Ниль-алгебры и бесконечные группы

Л. ХЭММУДИ
Университет Огайо, США
e-mail: hammoudi@ohio.edu

УДК 512.54

Ключевые слова: ассоциативные алгебры, алгебры Ли, ниль-радикал, бесконечные периодические группы.

Аннотация

Автор упрощает свою конструкцию ниль-алгебр, доказывая, что для любого целого $d \geqslant 2$ и над любым полем $\mathbb{K}$ существует почти нильпотентная ненильпотентная ниль-алгебра над $\mathbb{K}$, порождённая d элементами. Как следствие получаются аналогичные результаты для неассоциативных алгебр и групп.

Abstract

L. Hammoudi, Nil-algebras and infinite groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 3, pp. 189—200.

We simplify our construction of nil-algebras by proving, for any integer $d \geqslant 2$ and over any field $\mathbb{K}$, that there exists a residually nilpotent nonnilpotent nil-algebra over $\mathbb{K}$ generated by d elements. As a consequence, we obtain similar results for nonassociative algebras and groups.

1. Введение

Цель этой статьи состоит в том, чтобы упростить конструкцию ненильпотентных ниль-алгебр над произвольным полем, предложенную недавно автором [7]. Задача состоит в изучении таких конструкций и сравнении их с конструкцией Е. С. Голода [1, 2], поскольку сейчас известно лишь очень немного подобных примеров [1, 2, 7—10]. Уже в несчётном случае конструкцию Е. С. Голода можно рассматривать как «универсальную», поскольку любая конечно порождённая ненильпотентная ниль-алгебра над несчётным полем является гомоморфным образом ниль-алгебры, построенной по методу Е. С. Голода [6]. Тем не менее над счётным полем аналогичный факт не имеет места, поскольку конструкция Е. С. Голода приводит к абсолютным ниль-алгебрам [6], в то время как известны и неабсолютные ниль-алгебры, как показала А. Смоктунович [8,9]. Значение конструкций, недавно предложенных А. Смоктунович [8—10], состоит в том, что они позволяют решить старые трудные проблемы. Кроме того, в качестве решения проблем Бернсайда [5] и Куроша [4] эти конструкции дают метод, альтернативный методу Голода, поскольку знаменитая лемма Голода—Шафаревича [3] в них не используется [7]. Тем не менее мы проведём наше построение над произвольным полем, поскольку построения над счётным полем могут привести и к неабсолютным ниль-алгебрам, как у А. Смоктунович. Мы отсылаем читателя к работам [7—11], где освещено множеств различных проблем, возникающих в этой области, и их история. Для ясности мы будем следовать нашему построению в [7] и поделим эту статью на части аналогично прежнему изложению. Кроме того, для полноты изложения мы приведём все доказательства. Эта статья возникла из доклада автора на Международной алгебраической конференции (Москва, МГУ, 2004). Автор хотел бы поблагодарить организаторов за гостеприимство и А. В. Тимофеенко за помощь в Москве.

Пусть $\mathbb{F}$ — алгебра многочленов от $d \geqslant 2$ некоммутирующих переменных $x_1, x_2, \ldots, x_d$ над полем $\mathbb{K}$. Пусть $\mathcal{M}_n$ — множество всевозможных мономов $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}$, $\mathcal{M}_0 = 1$. Пусть $\mathbb{F}_i$ — подпространство в $\mathbb{F}$, порождённое однородными многочленами степени i (подпространство, натянутое на $\mathcal{M}_i$). Положим $\mathbb{F}_0 = \mathbb{K}$ и обозначим через $\mathbb{F}^{(1)} = \bigoplus\limits_{i \geqslant 1} \mathbb{F}_i$ алгебру многочленов без свободного члена. Пусть ∂g обозначает степень многочлена g. Через $\#\mathbb{S}$ будем обозначать мощность конечного множества $\mathbb{S}$.

2. Разложение многочленов

Мы опишем далее некоторый метод разложения многочленов. Такие методы являются ключевыми во всех известных конструкциях ненильпотентных ниль-алгебр. Более того, полученные алгебры зависят от того, какой именно метод разложения применяется.

Пусть
$$T = c_1^{(1)} x_1 + \ldots + c_d^{(1)} x_d + c_1^{(2)} x_1^2 + \ldots + c_{d^t}^{(t)} x_d^t \text{ —}$$
общий многочлен степени t. Для любого целого m мы будем рассматривать T^m как многочлен от коммутирующих переменных $c_1^{(1)}, \ldots, c_{d^t}^{(t)}$. Новые коэффициенты тогда будут многочленами от $x_1, \ldots, x_d$. Назовём эти однородные многочлены К-однородными (покоэффициентно однородными) компонентами многочлена T^m.

Теорема 1. *Пусть T — общий многочлен из $\mathbb{F}^{(1)}$ степени t. Пусть $n > t$ — целое число. Тогда существует такое множество $\mathbb{G}(T, n) \subseteq \mathbb{F}_n$, что $\#\mathbb{G}(T, n) < ntd^t(n + q - 1)^{q-1}$, где $q = d + \ldots + d^t$, и для любого целого $m > n$ множество всех К-однородных компонент многочлена T^m является подмножеством в правом идеале в $\mathbb{F}$, порождённым многочленами вида ghf, где $g \in \mathbb{G}(T, n)$, h — однородный многочлен степени $\partial h < t$, а f — К-однородная компонента в T^{m-n}.*

Доказательство. Пусть
$$T = c_1^{(1)} x_1 + \ldots + c_d^{(1)} x_d + c_1^{(2)} x_1^2 + \ldots + c_{d^t}^{(t)} x_d^t \text{ —}$$

общий многочлен степени t. Рассмотрим T^m как многочлен от переменных $c_1^{(1)}, \dots, c_{d^t}^{(t)}$, которые мы теперь рассмотрим как некоммутативные, но коммутирующие с переменными $x_1, \dots, x_d$. Тогда

$$T^m = \sum_{\substack{1 \leqslant l_s \leqslant t \\ 1 \leqslant s \leqslant m}} c_{l_1}^{(j_1)} \dots c_{l_m}^{(j_m)} x_{l_1}^{j_1} \dots x_{l_m}^{j_m}.$$

Поскольку $1 \leqslant j_s \leqslant t < n$ для всех s, $1 \leqslant s \leqslant m$, и $j_s + \ldots + j_{n'} \geqslant n$ для всех n', $n \leqslant n' \leqslant m$, для каждого слагаемого $c_{l_1}^{(j_1)} \dots c_{l_m}^{(j_m)} x_{l_1}^{j_1} \dots x_{l_m}^{j_m}$ в T^m существует такое целое k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, что $j_1 + \ldots + j_k < n$ и $j_1 + \ldots + j_k + j_{k+1} \geqslant n$. Таким образом, можно записать T^m в виде

$$T^m = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\Delta_1} c_{l_1}^{(j_1)} \dots c_{l_{k+1}}^{(j_{k+1})} x_{l_1}^{j_1} \dots x_{l_{k+1}}^{j_{k+1}} \sum_{\substack{1 \leqslant j_s \leqslant t \\ k+2 \leqslant s \leqslant m}} c_{l_{k+2}}^{(j_{k+2})} \dots c_{l_m}^{(j_m)} x_{l_{k+2}}^{j_{k+2}} \dots x_{l_m}^{j_m},$$

где $\Delta_1 = [j_1 + \ldots + j_k < n \leqslant j_1 + \ldots j_{k+1}]$. Имеем

$$T^m = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\Delta_1} c_{l_1}^{(j_1)} \dots c_{l_{k+1}}^{(j_{k+1})} x_{l_1}^{j_1} \dots x_{l_{k+1}}^{j_{k+1}} T^{m-k-1} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j_{k+1}=1}^{\min(n-k,t)} \sum_{\Delta_2} c_{l_1}^{(j_1)} \dots c_{l_k}^{(j_k)} x_{l_1}^{j_1} \dots x_{l_k}^{j_k} \left(c_{l_{k+1}}^{(j_{k+1})} x_{l_{k+1}}^{j_{k+1}} + \ldots + c_{d^t}^{(t)} x_d^t \right) T^{m-k-1},$$

где $\Delta_2 = [j_1 + \ldots + j_k = n - j_{k+1}]$. Далее,

$$T^m = \sum_{j_{k+1}=1}^{t} \sum_{k=1}^{n-j_{k+1}} \sum_{\Delta_2} c_{l_1}^{(j_1)} \dots c_{l_k}^{(j_k)} x_{l_1}^{j_1} \dots x_{l_k}^{j_k} \times$$
$$\times \left(c_{l_{k+1}}^{(j_{k+1})} x_{l_{k+1}}^{j_{k+1}} + \ldots + c_{d^t}^{(t)} x_d^t \right) T^{m-k-1}.$$

Положим

$$\Phi \left(c_{l_1}^{(j_1)} \dots c_{l_k}^{(j_k)}; c_{l_{k+1}}^{(j_{k+1})} \right) = \sum_{\Delta_2} c_{l_1}^{(j_1)} \dots c_{l_k}^{(j_k)} x_{l_1}^{j_1} \dots x_{l_k}^{j_k}, \quad 1 \leqslant j_{k+1} \leqslant t.$$

Заметим, что для каждого $k = 1, \dots, n - j_{k+1}$ имеем $m - n < m - k - 1$ и, поскольку $t < n$, $j_{k+1} < n$. Тогда

$$T^m = \sum_{j_{k+1}=1}^{t} \sum_{k=1}^{n-j_{k+1}} \Phi \left(c_{l_1}^{(j_1)} \dots c_{l_k}^{(j_k)}; c_{l_{k+1}}^{(j_{k+1})} \right) \times$$
$$\times \left(c_{l_{k+1}}^{(j_{k+1})} x_{l_{k+1}}^{j_{k+1}} + \ldots + c_{d^t}^{(t)} x_d^t \right) T^{m-n} T^{n-k-1}. \quad (1)$$

В этих обозначениях рассмотрим элементы

$$\Phi \left(c_{l_1}^{(j_1)} \dots c_{l_k}^{(j_k)}; c_{l_{k+1}}^{(j_{k+1})} \right) =$$
$$= \sum_{j_1 + \ldots + j_k = n - j_{k+1}} c_{l_1}^{(j_1)} \dots c_{l_k}^{(j_k)} x_{l_1}^{j_1} \dots x_{l_k}^{j_k}, \quad 1 \leqslant j_{k+1} \leqslant t_{k+1},$$

для всех j_{k+1}, k, $1 \leqslant j_{k+1} \leqslant t$, $1 \leqslant k \leqslant n - j_{k+1}$, и для всех мономов из T^m. Посмотрим на эти элементы как на многочлены от переменных $c_1^{(1)}, \ldots, c_{d^t}^{(t)}$, которые теперь рассматриваются как коммутативные. В таком случае каждый многочлен $\Phi\left(c_{l_1}^{(j_1)} \ldots c_{l_k}^{(j_k)}; c_{l_{k+1}}^{(j_{k+1})}\right)$ представи́м в виде суммы не более чем $(n - j_{k+1} + q - 1)^{q-1}$, $q = d + \ldots + d^t$, K-однородных многочленов степени $n - j_{k+1}$. Пусть $\mathbb{G}(T, n)$ — теоретико-множественное объединение всевозможных множеств $h\left(c_{l_1}^{(j_1)} \ldots c_{l_k}^{(j_k)}; c_{l_{k+1}}^{(j_{k+1})}\right) \mathcal{M}_{l_{k'+1}}$, где $h\left(c_{i_1}^{(j_1)} \ldots c_{l_k}^{(j_k)}; c_{l_{k+1}}^{(j_{k+1})}\right)$ пробегает K-однородные компоненты многочлена $\Phi\left(c_{l_1}^{(j_1)} \ldots c_{l_k}^{(j_k)}; c_{l_{k+1}}^{(j_{k+1})}\right)$ для всех j_{k+1}, k, $1 \leqslant j_{k+1} \leqslant t$, $1 \leqslant k \leqslant n - j_{k+1}$, и для всех мономов из T^m.

Чтобы сосчитать элементы в $\mathbb{G}(T, n)$, заметим сначала, что, поскольку $j_1 + \ldots + j_k = n - j_{k+1}$, для любого фиксированного j_{k+1} количество элементов $\Phi\left(c_{l_1}^{(j_1)} \ldots c_{l_k}^{(j_k)}; c_{l_{k+1}}^{(j_{k+1})}\right)$ меньше n. Поэтому общее количество всех $\Phi\left(c_{l_1}^{(j_1)} \ldots c_{l_k}^{(j_k)}; c_{l_{k+1}}^{(j_{k+1})}\right)$, составляющих T^m, меньше nt. Заметим теперь, что эти многочлены могут быть также получены из произведений длины n множителей T^n. Действительно, поскольку $T^m = T^n T^{m-n}$, мы применяем наш метод разложения к T^n, чтобы получить всевозможные элементы $\Phi\left(c_{l_1}^{(j_1)} \ldots c_{l_k}^{(j_k)}; c_{l_{k+1}}^{(j_{k+1})}\right)$, входящие в разложение T^m. Таким образом,

$$\#\mathbb{G}(T, n) < ntd^t(n + q - 1)^{q-1}, \quad q = d + \ldots + d^t.$$

Наконец, в (1) все элементы

$$\Phi\left(c_{l_1}^{(j_1)} \ldots c_{l_k}^{(j_k)}; c_{l_{k+1}}^{(j_{k+1})}\right)\left(c_{l_{k+1}}^{(j_{k+1})} x_{l_{k+1}}^{j_{k+1}} + \ldots + c_{d^t}^{(t)} x_d^t\right)$$

являются линейными комбинациями элементов из $\mathbb{G}(T, n)$, умноженных справа на многочлены степеней меньше t. Из этого замечания и того факта, что можно переписать в (1) многочлен T^{m-n} как сумму его K-однородных многочленов, следует, что каждая K-однородная компонента в T^m лежит в правом идеале в $\mathbb{F}$, порождённом многочленами вида ghf, $g \in \mathbb{G}(T, n)$, где h — однородный многочлен степени $\partial h < t$, а f — K-однородный многочлен в T^{m-n}. $\square$

Для любого целого числа $n \geqslant 0$ и любого множества $\mathbb{B} \subset \mathbb{F}$ пусть

$$\mathbb{F}_n(\mathbb{B}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{M}_{nk} \mathbb{B} \mathbb{F}$$

обозначает правый идеал в $\mathbb{F}$, порождённый множеством

$$\bigcup_{k=0}^{+\infty} \mathcal{M}_{nk} \mathbb{B}.$$

Теорема 2. *Пусть T — общий многочлен степени t в $\mathbb{F}^{(1)}$. Пусть $\bar{n}$ и η — такие натуральные числа, что $\eta > \bar{n} > 2t$. Тогда существует множество $\mathbb{B} \subset \mathbb{F}_{\bar{n}}$, $\#\mathbb{B} < t^2 d^{2t} \bar{n}(\bar{n} + q - 1)^{q-1}$, $q = d + \ldots + d^t$, такое что идеал в $\mathbb{F}$, порождённый* *всевозможными K-однородными многочленами из* $T^{3\eta}$, *является подмножеством в* $\mathbb{F}_\eta(\mathbb{B})$.

Доказательство. По теореме 1 для любого целого i, $1 \leqslant i \leqslant t$, существует множество однородных многочленов $\mathbb{G}(T, \bar{n} - i)$. Пусть

$$\mathbb{B} = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant t'} \mathcal{M}_i \mathbb{G}(T, \bar{n} - i).$$

Тогда

$$\#\mathbb{B} < \sum_{i=1}^{t} d^i(\bar{n} - i) t d^t (\bar{n} - i + q - 1)^{q-1} \leqslant \\ \leqslant t d^t \sum_{i=1}^{t} d^i(\bar{n} - i)(\bar{n} - i + q - 1)^{q-1} \leqslant t^2 d^{2t} \bar{n}(\bar{n} + q - 1)^{q-1}.$$

Чтобы доказать последнее утверждение теоремы, достаточно показать, что для любого однородного многочлена u степени $j < \eta$ для любой K-однородной компоненты f многочлена $T^{3\eta}$ справедливо $uf \in \mathbb{F}_\eta(\mathbb{B})$. Поскольку $t < 2\eta - j < 3\eta$, применяем теорему 1 к T, $n = 2\eta - j$, $m = 3\eta$ и получаем, что все K-однородные компоненты многочлена $T^{3\eta}$ входят в правый идеал в $\mathbb{F}$, порождённый элементами вида ghf' для всех K-однородных компонент f' в $T^{3\eta - 2\eta + j}$, где $g \in \mathbb{G}(T, 2\eta - j)$ и $\partial h < t$. Поскольку для любого $g \in \mathbb{G}(T, 2\eta - j)$ справедливо $\partial(ug) = 2\eta$, достаточно доказать, что $hf' \in \mathbb{F}_\eta(\mathbb{B})$ для любого K-однородного многочлена f' в $T^{\eta + j}$ и для любого монома h, $\partial h = k < t$.

Так как $t < \bar{n} - k < \eta + j$, по теореме 1, применённой к T и $n = \bar{n} - k$, $m = \eta + j$, получаем, что все K-однородные компоненты f' многочлена $T^{3\eta - 2\eta + j}$ входят в правый идеал в $\mathbb{F}$, порождённый всевозможными элементами вида $\bar{g}\bar{h}f''$ для любых K-однородных многочленов f'' в $T^{3\eta - 2\eta + j - \bar{n} + k}$, где $\bar{g} \in \mathbb{G}(T, 2\eta - j)$, $\partial\bar{h} < t$. По определению $\mathbb{B}$ имеем $h\bar{g} \in \mathbb{B}$, и потому $hf' \in \mathbb{F}_\eta(\mathbb{B})$ для любой K-однородной компоненты f' многочлена $T^{3\eta - 2\eta + j}$ и для любого монома h, $\partial h = k < t$. $\square$

Следствие 1. *Пусть* T_i, $i \geqslant 1$, *— общие многочлены в* $\mathbb{F}^{(1)}$ *степеней* t_i *соответственно. Пусть* n_i, $i \geqslant 1$, *— такие натуральные числа, что* $n_{i+1} > n_i > 2t_i$. *Тогда существуют множества* $\mathbb{B}_i \subset \mathbb{F}_{n_i}$, $\#\mathbb{B}_i < t_i^2 d^{2t_i} n_i (n_i + q_i - 1)^{q_i - 1}$, $q_i = d + \ldots + d^{t_i}$, *такие что идеал в* $\mathbb{F}$, *порождённый всеми K-однородными компонентами многочленов* $T_i^{3n_{i+1}}$, $i \geqslant 1$, *содержится в правом идеале* $\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{F}_{n_{i+1}}(\mathbb{B}_i)$.

3. Линейные преобразования

В этом разделе определяются и изучаются свойства некоторых линейных преобразований. Ядра этих преобразований порождают такой идеал I, что $\mathbb{F}^{(1)}/I$ является конечно порождённой ненильпотентной ниль-алгеброй. Использование этих линейных преобразований не является «качественным», другими словами, нам не нужны какие-то «специальные» преобразования. Интересно было бы изучить, как выбор определённого линейного преобразования влияет на свойства алгебры $\mathbb{F}^{(1)}/I$. Линейные преобразования, которые изучаются здесь, близки к тем, которые были у А. Смоктунович [8], но несколько отличаются от преобразований из [7], хотя прекрасные графические представления преобразований, которые можно увидеть в [7], применимы и здесь.

Пусть $m_0 = 1$, $m_i < m_{i+1}$, e_i, $i \geqslant 1$, — такие положительные целые числа, что $m_{i+1} = k_i m_i$.

Рассмотрим множества однородных многочленов

$$\mathbb{B}_i = \{f_{i,1}, \ldots, f_{i,e_i}\} \subset \mathbb{F}_{m_i} \setminus \{0\}$$

и зафиксируем линейные преобразования

$$\mathcal{L}_{f_{i,1},\ldots,f_{i,e_i}} : \mathbb{F}_{m_i} \to \mathbb{F}_{m_i},$$

такие что

$$\langle f_{i,1}, \ldots, f_{i,e_i} \rangle_{\mathbb{K}} = \ker(\mathcal{L}_{f_{i,1},\ldots,f_{i,e_i}}). \tag{2}$$

Определим теперь индукцией по i линейные преобразования $\mathcal{R}_i$ из $\mathbb{F}_{m_i}$ в $\mathbb{F}_{m_i}$. Пусть $\mathcal{R}_1 = \mathrm{id}$. Предположим, что уже определены $\mathcal{R}_j$ для всех $j \leqslant i$. Определим $\mathcal{R}_{i+1}$, положив

$$\mathcal{R}_{i+1}(\omega) = \mathcal{L}_{\mathcal{R}_i(\mathbb{B}_i)}(\mathcal{R}_i(x_1 \ldots x_{m_i}))\left[\prod_{j=2}^{k_i} \mathcal{R}_i(x_{(j-1)m_i+1} \ldots x_{jm_i})\right],$$

где $\omega = x_1 \ldots x_{m_{i+1}} \in \mathcal{M}_{m_{i+1}}$ и

$$\mathcal{L}_{\mathcal{R}_i(\mathbb{B}_i)} = \mathcal{L}_{\mathcal{R}_i(f_{i,1}),\ldots,\mathcal{R}_i(f_{i,e_i})}.$$

Теорема 3. *Для любого целого $j \geqslant 0$ справедливо*

$$\mathbb{F}_{m_{j+1}} \cap \sum_{i=1}^{j} \mathbb{F}_{m_{i+1}}(\mathbb{B}_i) \subset \ker(\mathcal{R}_{j+1}).$$

Доказательство. Будем доказывать утверждение индукцией по j. Заметим сначала, что по определению $\mathbb{F}_{m_{i+1}}(\mathbb{B}_i)$ любой элемент из $\mathbb{F}_{m_{j+1}} \cap \sum\limits_{i=1}^{j} \mathbb{F}_{m_{i+1}}(\mathbb{B}_i)$ является линейной комбинацией элементов вида ufv, $\partial(ufv) = m_{j+1}$, где $u \in \mathcal{M}_{km_{i+1}}$, $f \in \mathbb{B}_i$, $v \in \mathcal{M}_{m_{j+1}-km_{i+1}-m_i}$ для некоторых $1 \leqslant i \leqslant j$ и $k = 0, 1, \ldots$.

Поскольку для любого $i \geqslant 1$ преобразование $\mathcal{R}_i$ линейно, мы докажем более сильный результат, а именно что $\mathcal{R}_{j+1}(ufv) = 0$.

Предположим, что $j = 1$. Тогда из того, что $i = j = 1$ и $m_{j+1} = \partial(ufv) \geqslant \geqslant \partial u + \partial f = km_{i+1} + m_i > km_{i+1}$, следует $k = 0$. Это означает, что $ufv = fv$ (u является пустым мономом). Таким образом,

$$\mathcal{R}_{j+1}(ufv) = \mathcal{R}_2(fv) = \mathcal{L}_{\mathcal{R}_1(\mathbb{B}_1)}\mathcal{R}_1(f)w = \mathcal{L}_{\mathbb{B}_1}(f)w,$$

где $w \in \mathbb{F}$. Теперь, поскольку $f \in \mathbb{B}_1$, по определению трансформаций $\mathcal{L}_{\mathbb{B}_i}$ имеем $0 = \mathcal{L}_{\mathbb{B}_1}(f) = \mathcal{R}_{j+1}(ufv)$. Таким образом, наше утверждение верно при $j = 1$. Предположим теперь, что мы доказали наш результат для любого целого i, $1 \leqslant i < j$. Докажем его для j.

Начиная снова с многочлена ufv, мы можем переписать u как $u = u_1u_2$, где $u_1 \in \mathcal{M}_{lm_j}$ для некоторого $l \geqslant 0$ и $u_2 \in \mathcal{M}_n$ для некоторого n, $0 \leqslant n < m_j$. Мы утверждаем, что $\partial(u_2f) = n + m_i < m_j$. Действительно, $km_{i+1} = lm_j + n$.

Если $n = 0$, то, поскольку $i < j$, $m_j - n - m_i = m_j - m_i > 0$.

Предположим, что $n \neq 0$. В таком случае $i + 1 < j$, и тогда можно записать $m_j = \alpha m_{i+1} + \beta$, откуда

$$n = km_{i+1} - lm_j = (k - l\alpha)m_{i+1} - l\beta = (k - l\alpha - \beta_1)m_{i+1} - \beta_2,$$

$\beta_2 < m_{i+1}$. Теперь

$$m_j - n - m_i = m_j - (k - l\alpha - \beta_1)m_{i+1} + \beta_2 - m_i = (\alpha - k + l\alpha + \beta_1)m_{i+1} + \beta + \beta_2 - m_i.$$

Однако поскольку $n < m_j$, мы имеем $\alpha > k - l\alpha - \beta_1$, $\beta + \beta_2 \geqslant 0$, и потому $m_j - n - m_i > 0$. Это доказывает наше утверждение.

Теперь рассмотрим

$$\partial(u_2fv) = n + m_i + m_{j+1} - km_{i+1} - m_i = m_{j+1} - lm_j.$$

Здесь можно выделить два случая.

1. Если $\partial(u_2fv) \geqslant m_j$, то, поскольку $\partial(u_2f) = n + m_i < m_j$ и $\partial(ufv) = m_{j+1} > m_j$, можно записать $v = v_1v_2$, где $\partial(u_2fv_1) = m_j$. Тогда

$$u_2fv_1 \in \mathbb{F}_{m_j} \cap \mathbb{F}_{m_{i+1}}(\mathbb{B}_i) \subset \mathbb{F}_{m_j} \cap \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{F}_{m_{i+1}}(\mathbb{B}_i)$$

и по предположению индукции $\mathcal{R}_j(u_2fv_1) = 0$. С другой стороны, по определению $\mathcal{R}_{j+1}(ufv) = \bar{u}\mathcal{R}_j(u_2fv_1) \cdot \bar{v} = 0$, $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{F}$.

2. Если $\partial(u_2fv) < m_j$, то, поскольку $\partial(ufv) = m_{j+1} > m_j$, можно записать $u = \bar{u}_1\bar{u}_2$, где $\partial(\bar{u}_2fv) = m_j$. Очевидно,

$$\bar{u}_2fv \in \mathbb{F}_{m_j} \cap \mathbb{F}_{m_{i+1}}(\mathbb{B}_i) \subset \mathbb{F}_{m_j} \cap \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{F}_{m_{i+1}}(\mathbb{B}_i)$$

и по предположению индукции $\mathcal{R}_j(\bar{u}_2fv) = 0$. С другой стороны, по определению $\mathcal{R}_{j+1}$ имеем $\mathcal{R}_{j+1}(ufv) = \tilde{u}\mathcal{R}_j(\bar{u}_2fv) = 0$, $\tilde{u} \in \mathbb{F}$. □

Следующая лемма используется, явно или неявно, в доказательствах последующих двух теорем.

Лемма 1. *Пусть* $m_0 = 1$, m_i — *такие положительные целые числа, что* $m_{i+1} > (2d)^{i+1}m_i$, $m_{i+1} = k_im_i$. *Пусть* $s_1 = m_1$ *и* $s_i = s_{i-1}(k_{i-1} - 1)$ *для всех* $i \geqslant 1$. *Тогда для всех* $i \geqslant 1$ *справедливо*

$$m_i\left(1 - \frac{1}{2d^2}\right) \leqslant s_i \leqslant m_i.$$

Доказательство. Очевидно, $s_i \leqslant m_i$. Докажем, что

$$m_i\left(1-\frac{1}{2d^2}\right) \leqslant s_i.$$

Имеем

$$s_i = s_{i-1}(k_{i-1}-1) = s_{i-2}(k_{i-2}-1)(k_{i-1}-1) = \ldots = \\ = s_1\prod_{j=1}^{i-1}(k_j-1) = m_1\prod_{j=1}^{i-1}k_j\prod_{j=1}^{i-1}\left(1-\frac{1}{k_j}\right).$$

Однако $m_{j+1} = k_j m_j$. Таким образом,

$$s_i = m_2\prod_{j=2}^{i-1}k_j\prod_{j=1}^{i-1}\left(1-\frac{1}{k_j}\right) = \ldots = m_i\prod_{j=1}^{i-1}\left(1-\frac{1}{k_j}\right).$$

Заметим, что, поскольку $m_{j+1} = k_j m_j$ и $m_{j+1} > (2d)^{j+1}m_j$, справедливо $k_j \geqslant (2d)^{j+1}$. Поэтому

$$1-\frac{1}{k_j} \geqslant 1-\frac{1}{(2d)^{j+1}}.$$

Таким образом,

$$s_i \geqslant m_i\prod_{j=1}^{i-1}\left(1-\frac{1}{(2d)^{j+1}}\right) \geqslant m_i\left(1-\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{(2d)^{j+1}}\right) \geqslant m_i\left(1-\frac{1}{(2d)^2}\right).$$

Лемма доказана. □

Для доказательства следующей теоремы нам нужно определить действие перестановок на мономах и многочленах.

(i) Для любого монома $x_1\ldots x_n \in \mathcal{M}_n$ и произвольной перестановки σ в группе перестановок $\mathcal{S}_n$ n элементов положим $(x_1\ldots x_n)^\sigma = x_{\sigma(1)}\ldots x_{\sigma(n)}$. Мы продолжим это определение на любой однородный многочлен $\sum\lambda_i M_i$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $M_i \in \mathcal{M}_n$, положив $\left(\sum\lambda_i M_i\right)^\sigma = \sum\lambda_i M_i^\sigma$. Для положительных целых чисел k, m и перестановки $\sigma \in \mathcal{S}_m$ обозначим через $\bar\sigma$ такую перестановку множества $\mathcal{S}_{mk}$, что для любых $w_1,\ldots,w_k \in \mathcal{M}_m$ справедливо $(w_1\ldots w_k)^{\bar\sigma} = w_1^\sigma\ldots w_k^\sigma$.

(ii) Пусть теперь $u = u_1\ldots u_k$, $u_i \in \mathcal{M}_s$, и $v = v_1\ldots v_k w_1$, $v_i \in \mathcal{M}_{s'}$, $w_1 \in \mathcal{M}_{s''}$. Положим $m' = ks+ks'+s''$ и рассмотрим такую перестановку $\rho \in \mathcal{S}_{m'}$, что $(uv)^\rho = w_1u_1v_1u_2v_2\ldots u_kv_k$.

(iii) Пусть $u_i \in \mathcal{M}_s$, $v_i \in \mathcal{M}_{s'}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, и $w_1 \in \mathcal{M}_{s''}$. Положим $m' = ks+ks'+s''$ и рассмотрим такую перестановку $\tau \in \mathcal{S}_{m'}$, что $(w_1u_1v_1u_2v_2\ldots u_kv_k)^\tau = u_1\ldots u_kv_1\ldots v_kw_1w_1$.

Теорема 4. *Пусть $m_0 = 1$, m_i — такие положительные целые числа, что $m_i < m_{i+1}$, $m_{i+1} = k_i m_i$. Пусть $s_1 = m_1$ и $s_i = s_{i-1}(k_{i-1}-1)$ для всех $i \geqslant 1$. В этих обозначениях для любого $i \geqslant 1$ существуют $\sigma_i, \pi_i \in \mathcal{S}_{m_i}$ и линейное* *преобразование* h_i *из* $\mathbb{F}_{m_i-s_i}$ *в* $\mathbb{F}_{m_i-s_i}$, *такие что для любых* $u \in \mathbb{F}_{s_i}$ *и* $v \in \mathbb{F}_{m_i-s_i}$ *выполнено* $[\mathcal{R}_i((uv)^{\sigma_i})]^{\pi_i} = uh_i(v)$.

Доказательство. С учётом определения перестановок на многочленах (см. (i)) и линейности преобразований достаточно доказать теорему для мономов $u \in \mathcal{M}_{s_i}$ и $v \in \mathcal{M}_{m_i-s_i}$. Доказательство проведём индукцией по i. Если $i = 1$, пусть $\sigma_1 = \mathrm{id}$, $\pi_1 = \mathrm{id}$ и $h_1 = \mathrm{id}$. Предположим, что утверждение верно для любых i, $1 \leqslant i < j$, и докажем его для j.

Запишем $u = u_1 \ldots u_{k_{j-1}-1}$, $u_l \in \mathcal{M}_{s_{j-1}}$ и $v = v_1 \ldots v_{k_{j-1}-1} w_1$, $v_l \in \mathcal{M}_{m_{j-1}-s_{j-1}}$, $w_1 \in \mathcal{M}_{m_{j-1}}$. Пусть ρ_j — перестановка множества $\mathcal{S}_{m_j}$, определённая в (ii), а $\bar{\sigma}_{j-1}$ — перестановка множества $\mathcal{S}_{m_j}$, продолжающая перестановку $\sigma_{j-1} \in \mathcal{S}_{m_{j-1}}$ (см. (i)). Рассмотрим теперь перестановку $\sigma_j \in \mathcal{S}_{m_j}$, определённую как $\sigma_j = \bar{\sigma}_{j-1} \circ \rho_j$. В этих обозначениях имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_j((uv)^{\sigma_j}) &= \mathcal{R}_j[((uv)^{\rho_j})^{\bar{\sigma}_{j-1}}] = \\
&= \mathcal{R}_j[w_1^{\sigma_{j-1}}(u_1v_1)^{\sigma_{j-1}} \ldots (u_{k_{j-1}-1}v_{k_{j-1}-1})^{\sigma_{j-1}}] = \\
&= \mathcal{L}_{\mathcal{R}_{j-1}(\mathbb{B}_{j-1})}(\mathcal{R}_{j-1}(w_2^{\sigma_{j-1}}))\left[\prod_{l=1}^{k_{j-1}-1} \mathcal{R}_{j-1}(u_lv_l)^{\sigma_{j-1}}\right].
\end{aligned}$$

Положим

$$\mathcal{L}_{\mathcal{R}_{j-1}(\mathbb{B}_{j-1})}(\mathcal{R}_{j-1}(w_1^{\sigma_{j-1}})) = \bar{w}_1.$$

Пусть теперь $\tau_j \in \mathcal{S}_{\bar{m}_j}$ — перестановка, определённая в (iii). Положим $\pi_j = \tau_j \circ \bar{\pi}_{j-1}$. По предположению индукции

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{R}_j((uv)^{\sigma_j})]^{\pi_j} = [(\mathcal{R}_j((uv)^{\sigma_j}))^{\bar{\pi}_{j-1}}]^{\tau_i} = \\
&= \left[(\bar{w}_1)^{\pi_{j-1}}\left[\prod_{l=1}^{k_{j-1}-1} u_lh_{j-1}(v_l)\right]\right]^{\tau_j} = \left[\prod_{l=1}^{k_{j-1}-1} u_l\right]\left[\prod_{l=1}^{k_{j-1}-1} h_{j-1}(v_l)\right](\bar{w}_1)^{\pi_{j-1}}.
\end{aligned}$$

Определим

$$h_j(v) = \left[\prod_{l=1}^{k_{j-1}-1} h_{j-1}(v_l)\right](\bar{w}_1)^{\pi_{j-1}}.$$

По этому определению $[\mathcal{R}_j((uv)^{\sigma_j})]^{\pi_j} = uh_j(v)$. □

Для доказательства следующей теоремы нам потребуется лемма, которая представляет и самостоятельный интерес.

Лемма 2. *Пусть* λ, μ — *два целых числа, и пусть* $f\colon \mathbb{F}_\lambda \to \mathbb{F}$, $g\colon \mathbb{F}_{\lambda+\mu} \to \mathbb{F}$ — *два таких линейных преобразования, что для любых* $u \in \mathcal{M}_\mu$, $v \in \mathcal{M}_\lambda$ *выполнено* $g(uv) = uf(v)$. *Если размерность векторного подпространства* $\langle g(w) \mid w \in \mathcal{M}_{\lambda+\mu}\rangle_{\mathbb{K}}$ *в* $\mathbb{F}$ *меньше* d^μ, *то* $f = 0$ *и* $g = 0$.

Доказательство. Предположим, что $\dim\langle g(w) \mid w \in \mathcal{M}_{\lambda+\mu}\rangle_{\mathbb{K}} < d^\mu$. Поскольку $\dim\langle \mathcal{M}_\mu\rangle_{\mathbb{K}} = d^\mu$, существуют ненулевые скаляры $\alpha_i \in \mathbb{K}$, такие что

$$\sum \alpha_i g(u_iv) = \sum \alpha_i u_i f(v) = 0,$$

где u_i пробегает $\mathcal{M}_\mu$, а v — произвольный фиксированный элемент из $\mathcal{M}_\lambda$. Тогда существует алгебраическое соотношение между элементами множества $\mathcal{M}_\mu$. Однако $\mathcal{M}_\mu$ порождает свободную подалгебру в $\mathbb{F}$. Таким образом, $f(v) = 0$ для любого фиксированного $v \in \mathcal{M}_\lambda$. Поэтому $f = 0$ и $g = 0$. $\square$

Теорема 5. *Пусть $m_0 = 1$, m_i — такие положительные целые числа, что для любого $i \geqslant 1$ выполнено $m_{i+1} > (2d)^{i+1}m_i$. Для любого $i \geqslant 1$ рассмотрим множества $\mathbb{B}_i = \{f_{i,1}, \ldots, f_{i,e_i}\} \subset \mathbb{F}_{m_i}$, $e_i < \left[d^{m_i(2d^2-1)/2d^2}\right]$. Пусть $\mathcal{R}_i$, $i \geqslant 1$, — линейные преобразования, определённые в начале раздела 3. Тогда для любого $i \geqslant 1$ справедливо $\mathcal{R}_i \neq 0$.*

Доказательство. При $j = 1$ имеем $\mathcal{R}_1 = \mathrm{id} \neq 0$. Предположим, что $\mathcal{R}_j \neq 0$ для всех $j \leqslant i$. Докажем, что $\mathcal{R}_{i+1} \neq 0$. Предположим обратное, т. е. что $\mathcal{R}_{i+1} = 0$. Тогда $\mathcal{L}_{\mathcal{R}_i(\mathbb{B}_i)}(\mathcal{R}_i) = 0$ или $\mathcal{R}_i = 0$. Действительно, если это не так, то существуют $u \in \mathcal{M}_{m_i}$, $v \in \mathcal{M}_{m_i}$, такие что $\mathcal{L}_{\mathcal{R}_i(\mathbb{B}_i)}(\mathcal{R}_i(u)) \neq 0$, $\mathcal{R}_i(v) \neq 0$ и $\mathcal{R}_{i+1}(uv\ldots v) = 0$. В таком случае

$$0 = \mathcal{R}_{i+1}(uv\ldots v) = \mathcal{L}_{\mathcal{R}_i(\mathbb{B}_i)}(\mathcal{R}_i(u))\Big[\prod \mathcal{R}_i(v)\Big]\mathcal{R}_i(v) \neq 0.$$

Это противоречие доказывает наше утверждение.

Предположим теперь, что $\mathcal{L}_{\mathcal{R}_i(\mathbb{B}_i)}(\mathcal{R}_i) = 0$. Значит,

$$\mathcal{R}_i(\mathcal{M}_{m_i}) \subset \langle \mathcal{R}_i(f_{i,1}), \ldots, \mathcal{R}_i(f_{i,e_i})\rangle_{\mathbb{K}}.$$

Следовательно, $\dim\langle \mathcal{R}_i(w) \mid w \in \mathcal{M}_{m_i}\rangle_{\mathbb{K}} < \left[d^{m_i(2d^2-1)/2d^2}\right]$.

Для любого монома $w \in \mathcal{M}_{m_i}$ положим $\bar{\mathcal{R}}_i(w) = [\mathcal{R}_i(w^{\sigma_i})]^{\pi_i}$, где σ_i и π_i определены в теореме 4. Поскольку

$$\bar{\mathcal{R}}_i(\mathcal{M}_{m_i}) = (\mathcal{R}_i(\mathcal{M}_{m_i}))^{\pi_i},$$

имеем

$$\dim\langle \bar{\mathcal{R}}_i(w) \mid w \in \mathcal{M}_{m_i}\rangle_{\mathbb{K}} < \left[d^{m_i(2d^2-1)/2d^2}\right].$$

По теореме 4 существуют линейные преобразования h_i. Пусть $f = h_i$ и $g = \bar{\mathcal{R}}_i$ — линейные преобразования в лемме 2. С другой стороны, числа $\mu = s_i$ и $\lambda = m_i - s_i$ удовлетворяют условиям леммы 1. Теперь все условия леммы 1 выполняются, так что $\bar{\mathcal{R}}_i(w) = g(w) = 0$ для всех $w \in \mathcal{M}_{m_i}$. Таким образом, $\mathcal{R}_i = 0$, что противоречит предположению индукции. $\square$

4. Ниль-алгебры и группы

Теорема 6. *Для любого целого $d \geqslant 2$ и над любым полем $\mathbb{K}$ существует почти нильпотентная ненильпотентная ниль-алгебра над $\mathbb{K}$, порождённая d элементами.*

Доказательство. Построим идеал I в $\mathbb{F}^{(1)}$, порождённый однородными многочленами, такой что $\mathbb{F}^{(1)}/I$ — ненильпотентная ниль-алгебра.

Поскольку имеется лишь счётное множество общих многочленов, занумеруем их по степеням $i \geqslant 1$ следующим образом:

$$T_i = c_1^{(1)} x_1 + \ldots + c_d^{(1)} x_d + c_1^{(2)} x_1^2 + \ldots + c_{d^i}^{(t_i)} x_d^i.$$

Пусть m_i, $i \geqslant 1$, — такие целые числа, что m_i делит m_{i+1}. Предположим, что $m_1 > 2d$ и $m_{i+1} > (2d)^{i+1} m_i$, $i \geqslant 1$. Пусть I — идеал в $\mathbb{F}^{(1)}$, порождённый K-однородными компонентами многочленов $T_i^{3m_{i+1}}$, $i \geqslant 1$. Тогда $\mathbb{F}^{(1)}/I$ — алгебра из условий теоремы. Единственное, что осталось доказать — это то, что алгебра ненильпотентна. Предположим противное. Тогда существует такое целое $k > 0$, что $\mathcal{M}_{m_k} \subset I$. Если мы теперь положим $t_i = i$, $n_i = m_i$ для каждого $i \geqslant 1$, то по следствию 1 существуют множества $\mathbb{B}_i \subset \mathbb{F}_{m_i}$, $\#\mathbb{B}_i < i^2 d^{2i} m_i (m_i + q_i - 1)^{q_i - 1}$, $q_i = d + \ldots + d^i$, такие что

$$\mathcal{M}_{m_k} \subset I \subset \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{F}_{m_{i+1}}(\mathbb{B}_i).$$

С другой стороны, поскольку все $\mathbb{F}_{m_{i+1}}(\mathbb{B}_i)$ однородны, то

$$\mathcal{M}_{m_k} \subset \sum_{i=1}^{k} \mathbb{F}_{m_{i+1}}(\mathbb{B}_i).$$

Однако $\mathbb{F}_{m_{i+1}}(\mathbb{B}_i)$ — правые идеалы, так что

$$\mathcal{M}_{m_{k+1}} \subset \sum_{i=1}^{k} \mathbb{F}_{m_{i+1}}(\mathbb{B}_i).$$

Тогда по теореме 3 $\mathcal{R}_{k+1}(\mathcal{M}_{m_{k+1}}) = \langle 0 \rangle$. Поэтому $\mathcal{R}_{k+1} = 0$. Но поскольку $\#\mathbb{B}_i < i^2 d^{2i} m_i (m_i + q_i - 1)^{q_i - 1}$, по выбору целых чисел m_i получаем $\#\mathbb{B}_i < d^{m_i(1 - 1/2d^2)}$, и по теореме 5 $\mathcal{R}_i \neq 0$, $i \geqslant 1$, в частности $\mathcal{R}_{k+1} \neq 0$. Это противоречие доказывает теорему. □

Пусть A — ассоциативная ниль-алгебра из этой теоремы с порождающими $X_1, \ldots, X_d$ над полем K. Обозначим через $A\mathcal{L}$ алгебру Ли, порождённую $X_1, \ldots, X_d$. Если характеристика поля K не равна 2, можно определить на A операцию $a \odot b = \frac{1}{2}(ab + ba)$. Это умножение превращает A в йорданову алгебру. Обозначим через $A^{(+)}$ её йорданову подалгебру, порождённую $X_1, \ldots, X_d$. Тогда алгебры $A\mathcal{L}$ и $A^{(+)}$ доказывают следующий результат.

Следствие 2. *Для любого целого $d \geqslant 2$ и над любым полем* (*над любым полем, содержащим* $1/2$) *существуют почти нильпотентная ненильпотентная ниль-алгебра Ли* (*соответственно йорданова ниль-алгебра*), *порождённая d элементами.*

Рассмотрим теперь ассоциативную ниль-алгебру A из последней теоремы, порождённую элементами $X_1, \ldots, X_d$ над полем K с единицей 1. Определим на $1+A$ операцию $(1+a)(1+b) = 1+a+b+ab$. Тогда $1+A$ — группа, которая является p-группой, если характеристика поля K равна простому числу p. В этом случае подгруппа G в $1+A$, порождённая $1+X, \ldots, 1+X_d$, удовлетворяет следующему утверждению.

Следствие 3. *Для любого целого $d \geqslant 2$ и любого простого p ($p = 0$) существует почти нильпотентная бесконечная p-группа (соответственно группа без кручений), порождённая d элементами.*

Литература

[1] Голод Е. С. О ниль-алгебрах и финитно аппроксимируемых p-группах // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1964. — Т. 28. — С. 273—276.

[2] Голод Е. С. О некоторых проблемах бернсайдовского типа // Труды Международного конгресса математиков, 1966. — М.: Мир, 1968. — С. 284—289.

[3] Голод Е. С., Шафаревич И. Р. О башне полей классов // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1964. — Т. 28. — С. 261—272.

[4] Курош А. Г. Проблемы теории колец, связанные с проблемой Бернсайда о периодических группах // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1941. — Т. 5. — С. 233—241.

[5] Burnside W. On an unsettled question in the theory of discontinuous groups // Quart. J. Pur. Appl. Math. — 1902. — Vol. 33. — P. 230—238.

[6] Hammoudi L. Quotients of nilalgebras and their associated groups // Pacific J. Math. — 2003. — Vol. 212, no. 1. — P. 93—101.

[7] Hammoudi L. Burnside and Kurosh problems // Internat. J. Algebra Comput. — 2004. — Vol. 14, no. 2. — P. 197—211.

[8] Smoktunowicz A. Polynomial rings over nil rings need not be nil // J. Algebra. — 2000. — Vol. 233. — P. 427—436.

[9] Smoktunowicz A. Amitsur's conjecture on polynomial rings in n commuting indeterminates // Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A. — Vol. 102, no. 2. — P. 205—213.

[10] Smoktunowicz A. Simple nil ring exists // Comm. Algebra. — 2002. — Vol. 30. — P. 27—59.

[11] Zelmanov E. Nil rings and periodic groups. — Seoul: Korean Math. Soc., 1992.