $\mathrm{Gr}\, L := L_0 \oplus L_1$, где $L_0 := [N]L$ и $L_1 := \mathrm{Hom}_\Lambda(N, NL)$, такой что $\mathrm{Gr}(f) := f_0 \oplus f_1$. Функторы (16), (18) и (21) связаны.

Предложение 3. *Пусть Λ — максимальный R-порядок и $N \in \mathrm{Pic}(\Lambda)$.*

1. *Функтор H полон, плотен и эквивалентен* Gr. *В частности,*

$$\Lambda[N]\text{-}\mathbf{Lat}_{\mathrm{gr}} \approx \mathrm{T}(\Lambda, N)\text{-}\mathbf{Lat}_0. \tag{22}$$

2. *Функтор F строгий и плотный, $HF \cong 1$.*

Доказательство. Любой объект (13) из $\mathrm{T}(\Lambda, N)$-$\mathbf{Lat}_0$ даёт с помощью F градуированный объект $L = L_0 \oplus L_1$ из $\Lambda[N]$-$\mathbf{Lat}$, такой что $L_0 = [N]L$ и $L_1 = \mathrm{Hom}_\Lambda(N, NL)$. Отсюда $HF \cong 1$. Вместе с (19) это доказывает утверждения 1 и 2. □

Замечание 5. Предложение 3 показывает, что $\Lambda[N]$-$\mathbf{Lat}_{\mathrm{gr}}$ может рассматриваться как подкатегория $\Lambda[N]$-$\mathbf{Lat}$ посредством F и как фактор-категория $\Lambda[N]$-$\mathbf{Lat}$ посредством H. Идеал морфизмов $f \in \Lambda[N]$-$\mathbf{Lat}$ с $Hf = 0$ состоит из морфизмов $f\colon L \to L'$, которые пропускаются через отображение q в (20).

Лемма 2. *Пусть Γ — R-порядком в K-алгебре конечной размерности, и пусть Λ — максимальный подпорядок, т. е. R-подалгебра алгебры Γ, являющаяся максимальным порядком в $K\Lambda$. Тогда Γ-$\mathbf{Inj} = \mathrm{Add}\{\mathrm{Hom}_\Lambda(\Gamma, \Lambda)\}$.*

Доказательство. Пусть $L_1 \rightarrowtail L_2 \twoheadrightarrow L_3$ — короткая точная последовательность в Γ-$\mathbf{Lat}$. Рассмотрим Γ-линейное отображение $f\colon L_1 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\Gamma, \Lambda)$. По hom-тензорному сопряжению f — сопряжение к Λ-линейному отображению $f'\colon L_1 \to \Lambda$. Так как $L_3 \in \Lambda$-$\mathbf{Proj}$ по [12, предложение 11], мы заключаем, что f' пропускается через $L_1 \rightarrowtail L_2$ в Λ-$\mathbf{Lat}$. Следовательно, f пропускается через $L_1 \rightarrowtail L_2$ в Γ-$\mathbf{Lat}$. Отсюда $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Gamma, \Lambda) \in \Gamma$-$\mathbf{Inj}$. Обратно, пусть задано $I \in \Gamma$-$\mathbf{Inj}$. Тогда Γ-линейное отображение $e\colon I \cong \mathrm{Hom}_\Gamma(\Gamma, I) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\Gamma, I)$

допускает Λ-линейную ретракцию $f \mapsto f(1)$. Отсюда e — расщепляющийся мономорфизм Γ-**Lat**, и изоморфизм $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Gamma, I) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\Gamma, \Lambda) \otimes_\Lambda I$ завершает доказательство. □

Предложение 4. *Пусть Λ — максимальный R-порядок и $N \in \mathrm{Pic}(\Lambda)$. Для обобщённой $\Lambda[N]$-решётки L следующие утверждения эквивалентны.*

1. $L \in \Lambda[N]$-$\mathbf{Proj}$.
2. $L \in \Lambda[N]$-$\mathbf{Inj}$.
3. $NL = [N]L$.

Доказательство. Естественная проекция $r\colon \Lambda[N] = \Lambda \oplus N \twoheadrightarrow N$ приводит к отображению между (Λ, Λ)-бимодулями

$$\beta\colon \Lambda[N] \otimes_{\Lambda[N]} \Lambda[N] \to N, \tag{23}$$

где $\beta(c, c') := r(cc')$. Сначала покажем, что сопряжённое отображение

$$\beta'\colon \Lambda[N] \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda[N], N) \tag{24}$$

является изоморфизмом $\Lambda[N]$-решёток. Для $c \in \mathrm{Ker}\,\beta'$ имеем $r(\Lambda[N] \cdot c) = 0$. Отсюда $Nc = r(Nc) = 0$. Так как N_Λ точный, это даёт $c \in N$, откуда $c = r(c) = 0$. Таким образом, β' инъективно. Пусть дано $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda[N], N)$. Тогда $f(1) \in N$, и ограничение $f|_N \in \mathrm{Hom}_\Lambda(N, N) \cong \Lambda$ задаётся элементом $a \in \Lambda$. Следовательно, $\beta'(a+f(1))(c) = r(ca+cf(1)) = r(c)a+cf(1) = f(r(c))+f(c-r(c)) = f(c)$ для всех $c \in \Lambda[N]$. Итак, мы доказали, что имеет место изоморфизм $\Lambda[N]$-решёток.

$$\Lambda[N] \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda[N], N). \tag{25}$$

Так как ${}_\Lambda N$ — пропорождающая, то $\Lambda[N]$-$\mathbf{Proj}$ = $\Lambda[N]$-$\mathbf{Inj}$ по лемме 2. Теперь равенство $NL = [N]L$ имеет место для $L = \Lambda[N]$, следовательно, для любого $L \in \Lambda[N]$-$\mathbf{Proj}$. Осталось показать, что из утверждения 3 следует утверждение 1. Пусть дано $L \in \Lambda[N]$-$\mathbf{Lat}$. Тогда отображение q в (15) допускает сужение j в Λ-$\mathbf{Lat}$, которое индуцирует $\Lambda[N]$-линейное отображение

$$j_*\colon \Lambda[N] \otimes_\Lambda \mathrm{Hom}_\Lambda(N, NL) \to L. \tag{26}$$

Так как $\Lambda[N] = \Lambda \oplus N$, область этого отображения допускает разложение

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(N, NL) \oplus (N \otimes_\Lambda \mathrm{Hom}_\Lambda(N, NL)),$$

которое отображается на $\mathrm{Im}\, j \oplus NL$. Следовательно, j_* инъективно. Поэтому из условия 3 следует, что j_* — изоморфизм, т. е. L проективно. □

Теперь посмотрим на устойчивые категории. Через $\Lambda[N]$-$\underline{\mathbf{Lat}}_{\mathrm{gr}}$ обозначим фактор-категорию $\Lambda[N]$-$\mathbf{Lat}_{\mathrm{gr}}$ по модулю морфизмов, которые пропускаются через некоторый $P \in \Lambda[N]$-$\mathbf{Proj}$. Другими словами, $\Lambda[N]$-$\underline{\mathbf{Lat}}_{\mathrm{gr}}$ получается путём факторизации идеалов $[\Lambda[N]$-$\mathbf{Proj}]$ и $\mathrm{Ker}\, H := \{f \in \Lambda[N]\text{-}\mathbf{Lat} \mid Hf = 0\}$. Следующая теорема показывает тесную связь между обобщёнными $\Lambda[N]$- или $\mathrm{T}(\Lambda, N)$-решётками и произвольными Λ-модулями.

Теорема 1. *Пусть Λ — максимальный R-порядок и $N \in \mathrm{Pic}(\Lambda)$. Тогда*
$$\Lambda[N]\text{-}\underline{\mathbf{Lat}}_{\mathrm{gr}} \approx \mathrm{T}(\Lambda, N)\text{-}\overline{\mathbf{Lat}} \approx \Lambda\text{-}\mathbf{Mod}. \tag{27}$$

Доказательство. Так как $\mathrm{T}(\Lambda, N)\text{-}\mathbf{Lat}_0$ — класс без кручения расщепляющей теории кручения (14), имеем
$$\mathrm{T}(\Lambda, N)\text{-}\mathbf{Lat}_0 \approx \mathrm{T}(\Lambda, N)\text{-}\mathbf{Lat}/[\mathcal{T}].$$
Рассмотрим разложение $\mathrm{T}(\Lambda, N)_{\mathrm{T}(\Lambda,N)} = Q_1 \oplus Q_2$, где $Q_1 := (\Lambda\ 0)$ и $Q_2 := (N\ \Lambda)$. Тогда из леммы 2 следует, что $\mathrm{T}(\Lambda, N)\text{-}\mathbf{Inj} = \mathrm{Add}\{I_1, I_2\}$ для инъективных $\mathrm{T}(\Lambda, N)$-решёток $I_i := \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_i, \Lambda)$, $i \in \{1, 2\}$. Теперь первая эквивалентность в (27) следует из (22) и леммы 2, так как $\mathcal{T} = \mathrm{Add}\{I_1\}$ и ${}_{\Lambda[N]}I_2 = \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda[N], \Lambda)$.

Для завершения доказательства рассмотрим эквивалентность (22), которая показывает, что $\Lambda[N]\text{-}\mathbf{Lat}_{\mathrm{gr}}$ эквивалентна категории $\mathcal{M}$ с мономорфизмами $p\colon P_1 \hookrightarrow P_0$ в $\Lambda\text{-}\mathbf{Proj}$ в качестве объектов и коммутативными квадратами
$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{f_1} & Q_1 \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ P_0 & \xrightarrow{f_0} & Q_0 \end{array} \tag{28}$$
к качестве морфизмов. Любой такой объект $p\colon P_1 \hookrightarrow P_0$ отвечает объекту $L = P_0 \oplus \mathrm{Hom}_\Lambda(N, P_1) \in \Lambda[N]\text{-}\mathbf{Lat}$, где умножение на элементы N задаётся отображением
$$N \otimes_\Lambda \mathrm{Hom}_\Lambda(N, P_1) \cong P_1 \hookrightarrow P_0.$$
Таким образом, $[N]L = P_0$ и $NL = P_1$. По предложению 4 $\Lambda[N]\text{-}\underline{\mathbf{Lat}}_{\mathrm{gr}}$ эквивалентна гомотопической категории $\underline{\mathcal{M}}$ категории $\mathcal{M}$, т. е. фактор-категории $\mathcal{M}$ по модулю морфизмов (28), допускающих некоторое $h\colon P_0 \to Q_1$ в $\Lambda\text{-}\mathbf{Proj}$, такое что $f_0 = qh$ (и также $f_1 = hp$). Теперь функтор $\underline{\mathcal{M}} \to \Lambda\text{-}\mathbf{Mod}$, отображающий объект $p\colon P_1 \hookrightarrow P_0$ в $\mathrm{Cok}\, p$, является эквивалентностью. □

Замечание 6. Эквивалентность (27) индуцируется функтором
$$\Lambda[N]\text{-}\mathbf{Lat} \to \Lambda\text{-}\mathbf{Mod}, \tag{29}$$
который отображает обобщённую Λ-решётку L в фактор-модуль $[N]L/NL$. Таким образом, $\Lambda\text{-}\mathbf{Mod}$ эквивалентна фактор-категории $\Lambda[N]\text{-}\mathbf{Lat}$ по модулю идеала $\mathcal{P}$ морфизмов $L \to L'$, которые отображают $[N]L$ в NL'.

Предупреждение. Предложение 4 приводит к естественному вопросу, совпадает ли идеал $\mathcal{P}$ с идеалом $[\Lambda[N]\text{-}\mathbf{Proj}]$, порождённым такими объектами P, что $[N]P = NP$. Однако отображение q из (15) принадлежит $\mathcal{P}$, и следующее предложение показывает, что $\mathcal{P}$ не может быть порождён этими объектами.

Предложение 5. *Пусть Λ — максимальный R-порядок и $N \in \mathrm{Pic}(\Lambda)$. Для обобщённой $\Lambda[N]$-решётки L предположим, что отображение q из* (15) *принадлежит идеалу $[\Lambda[N]\text{-}\mathbf{Proj}]$. Тогда $L \cong L' \oplus P$, где $NL' = 0$ и $P \in \Lambda[N]\text{-}\mathbf{Proj}$.*

Доказательство. Предположим, что q допускает факторизацию

$$q\colon L \xrightarrow{f} \Lambda^{(I)} \xrightarrow{g} \operatorname{Hom}_\Lambda(N, NL)$$

в $\Lambda[N]$-**Lat**. Тензорное произведение с N приводит к коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} N \otimes_\Lambda L \arrow[r, two heads, "m"] \arrow[d, "1\otimes f"] & NL \\ N \otimes_\Lambda \Lambda^{(I)} \arrow[r, phantom, "\cong"] & N^{(I)} \arrow[u, "g'"'] \end{tikzcd}$$

в Λ-**Lat**, такой что $bx = m(b \otimes x) = g'(bf(x)) = g'f(bx)$ для любых $b \in N$ и $x \in L$. Следовательно, ограничение $f'\colon NL \to N^{(I)}$ отображения f на NL удовлетворяет соотношению $g'f' = 1$. Более того, Λ-линейное отображение j из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] & \Lambda^{(I)} \\ NL \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "f'"] & N^{(I)} \arrow[u, hook, "j"'] \end{tikzcd}$$

является расщепляющимся мономорфизмом. Следовательно, f' пропускается через i, из чего следует, что i — расщепляющийся мономорфизм в Λ-**Lat**. Таким образом, получаем разложение $L = NL \oplus L' \oplus C$ в Λ-**Lat**, где $NL \oplus L' = [N]L$. Следовательно, L раскладывается на $NL \oplus C \in \Lambda[N]$-**Proj** и $L' \in \Lambda[N]$-**Lat** и $NL' = 0$. □

Замечание 7. В частности, предложение 5 показывает, что $\Lambda[N]$-$\underline{\mathbf{Lat}}_{\mathrm{gr}}$ в (27) нельзя заменить на $\Lambda[N]$-$\underline{\mathbf{Lat}}$ ($\approx \Lambda[N]$-$\overline{\mathbf{Lat}}$ по предложению 4). Тем не менее первая эквивалентность в (27) в некотором смысле подобна устойчивой эквивалентности. Как показывает доказательство теоремы 1, идеал $\operatorname{Ker} H$, делающий необходимым «gr», идёт от тех инъективных $\mathrm{T}(\Lambda, N)$-решёток, которые не являются $\Lambda[N]$-решётками.

Замечание 8. R-порядок $\mathrm{T}(\Lambda, N)$ эквивалентен в смысле Мориты $\mathrm{T}(\Lambda, \Lambda)$ посредством пропорождающей $\left(\begin{smallmatrix} \Lambda & 0 \\ N & N \end{smallmatrix}\right)$, в то время как $\Lambda[N]$ не может быть упрощено с помощью Морита-эквивалентности. Поэтому теорема 1 предлагает некоторый род стационарной эквивалентности между порядками $\Lambda[N]$, которые не могут быть сведены к Морита-эквивалентности.

3. Основной результат

В качестве следующего шага к общим порядкам рассмотрим R-порядки вида

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ N & \Delta \end{pmatrix}, \tag{30}$$

где Δ, Ω — R-порядки, и (Δ, Ω)-бимодуль N, такой что ${}_\Delta N$ — пропорождающая.

Предложение 6. *Пусть* Λ — R*-порядок вида* (30) *с максимальным порядком* Δ. *Тогда существует вложение*

$$\Delta[\Delta]\text{-}\mathbf{Lat}_{\mathrm{gr}} \hookrightarrow \Lambda\text{-}\mathbf{Lat}, \tag{31}$$

сохраняющее рациональный ранг больших $\Delta[\Delta]$*-решёток.*

Доказательство. По (22) мы можем рассматривать объекты из $\Delta[\Delta]\text{-}\mathbf{Lat}_{\mathrm{gr}}$ как мономорфизмы $i\colon L_1 \hookrightarrow L_0$ в $\Delta\text{-}\mathbf{Lat}$. Соответственно морфизмы — это коммутативные квадраты

$$\begin{array}{ccc} L_1 & \xrightarrow{f_1} & L_1' \\ \Big\downarrow{\scriptstyle i} & & \Big\downarrow{\scriptstyle i'} \\ L_0 & \xrightarrow{f_0} & L_0'. \end{array} \tag{32}$$

Теперь определим аддитивный функтор

$$F\colon \Delta[\Delta]\text{-}\mathbf{Lat}_{\mathrm{gr}} \to \Lambda\text{-}\mathbf{Lat}. \tag{33}$$

Для данного объекта $i\colon L_1 \hookrightarrow L_0$ из $\Delta[\Delta]\text{-}\mathbf{Lat}_{\mathrm{gr}}$ положим $L_2 := \mathrm{Hom}_\Delta(N, L_1)$. Тогда $L_2 \in \Gamma\text{-}\mathbf{Lat}$, где $\Gamma := \mathrm{End}_\Delta(N)^{\mathrm{op}}$. Определим $F(i)$ как Λ-решётку $\binom{L_2}{L_0}$ с умножением на элементы N, задаваемым отображением

$$N \otimes_\Omega L_2 \twoheadrightarrow N \otimes_\Gamma L_2 \cong L_1 \hookrightarrow L_0.$$

Для морфизма $f\colon i \to i'$ из (32) и $F(i') = \binom{L_2'}{L_0'}$ определим $F(f)$ посредством коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} N \otimes_\Omega L_2 & \twoheadrightarrow & N \otimes_\Gamma L_2 \cong L_1 & \xrightarrow{i} & L_0 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle 1\otimes f_2} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_0} \\ N \otimes_\Omega L_2' & \twoheadrightarrow & N \otimes_\Gamma L_2' \cong L_1' & \xrightarrow{i'} & L_0' \end{array}\quad , \tag{34}$$

где $f_2\colon L_2 \to L_2'$ получается из f_1 применением функтора $\mathrm{Hom}_\Delta(N, -)$. Обратно, пусть $F(i) \to F(i')$ — морфизм, задаваемый парой (f_0, f_2) Δ-линейных отображений и коммутативной диаграммой (34) без f_1. Тогда существует единственное Δ-линейное отображение f_1, которое разбивает большой коммутативный квадрат (34) на два меньших. Это показывает, что функтор (33) полный и точный. По построению F сохраняет рациональный ранг больших $\Delta[\Delta]$-решёток. □

Замечание 9. R-порядок (30) является подкольцом R-порядка $\Lambda' := \left(\begin{smallmatrix} \Gamma & 0 \\ N & \Delta \end{smallmatrix}\right)$, который Морита-эквивалентен $\mathrm{T}(\Delta, \Delta)$ с помощью пропорождающей $\left(\begin{smallmatrix} N & 0 \\ N & \Delta \end{smallmatrix}\right)$. Точно так же полная подкатегория $\mathrm{T}(\Delta,\Delta)\text{-}\mathbf{Lat}_0$ категории $\mathrm{T}(\Delta,\Delta)\text{-}\mathbf{Lat}$ соответствует полной подкатегории $\Lambda'\text{-}\mathbf{Lat}_0$ категории $\Lambda'\text{-}\mathbf{Lat}$. Предыдущее доказательство показывает, что забывающий функтор $\Lambda'\text{-}\mathbf{Lat} \to \Lambda\text{-}\mathbf{Lat}$ сужается до полного вложения $\Lambda'\text{-}\mathbf{Lat}_0 \hookrightarrow \Lambda\text{-}\mathbf{Lat}$.

Аналогичным образом рассмотрим обобщённый R-порядок $\Delta[N] := \Delta \oplus N$ для R-порядка Δ и произвольный (Δ,Δ)-бимодуль $N \in \Delta\text{-}\mathbf{lat}$ с $N^2 = 0$. Тогда каждый элемент $L \in \Delta[N]$-$\mathbf{Lat}$ приводит к точной последовательности

$$[N]L \hookrightarrow L \to \mathrm{Hom}_\Delta(N, NL). \tag{35}$$

Предложение 7. *Пусть Δ — максимальный R-порядок, и пусть N — такой (Δ, Δ)-бимодуль, что ${}_\Delta N$ является пропорождающей. Тогда $\Delta[\Delta]$-$\mathbf{Lat}_{\mathrm{gr}}$ эквивалентна фактор-категории полной подкатегории $\Delta[N]$-$\mathbf{Lat}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — полная подкатегория всех объектов L из $\Delta[N]$-$\mathbf{Lat}$, таких что последовательность (35) является короткой точной последовательностью. Любой морфизм $f \in \mathrm{Hom}_\mathcal{A}(L, L')$ индуцирует коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} NL \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_2"] & {[N]L} \arrow[d, "f_0"] \\ NL' \arrow[r, hook] & {[N]L'}. \end{tikzcd} \tag{36}$$

Поэтому получаем аддитивный функтор

$$F\colon \mathcal{A} \to \mathrm{T}(\Delta, \Delta)\text{-}\mathbf{Lat}_0, \tag{37}$$

который отображает L в объект $NL \hookrightarrow [N]L$. По предложению 3 остаётся показать, что F полный и плотный. Положим $\Gamma := \mathrm{End}_\Delta(N)^{\mathrm{op}}$. Для данного объекта $L_1 \hookrightarrow L_0$ из $\mathrm{T}(\Delta, \Delta)$-$\mathbf{Lat}_0$ определим $L := L_0 \oplus \mathrm{Hom}_\Delta(N, L_1) \in \Delta[N]$-$\mathbf{Lat}$, где умножение на элементы N задаётся путём $NL_0 = 0$ и

$$N \otimes_\Delta \mathrm{Hom}_\Delta(N, L_1) \twoheadrightarrow N \otimes_\Gamma \mathrm{Hom}_\Delta(N, L_1) \cong L_1 \hookrightarrow L_0.$$

Тогда $NL = L_1$ и $[N]L = L_0$. Более того, последовательность (35) является короткой точной последовательностью. Тогда L принадлежит $\mathcal{A}$ и L отображается в $L_1 \hookrightarrow L_0$ посредством F. Чтобы показать, что F полный, будем считать, что заданы $L, L' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Из того что Δ наследственное, следует, что любой коммутативный квадрат (36) в Δ-$\mathbf{Lat}$ может быть дополнен до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} {[N]L} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_0"] & L \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[d, "f"] & \mathrm{Hom}_\Delta(N, NL) \arrow[d, "f_1"] \\ {[N]L'} \arrow[r, hook] & L' \arrow[r, two heads, "q'"] & \mathrm{Hom}_\Delta(N, NL') \end{tikzcd} \tag{38}$$

в Δ-$\mathbf{Lat}$, где $f_1 := \mathrm{Hom}_\Delta(N, f_2)$. Для $x \in L$ и $b \in N$ имеем

$$f(bx) = f_2(bx) = f_2(q(x)(b)) = f_1(q(x))(b) = q'(f(x))(b) = bf(x).$$

Отсюда следует, что F полный. □

Теорема 2. *Пусть Λ — R-порядок в неполупростой K-алгебре A, такой что $A/\operatorname{Rad} A$ сепарабельно над K.*

1. *Если A эквивалентна в смысле Мориты произведению локальных K-алгебр, то существуют максимальный R-порядок Δ в теле, R-порядок $\Delta[N]$ с $N \neq 0$ и полное вложение*
$$\Delta[N]\text{-}\mathbf{Lat} \hookrightarrow \Lambda\text{-}\mathbf{Lat}. \tag{39}$$
2. *Если A не эквивалентна в смысле Мориты произведению локальных K-алгебр, то существуют максимальный R-порядок Δ в теле и полное вложение*
$$\Delta[\Delta]\text{-}\mathbf{Lat}_{\mathrm{gr}} \hookrightarrow \Lambda\text{-}\mathbf{Lat}. \tag{40}$$

Более того, вложения (39) *и* (40) *сохраняют рациональный ранг больших решёток.*

Доказательство. Во-первых, существует обобщённый надпорядок из Λ в $A/\operatorname{Rad}^2 A$. Поэтому по предложению 1 мы можем предположить, что $\operatorname{Rad}^2 A = 0$. Так как $A/\operatorname{Rad} A$ сепарабельно, то по теореме Веддербёрна—Мальцева имеем, что существует подалгебра A_0 в A, для которой выполнено $A = A_0 \oplus \operatorname{Rad} A$. По [10, предложение 5] существуют максимальный порядок Λ_0 в A_0 и (Λ_0, Λ_0)-бимодуль N_0 с $KN_0 = \operatorname{Rad} A$, такие что $\Lambda_0 \oplus N_0$ — надпорядок в Λ. По предложению 1 можно предполагать, что $\Lambda = \Lambda_0 \oplus N_0$. Здесь возможны два случая.

Случай 1. Алгебра A эквивалентна в смысле Мориты произведению локальных K-алгебр. Так как $N_0 \neq 0$, должна существовать неразложимая проективная правая Λ-решётка P, такая что $\Gamma := \operatorname{End}_\Lambda(P)$ является R-порядком в неполупростой локальной K-алгебре B, для которой выполнено соотношение $\operatorname{Rad}^2 B = 0$. Тогда предложение 2 даёт полное вложение $\Gamma\text{-}\mathbf{Lat} \hookrightarrow \Lambda\text{-}\mathbf{Lat}$, сохраняющее рациональный ранг больших Γ-решёток. Более того, Γ имеет вид $\Gamma \cong \Delta[N]$ с максимальным порядком Δ в теле $B/\operatorname{Rad} B$. Это доказывает случай 1.

Случай 2. Алгебра A не эквивалентна в смысле Мориты произведению локальных K-алгебр. Тогда существуют две неразложимые проективные правые Λ-решётки P и Q, для которых $N := \operatorname{Hom}_\Lambda(P, QN_0) \neq 0$. Тогда
$$\Gamma := \operatorname{End}_\Lambda(P \oplus Q) = \begin{pmatrix} \Omega & N' \\ N & \Delta \end{pmatrix} \text{ —}$$
R-порядок в неполупростой K-алгебре B, такой что
$$\Gamma \cap \operatorname{Rad} B = \begin{pmatrix} 0 & N' \\ N & 0 \end{pmatrix}.$$
В частности, $NN' = N'N = 0$. Следовательно, $I := \left(\begin{smallmatrix} 0 & N' \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ — идеал в Γ и $\Gamma' := \Gamma/I$ — обобщённый надпорядок (30) в Γ. Тогда предложения 1 и 2 дают полное вложение $\Gamma'\text{-}\mathbf{Lat} \hookrightarrow \Lambda\text{-}\mathbf{Lat}$, сохраняющее рациональный ранг больших Γ'-решёток. Так как ${}_\Delta N$ — пропорождающая, предложение 6 даёт полное вложение
$$\Delta[\Delta]\text{-}\mathbf{Lat}_{\mathrm{gr}} \hookrightarrow \Gamma'\text{-}\mathbf{Lat},$$
что завершает доказательство. □

В качестве следствия теорема 2 даёт отношение между категориями обобщённых Λ-решёток и модульной категорией.

Следствие. *Пусть* Λ — R*-порядок в неполупростой* K*-алгебре* A*, такой что* $A/\operatorname{Rad} A$ *сепарабельно над* K*. Тогда существует максимальный* R*-порядок* Δ *в теле, такой что* Δ-$\mathbf{Mod}$ *является фактор-категорией всех полных подкатегорий* Λ-$\mathbf{Lat}$.

Доказательство. По теореме 2 и предложению 7 существует максимальный R-порядок Δ в теле, такой что $\Delta[\Delta]$-$\mathbf{Lat}_{\mathrm{gr}}$ является фактор-категорией всех полных подкатегорий Λ-$\mathbf{Lat}$. Теперь утверждение следует из теоремы 1. □

Литература

[1] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. — М.: Мир, 1977.

[2] Anderson F. W., Fuller K. R. Rings and Categories of Modules. — Berlin: Springer, 1974.

[3] Auslander M. Large Modules over Artin Algebras, Algebra, Topology, and Category Theory. A Collection of Papers in Honor of Samuel Eilenberg. — London: Academic Press, 1976.

[4] Butler M. C. R., Campbell J. M., Kovács L. G. On infinite rank integral representations of groups and orders of finite lattice type // Arch. Math., to appear.

[5] Crawley-Boevey W. Infinite-dimensional modules in the representation theory of finite-dimensional algebras. Trondheim lectures (1996) // Algebras and Modules. I. CMS Conference Proceedings 23. — Providence, 1998. — P. 29—54.

[6] Curtis C. W., Reiner I. Methods of Representation Theory. II. — New York: John Wiley and Sons, 1987.

[7] MacLane S. Categories for the Working Mathematician. — New York: Springer, 1971.

[8] Reiner I. Maximal Orders. — Oxford: Oxford University Press, 2003. — London Math. Society Monographs. New series. Vol. 28.

[9] Ringel C. M. Infinite length modules. Some examples as introduction // Infinite Length Modules / Eds. H. Krause, C. M. Ringel. — Birkhäuser, 2000. — P. 1—73.

[10] Rump W. Almost Fully Decomposable Infinite Rank Lattices over Orders. Preprint. — 2004.

[11] Rump W. Large indecomposables over representation-infinite orders and algebras // Arch. Math. — To appear.

[12] Rump W. Large lattices over orders // Proc. London Math. Soc. — To appear.