Псевдорациональный ранг факторно делимой группы

А. В. ЦАРЁВ
Рязанский государственный педагогический университет
e-mail: an-tsarev@yandex.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: кольцо псевдорациональных чисел, псевдорациональный ранг, факторно делимая смешанная группа.

Аннотация

В работе изучаются факторно делимые смешанные группы. Для них рассматривается введённый А. А. Фоминым новый инвариант — псевдорациональный ранг.

Abstract

A. V. Tsarev, Pseudorational rank of a quotient divisible group, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 3, pp. 201—213.

We study quotient divisible mixed groups. For these groups we consider the pseudorational rank, a new invariant introduced by A. A. Fomin.

Введение

В [7] А. А. Фомин и У. Уиклесс ввели понятие смешанной факторно делимой группы и построили категорию $\mathcal{QD}$, объектами которой являются эти группы, а морфизмами — квазигомоморфизмы, там же они доказали, что категория $\mathcal{QD}$ двойственна категории $\mathcal{QTF}$ — категории абелевых групп без кручения конечного ранга с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов. Отметим, что группы из категории $\mathcal{QD}$ привлекли к себе внимание довольно давно. Так, например, факторно делимые группы без кручения — это в точности классические факторно делимые группы, которые в 1961 году рассмотрели Р. Бомон и Р. Пирс в [4], а С. Глаз и У. Уиклесс в [8] построили класс $\mathcal{G}$, состоящий из смешанных факторно делимых групп.

Для групп без кручения конечного ранга и факторно делимых групп А. А. Фомин в [6] ввёл понятие псевдорационального типа и псевдорационального ранга. В [2, 3] содержится ряд результатов для групп без кручения относительно введённых Фоминым понятий. Здесь же эти понятия рассматриваются для факторно делимых групп.

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 3, с. 201—213.
© 2005 *Центр новых информационных технологий МГУ, Издательский дом «Открытые системы»*

Под группой в работе подразумевается абелева группа, записанная аддитивно; $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\hat{\mathbb{Z}}_p$ — обозначения колец целых, рациональных и целых p-адических чисел соответственно, P — множество всех простых чисел. Если S — подмножество группы G, то $\langle S\rangle$ — подгруппа, порождённая множеством S, а $\langle S\rangle_*$ — сервантная оболочка S в G, состоящая из всех таких элементов $x \in G$, что $nx \in \langle S\rangle$ для некоторого натурального n. Через $\mathrm{r}(G)$ будем обозначать ранг без кручения группы G, через $\mathrm{r}^*(G)$ и $\mathrm{r}^*(M)$ — псевдорациональный ранг группы G и R-модуля M соответственно. Подгруппа F называется полной в группе G, если G/F — периодическая группа. Через $\mathrm{t}(G)$ и $\hat{G}$ будем обозначать периодическую часть и $\mathbb{Z}$-адическое пополнение группы G соответственно. Определения других используемых понятий и обозначений можно найти в [1].

1. Модули над кольцом псевдорациональных чисел

Рассмотрим подкольцо в кольце $J = \prod\limits_{p\in P} \hat{\mathbb{Z}}_p$, порождённое идеалом $\bigoplus\limits_{p\in P} \hat{\mathbb{Z}}_p$ и единицей кольца.

Определение 1 ([5]). Кольцо $R = \left\langle 1, \bigoplus\limits_{p\in P} \hat{\mathbb{Z}}_p \right\rangle_*$ называется кольцом псевдорациональных чисел.

Рассмотрим также другие конструкции колец, приведённые в [5]. Пусть $\chi = (m_p)$ — произвольная характеристика, $K_p = \mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z}$ или $K_p = \hat{\mathbb{Z}}_p$ при $m_p < \infty$ и $m_p = \infty$ соответственно. Если χ содержит бесконечно много ненулевых элементов, то рассмотрим подкольцо $R_\chi = \left\langle 1, \bigoplus\limits_{p\in P} K_p \right\rangle_*$ кольца $\prod\limits_{p\in P} K_p$. Если все p-компоненты χ, за исключением $p_1, \ldots, p_n$, равны нулю, то рассмотрим кольца $K_\chi = K_{p_1} \oplus \ldots \oplus K_{p_n}$ и $R_\chi = \mathbb{Q} \oplus K_\chi$. Заметим, что если $\chi = (\infty)$, то кольцо R_χ есть в точности кольцо псевдорациональных чисел.

Следующие свойства кольца псевдорациональных чисел более или менее очевидны.

Свойства.

1. *Элемент $r = (\alpha_p) \in \prod\limits_{p\in P} \hat{\mathbb{Z}}_p$ принадлежит кольцу R тогда и только тогда, когда для него найдётся рациональное число $|r| = m/n$, такое что $n\alpha_p = m$ почти при всех простых p.*
2. *Элементы вида $\varepsilon_p = (0, \ldots, 0, 1_p, 0, \ldots)$ являются идемпотентами кольца R. Более того, любой идемпотент кольца R имеет вид $\varepsilon = \varepsilon_{p_1} + \ldots + \varepsilon_{p_n}$ или $1 - \varepsilon$.*
3. *$T = \bigoplus\limits_{p\in P} \hat{\mathbb{Z}}_p$ является идеалом кольца R и состоит из всех таких $r \in R$, что $|r| = 0$.*

Всюду далее для произвольного псевдорационального числа r через $|r|$ будем обозначать рациональное число, определённое в свойстве 1, а через T будем обозначать идеал кольца R, определённый в свойстве 3.

Далее мы рассмотрим некоторые инварианты и свойства модулей над кольцом псевдорациональных чисел.

Определение 2 ([5]). R-модуль M называется делимым, если его аддитивная группа делимая без кручения (при этом $rm = |r|m$). Если R-модуль не содержит делимых подмодулей, то он называется редуцированным.

Теорема 1 ([5]). *Для произвольного R-модуля M справедливы следующие утверждения.*

1. *Модуль M либо редуцированный, либо содержит наибольший делимый подмодуль $\operatorname{div} M$.*
2. $\operatorname{div} M = \{m \in M \mid tm = 0$ *для любого* $t \in T\}$.
3. $\operatorname{div} M$ *выделяется прямым слагаемым в* M. □

Пусть M — произвольный конечно порождённый R-модуль с системой образующих $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Тогда очевидно, что $\hat{\mathbb{Z}}_p$-модуль $M_p = \varepsilon_p M$ порождается элементами $\{\varepsilon_p x_1, \ldots, \varepsilon_p x_n\}$. Конечно порождённый p-адический модуль M_p представи́м в виде прямой суммы циклических $\hat{\mathbb{Z}}_p$-модулей:

$$M_p = \langle a_1 \rangle_{\hat{\mathbb{Z}}_p} \oplus \ldots \oplus \langle a_n \rangle_{\hat{\mathbb{Z}}_p},$$

где некоторые слагаемые могут быть нулевыми.

Циклический $\hat{\mathbb{Z}}_p$-модуль изоморфен или $\mathbb{Z}/p^{k_{ip}}\mathbb{Z}$, где k_{ip} — целое неотрицательное число, или $\hat{\mathbb{Z}}_p$. Следовательно, изоморфизм

$$M_p \cong \mathbb{Z}(p^{k_{1p}}) \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}(p^{k_{tp}}) \oplus \bigoplus_s \hat{\mathbb{Z}}_p, \quad t + s = n,$$

определяет следующую упорядоченную последовательность целых неотрицательных чисел и символов ∞:

$$0 \leqslant k_{np} \leqslant \ldots \leqslant k_{np} \leqslant \infty, \tag{1}$$

где последние s членов есть символы ∞ ($0 \leqslant s \leqslant n$). Последовательность (1) по всем простым p определяет последовательность характеристик. Несколько первых характеристик могут быть нулевыми. Если их отбросить, получим последовательность

$$\chi_1 \leqslant \ldots \leqslant \chi_k. \tag{2}$$

Множество характеристик (2) будем называть *приведённым типом Ричмана* или просто *типом Ричмана* конечно порождённого R-модуля M. *Заметим, что в отличие от групп без кручения тип Ричмана R-модуля состоит из характеристик, а не из типов.*

Определение 3 ([5]). Псевдорациональным рангом R-модуля M называется $\dim_Q(M/TM)$ — размерность фактор-модуля M/TM, рассматриваемого в качестве векторного пространства над полем $Q \cong R/T$.

Свойства.

4. *Если M — произвольный R-модуль, то множество*
$$TM = \{tm \mid t \in T,\ m \in M\}$$
является подмодулем модуля M, причём $TM = \bigoplus_{p\in P} M_p$, где $M_p = \varepsilon_p M$.
5. *Если N — подмодуль R-модуля M, то $\mathrm{r}^*(M) = \mathrm{r}^*(M/N) + \mathrm{r}^*(N)$.*
6. *Если M — R-модуль локально свободного типа Ричмана* (*в типе Ричмана нет символов ∞*)*, то $\mathrm{r}^*(M) = \mathrm{r}(M)$.*

Так как $T(M/N) = TM/TN$ и $(M/N)/(TM/TN) \cong (M/TM)/(N/TN)$, то
$$\mathrm{r}^*(M) = \dim_Q((M/N)/(TM/TN)) + \dim_Q(N/TN) = \mathrm{r}^*(M/N) + \mathrm{r}^*(N).$$

Если M — R-модуль локально свободного типа Ричмана, то $TM = \mathrm{t}(M)$, следовательно, $\mathrm{r}^*(M) = \mathrm{r}(M/\,\mathrm{t}(M)) = \mathrm{r}(M)$.

2. Факторно делимые группы

Определение 4 ([7]). Группа G называется факторно делимой, если она не содержит периодических делимых подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу конечного ранга F, что G/F — периодическая делимая группа.

Линейно независимую систему элементов $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, порождающую группу F из определения 4, будем называть *фундаментальной системой* факторно делимой группы G, а саму группу F — её *фундаментальной подгруппой*.

Пусть G — редуцированная факторно делимая смешанная группа. Рассмотрим её $\mathbb{Z}$-адическое пополнение $\hat{G}$. Канонический гомоморфизм $\alpha\colon G \to \hat{G}$ является мономорфизмом, так как $\ker\alpha = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} nG = G^1 = 0$. Группа $\hat{G}$ является $\hat{\mathbb{Z}}$-модулем, а значит, и модулем над кольцом псевдорациональных чисел.

Определение 5. [6] R-модуль $\mathcal{R}(G) = \operatorname{div} G \oplus \langle\alpha(G)\rangle_R$ называется псевдорациональным типом факторно делимой группы G.

Очевидно, что существует естественное вложение $\varphi\colon G \to \mathcal{R}(G)$, поэтому везде далее будем отождествлять G с $\varphi(G)$.

Лемма 1 ([6]). *Пусть $F = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}x_i$ — такая свободная подгруппа факторно делимой группы G, что G/F — периодическая делимая группа. Тогда*
$$\mathcal{R}(G) = \langle F\rangle_R = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle_R.$$

Доказательство. Нам достаточно показать, что любой элемент $g \in G$ можно представить в виде $g = r_1x_1 + \ldots + r_nx_n$, где $r_1, \ldots, r_n \in R$.

Так как G/F — периодическая группа, то $mg = m_1x_1 + \ldots + m_nx_n$ при некоторых $m, m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$ и $m \neq 0$. Тогда
$$mg = (1-\varepsilon)(m_1x_1 + \ldots + m_nx_n) + \varepsilon(m_1x_1 + \ldots + m_nx_n),$$

где $\varepsilon = \varepsilon_{p_1} + \ldots + \varepsilon_{p_s}$ и $p_1, \ldots, p_s$ — все простые делители m. Так как идемпотент $(1-\varepsilon)$ делится на m, то

$$m\left(g - \frac{1-\varepsilon}{m}(m_1x_1 + \ldots + m_nx_n)\right) \in \varepsilon\mathcal{R}(G) = \varepsilon_{p_1}\mathcal{R}(G) \oplus \ldots \oplus \varepsilon_{p_s}\mathcal{R}(G).$$

$\hat{\mathbb{Z}}_p$-модуль $\varepsilon_p\mathcal{R}(G)$ совпадает с p-адическим пополнением $\hat{G}_p$, следовательно,

$$g - \frac{1-\varepsilon}{m}(m_1x_1 + \ldots + m_nx_n) \in \hat{G}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \hat{G}_{p_s}.$$

Но эти подмодули R-модуля $\mathcal{R}(G)$ порождаются элементами $\varepsilon_{p_j}x_i$, $j = 1, \ldots, s$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, значит,

$$g - \frac{1-\varepsilon}{m}(m_1x_1 + \ldots + m_nx_n) = \varepsilon s_1x_1 + \ldots + \varepsilon s_nx_n,$$

где $s_1, \ldots, s_n \in R$. Таким образом, $g = r_1x_1 + \ldots + r_nx_n$, где $r_1, \ldots, r_n \in R$. □

Следствие 1. *Псевдорациональный тип факторно делимой группы является конечно порождённым R-модулем.* □

Рассмотрим простейшие свойства псевдорационального типа, которые будут использоваться в дальнейшем.

Теорема 2. *Пусть G и H — факторно делимые группы. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $H \subseteq G$, то $\mathcal{R}(H) \subseteq \mathcal{R}(G)$.*
2. $\mathrm{t}(G) = \mathrm{t}(\mathcal{R}(G))$.
3. $\mathcal{R}(nG) = n\mathcal{R}(G)$ *при любом* $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство.

1. Так как $H \subseteq G$ и $\mathcal{R}(G) = \operatorname{div} G \oplus \langle G/\operatorname{div} G\rangle_R$, то любой элемент из $\mathcal{R}(H)$ содержится в $\mathcal{R}(G)$.

2. Так как $G \subseteq \mathcal{R}(G)$, то $\mathrm{t}(G) \subseteq \mathrm{t}(\mathcal{R}(G))$. С другой стороны, $\mathrm{t}(\mathcal{R}(G)) \subseteq$ $\subseteq \mathrm{t}(\hat{G}) = \mathrm{t}(G)$, следовательно, $\mathrm{t}(\mathcal{R}(G)) = \mathrm{t}(G)$.

3. Из леммы 1 следует, что $\mathcal{R}(nG) = \langle nF\rangle_R = n\langle F\rangle_R = n\mathcal{R}(G)$. □

Возьмём произвольный элемент g из факторно делимой группы G. Для каждого простого p число k будем называть *p-порядком* элемента g, если p^k — порядок элемента $\varepsilon_pg \in \mathcal{R}(G)$ (p-порядок элемента g будем обозначать $\mathrm{o}_p(g)$). При этом если $\varepsilon_pg = 0$, то будем считать, что $\mathrm{o}_p(g) = 0$. Последовательность p-порядков

$$\chi(g) = (\mathrm{o}_{p_1}(g), \ldots, \mathrm{o}_{p_n}(g), \ldots)$$

будем называть *характеристикой элемента g*.

Теорема 3. *Пусть G — произвольная факторно делимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Для любого $g \in G$ и $n \in \mathbb{N}$ характеристики $\chi(g)$ и $\chi(ng)$ принадлежат одному типу.*

2. *Пусть* $g \in G$ *и* $\langle g\rangle_R \cong R_\chi$, *тогда* $\chi(g) = \chi$.
3. *Если* $\varphi\colon G \to H$ *и* $g \in G$, *то* $\chi(\varphi(g)) \leqslant \chi(g)$.

Доказательство.

1. Если НОД$(p_i, n) = 1$, то $\mathrm{o}(\varepsilon_{p_i} g) = \mathrm{o}(\varepsilon_{p_i} ng)$, а если $\mathrm{o}(\varepsilon_{p_i} g) = \infty$, то и $\mathrm{o}(\varepsilon_{p_i} ng) = \infty$. Из этого следует, что характеристики $\chi(g)$ и $\chi(ng)$ могут отличаться лишь конечным множеством конечных элементов.

2. Если $\mathrm{o}(\varepsilon_p g) = \infty$, то $\langle \varepsilon_p g\rangle_R \cong \hat{\mathbb{Z}}_p$, а если $\mathrm{o}(\varepsilon_p g) = p^k$, то $\langle \varepsilon_p g\rangle_R \cong \mathbb{Z}(p^k)$. Тогда $\chi_p = \chi_p(g)$ при любом простом p, т. е. $\chi = \chi(g)$.

3. Так как $\mathrm{o}_p(\varphi(g)) \leqslant \mathrm{o}_p(g)$ при любом простом p, то $\chi(\varphi(g)) \leqslant \chi(g)$. □

3. Псевдорациональный ранг

Для произвольной факторно делимой группы G определим её псевдорациональный ранг как псевдорациональный ранг её псевдорационального типа, т. е.

$$\mathrm{r}^*(G) = \mathrm{r}^*(\mathcal{R}(G)).$$

Теорема 4. *Факторно делимая группа имеет псевдорациональный ранг* 0 *тогда и только тогда, когда она редуцированная и её тип Ричмана состоит из почти нулевых характеристик.*

Доказательство. Пусть факторно делимая группа G имеет псевдорациональный ранг 0. Так как $\mathcal{R}(G)$ — конечно порождённый R-модуль, то найдётся такое $\varepsilon \in R$, что $\varepsilon\mathcal{R}(G) = \mathcal{R}(G)$. Отсюда следует, что группа G редуцированная и $\varepsilon_p\mathcal{R}(G) = 0$ почти при всех простых p, т. е. тип Ричмана группы G состоит из почти нулевых характеристик.

Если G — редуцированная факторно делимая группа, тип Ричмана которой состоит из почти нулевых характеристик, то $\varepsilon\mathcal{R}(G) = \mathcal{R}(G)$, следовательно, $\mathrm{r}^*(\mathcal{R}(G)) = \mathrm{r}^*(G) = 0$. □

Пусть G — произвольная факторно делимая смешанная группа, $M = \mathcal{R}(G)$ — псевдорациональный тип группы G и $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — произвольная конечная система элементов из G. Будем считать, что $G \subseteq M$. Тогда рассмотрим два множества:

$$\nabla G_X = \{(r_1, \ldots, r_n) \in R^n \mid r_1x_1 + \ldots + r_nx_n \in G\},$$
$$\Delta G_X = \{(r_1, \ldots, r_n) \in R^n \mid r_1x_1 + \ldots + r_nx_n = 0\}.$$

Очевидно, что ∇G_X — группа по сложению, а ΔG_X — R-модуль. В случае, если X — фундаментальная система в G, модуль ΔG_X будем называть *модулем псевдорациональных отношений* группы G.

Теорема 5. *Пусть* G — *произвольная факторно делимая группа, множество* $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *является фундаментальной системой группы* G. *Тогда* $G \cong \nabla G_X / \Delta G_X$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi\colon \nabla G_X \to G$, заданное правилом $\varphi((r_1,\ldots,r_n)) = r_1x_1 + \ldots + r_nx_n$. Из леммы 1 и определения группы ∇G_X следует, что φ — сюръективное отображение. Так как

$$\begin{aligned}
&\varphi((r_1,\ldots,r_n)+(s_1,\ldots,s_n)) = \varphi((r_1+s_1,\ldots,r_n+s_n)) =\\
&\quad = (r_1+s_1)x_1 + \ldots + (r_n+s_n)x_n =\\
&\quad = (r_1x_1+\ldots+r_nx_n) + (s_1x_1+\ldots+s_nx_n) =\\
&\quad = \varphi((r_1,\ldots,r_n)) + \varphi((s_1,\ldots,s_n)),
\end{aligned}$$

то φ — эпиморфизм, причём $\ker\varphi = \Delta G_X$. Таким образом, $G \cong \nabla G_X/\Delta G_X$. □

Теорема 6. *Пусть G — произвольная факторно делимая группа, система $X = \{x_1,\ldots x_n\} \subset G$ такова, что $\mathcal{R}(G) = \langle X\rangle_R$. Тогда*

$$n = \mathrm{r}^*(G) + \mathrm{r}^*(\Delta G_X).$$

Доказательство. Зададим отображение $\varphi\colon R^n \to \mathcal{R}(G)$ правилом

$$\varphi((r_1,\ldots,r_n)) = r_1x_1 + \ldots + r_nx_n.$$

Данное отображение, очевидно, является эпиморфизмом, причём

$$\ker\varphi = \{(r_1,\ldots,r_n) \in R^n \mid r_1x_1+\ldots+r_nx_n = 0\} = \Delta G_X.$$

Отсюда следует, что $\mathcal{R}(G) \cong R^n/\Delta G_X$, а значит,

$$\mathrm{r}^*(R^n) = n = \mathrm{r}^*(\mathcal{R}(G)) + \mathrm{r}^*(\Delta G_X) = \mathrm{r}^*(G) + \mathrm{r}^*(\Delta G_X).$$

Теорема доказана. □

Следствие 2. *Если G — произвольная факторно делимая группа, ΔG_X — её модуль псевдорациональных отношений, то*

$$\mathrm{r}^*(G) = \mathrm{r}(G) - \mathrm{r}^*(\Delta G_X).$$

4. Группа $\mathrm{Hom}(G, R)$

Для начала построим для произвольной факторно делимой группы G ещё один R-модуль. Пусть $X = \{x_1,\ldots,x_n\}$ — фундаментальная система группы G, ΔG_X — модуль псевдорациональных отношений, построенный на этой системе. Рассмотрим модуль

$$\Lambda G_X = \left\{ (r_1,\ldots,r_n) \in R^n \;\middle|\; \Delta G_X \begin{pmatrix} r_1\\ \ldots\\ r_n\end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

Теорема 7 ([6]). *Если M — редуцированный R-модуль или L — делимый R-модуль, то $\mathrm{Hom}_Z(L,M) = \mathrm{Hom}_R(L,M)$.*

Доказательство. Пусть модуль M редуцированный. Для любого простого p группа $(1-\varepsilon_p)L$ является p-делимой, а группа $\varepsilon_p L$ является q-делимой для каждого простого $q \neq p$. Если $f \in \operatorname{Hom}(L, M)$, то $f((1-\varepsilon_p))L \subseteq (1-\varepsilon_p))M$ и $f(\varepsilon_p L) \subseteq \varepsilon_p M \oplus \operatorname{div} M$. Так как M — редуцированный R-модуль, то $\operatorname{div} M = 0$ и $f(\varepsilon_p L) \subseteq \varepsilon_p M$, следовательно, $f(\varepsilon_p x) = \varepsilon_p f(\varepsilon_p x)$ и

$$0 = \varepsilon_p f(1-\varepsilon_p)x) = \varepsilon_p f(x) - \varepsilon_p f(\varepsilon_p x) = \varepsilon_p f(x) - f(\varepsilon_p x).$$

Отсюда следует, что $f(\varepsilon_p x) = \varepsilon_p f(x)$ для любого $x \in L$. Так как $\varepsilon_p L$ и $\varepsilon_p M$ полны в p-адической топологии, то гомоморфизм $f\colon \varepsilon_p L \to \varepsilon_p M$ является $\hat{\mathbb{Z}}_p$-гомоморфизмом. Тогда $f(r\varepsilon_p x) = r\varepsilon_p f(x)$ для всех $r \in R$ и $x \in L$, и следовательно, $f \in \operatorname{Hom}_R(L, M)$.

Пусть L — делимый модуль. Тогда $f(L) \subseteq \operatorname{div} M$ и

$$f(rx) = f(|r|x) = |r|f(x) = rf(x)$$

для всех $r \in R$ и $x \in L$. □

Лемма 2. *Пусть G и H — некоторые факторно делимые смешанные группы, причём H — редуцированная группа или G — делимая группа, $F = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \mathbb{Z}x_i$ — фундаментальная подгруппа группы G, $\varphi\colon G \to H$ — произвольный гомоморфизм. Тогда если*

$$g = r_1x_1 + \ldots + r_nx_n \in G, \quad r_1, \ldots, r_n \in R,$$

то

$$\varphi(g) = r_1\varphi(x_1) + \ldots + r_n\varphi(x_n).$$

Доказательство. Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. G и H — редуцированные группы. Пусть $\hat{G}$ и $\hat{H}$ — $\mathbb{Z}$-адические пополнения групп G и H. Тогда существует единственный гомоморфизм φ^*, такой что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ \big\downarrow{\scriptstyle\mu} & & \big\downarrow{\scriptstyle\nu} \\ \hat{G} & \xrightarrow{\varphi^*} & \hat{H} \end{array}\ .$$

Здесь отображения μ и ν являются мономорфизмами, поэтому можно считать, что $G \subset \hat{G}$ и $H \subset \hat{H}$. Так как $\hat{G}$ и $\hat{H}$ — редуцированные R-модули, то, применив теорему 7, получим

$$\varphi(g) = \varphi(r_1x_1 + \ldots + r_nx_n) = \varphi^*(r_1x_1 + \ldots + r_nx_n) =$$
$$= r_1\varphi^*(x_1) + \ldots + r_n\varphi^*(x_n) = r_1\varphi(x_1) + \ldots + r_n\varphi(x_n).$$

Случай 2. G и H — делимые группы без кручения, тогда они являются делимыми R-модулями и, следовательно, по теореме 7

$$\varphi(g) = \varphi(r_1x_1 + \ldots + r_nx_n) = r_1\varphi(x_1) + \ldots + r_n\varphi(x_n).$$

Случай 3. G — делимая группа и $H = D \oplus H_1$, где D — делимая группа без кручения, а H_1 — редуцированная группа. Так как $\mathrm{Hom}(G, H) = \mathrm{Hom}(G, D)$, то данный случай сводится к случаю 2.

Случай 4. H — редуцированная группа и $G = D \oplus G_1$, где D — делимая группа без кручения, а G_1 — редуцированная группа. Так как $\mathrm{Hom}(G, H) = \mathrm{Hom}(G_1, H)$, то данный случай сводится к случаю 1. □

Отметим, что лемма 2 остаётся справедливой, если H — произвольная группа с нулевой ульмовской подгруппой (например, если $H = R$ — аддитивная группа кольца псевдорациональных чисел).

Теорема 8. *Пусть G — произвольная факторно делимая группа. Если $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — её фундаментальная система, то гомоморфизм $\varphi\colon G \to R$, такой что $\varphi(x_i) = r_i$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$, существует тогда и только тогда, когда $(r_1, \ldots, r_n) \in \Lambda G_X$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, R)$ и $(s_1, \ldots, s_n)$ — произвольный элемент из ΔG_X. Тогда $s_1x_1 + \ldots + s_nx_n = 0$, и значит, $\varphi(s_1x_1 + \ldots + s_nx_n) = 0$. Но из доказанного выше следует, что

$$\varphi(s_1x_1 + \ldots + s_nx_n) = s_1\varphi(x_1) + \ldots + s_n\varphi(x_n),$$

значит, для любого $(s_1, \ldots, s_n) \in \Delta G_X$ справедливо

$$s_1\varphi(x_1) + \ldots + s_n\varphi(x_n) = 0,$$

т. е. $(\varphi(x_1), \ldots, (\varphi(x_n)) \in \Lambda G_X$.

Проверим обратное утверждение. Пусть $(r_1, \ldots, r_n)$ — произвольный элемент модуля ΛG_X. Докажем существование такого гомоморфизма $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, R)$, что $\varphi(x_i) = r_i$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$.

Пусть g — произвольный элемент группы G. Так как G сервантно вкладывается в аддитивную группу R-модуля $\langle X \rangle_R$, то $g = s_1x_1 + \ldots + s_nx_n$, где $s_1, \ldots, s_n \in R$. Рассмотрим соответствие между элементами группы G и кольца псевдорациональных чисел, заданное правилом

$$\varphi(g) = s_1r_1 + \ldots + s_nr_n.$$

Покажем, что φ — отображение. Пусть $g = s'_1x_1 + \ldots + s'_nx_n$, где $s'_1, \ldots, s'_n \in R$, — другое представление элемента g. Тогда

$$(s_1 - s'_1)x_1 + \ldots + (s_n - s'_n)x_n = 0,$$

т. е.

$$((s_1 - s'_1), \ldots, (s_n - s'_n)) \in \Delta G_X.$$

Так как $(r_1, \ldots, r_n) \in \Lambda G_X$, то $(s_1 - s'_1)r_1 + \ldots + (s_n - s'_n)r_n = 0$, значит,

$$\varphi(s_1x_1 + \ldots + s_nx_n) = \varphi(s'_1x_1 + \ldots + s'_nx_n),$$

т. е. φ — отображение.

Пусть $g_1, g_2 \in G$ и $g_1 = s_1x_1+\ldots+s_nx_n$, $g_2 = t_1x_1+\ldots+t_nx_n$ — произвольные представления элементов g_1, g_2 в R-модуле $\langle X\rangle_R$. Тогда

$$\begin{aligned}\varphi(g_1+g_2) &= \varphi((s_1+t_1)x_1+\ldots+(s_n+t_n)x_n) = \\ &= (s_1+t_1)r_1+\ldots+(s_n+t_n)r_n = \\ &= (s_1r_1+\ldots+s_nr_n)+(t_1r_1+\ldots+t_nr_n) = \varphi(g_1)+\varphi(g_2).\end{aligned}$$

Таким образом, φ — гомоморфизм, причём $\varphi(x_i) = r_i$ $(i \in \{1,\ldots,n\})$. □

Следствие 3. *Если G — произвольная факторно делимая группа, то*

$$\mathrm{Hom}(G,R) \cong \Lambda G_X. \quad \square$$

Теорема 9. *Если G — произвольная факторно делимая группа, то*

$$\mathrm{r}^*(G) \geqslant \mathrm{r}^*(\mathrm{Hom}(G,R)).$$

Доказательство. Пусть $X = \{x_1,\ldots,x_n\}$ — фундаментальная система группы G. Рассмотрим R-модуль

$$\Lambda^*G_X = \left\{(r_1,\ldots,r_n) \in R^n \;\middle|\; \Delta G_X \begin{pmatrix} r_1 \\ \ldots \\ r_n\end{pmatrix} \subseteq T\right\}.$$

Векторное пространство $\Lambda^*G_X/T\Lambda^*G_X$ является ортогональным дополнением к пространству $\Delta G_X/T\Delta G_X$, следовательно,

$$\mathrm{r}^*(\Lambda^*G_X) + \mathrm{r}^*(\Delta G_X) = \mathrm{r}(G).$$

Тогда, учитывая следствие 3 и то, что $\Lambda G_X \subseteq \Lambda^*G_X$, получаем

$$\mathrm{r}^*(\mathrm{Hom}(G,R)) \leqslant \mathrm{r}^*(\Lambda^*G_X) = \mathrm{r}(G) - \mathrm{r}^*(\Delta G_X) = \mathrm{r}^*(G).$$

Теорема доказана. □

Отметим также следующее утверждение.

Теорема 10. *Если G — группа конечного ранга (не обязательно факторно делимая), то*

$$T\cdot\mathrm{Hom}(G,R) = \mathrm{Hom}(G,T).$$

Доказательство. Так как $T\cdot\mathrm{Hom}(G,R) \subseteq \mathrm{Hom}(G,T)$, то достаточно показать, что любой гомоморфизм φ из G в T лежит в $T\cdot\mathrm{Hom}(G,R)$.

Пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}(G,T)$, $F = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}x_i$ — полная свободная подгруппа в G. Тогда существует такое $\varepsilon \in R$, что $\varphi(F) \subseteq \varepsilon R$. Если g — произвольный элемент из G, то $mg \in F$ при некотором натуральном m, следовательно, $\varphi(mg) = m\varphi(g) \in \varepsilon R$, а значит, $\varphi(g) \in \varepsilon R$. Таким образом, $\varphi(G) \subseteq \varepsilon R$ и $\varphi \in T\cdot\mathrm{Hom}(G,R)$. □

5. Радикал факторно делимой группы

Рассмотрим ещё одну важную подгруппу в факторно делимой группе. *Радикалом* факторно делимой группы G будем называть группу

$$G[0] = \bigcap_{\varphi\colon G\to R} \ker\varphi.$$

Теорема 11. *Пусть G — произвольная факторно делимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. $G[0] = \{g \in G \mid \chi(g)$ не содержит символов $\infty\}$.
2. $\langle G[0]\rangle_R = G[0]$.
3. *$G/G[0]$ является факторно делимой группой без кручения.*
4. $\mathrm{r}^*(G/\mathrm{t}(G)) = \mathrm{r}^*(G/G[0]) + \mathrm{r}^*(G[0])$.

Доказательство.

1. Пусть $H = \{g \in G \mid \chi(g)$ не содержит символов $\infty\}$ и $\varphi \in \mathrm{Hom}(G,R)$. Если $g \in H$, то $\chi(\varphi(g)) < \chi(g)$, в частности $\chi(\varphi(g))$ не содержит символов ∞. Но $\varphi(g) \in R$, следовательно, $\varphi(g) = 0$, т. е. $H \subseteq G[0]$.

Пусть $g \in G[0]$. Если $\mathrm{o}_p(g) = \infty$ при некотором простом p, то $\varepsilon_p\mathcal{R}(G)$ содержит прямые слагаемые вида $\hat{\mathbb{Z}}_p$. Поскольку $\varepsilon_p\mathcal{R}(G)$ — конечно порождённый $\hat{\mathbb{Z}}_p$-модуль, то существует такой гомоморфизм $\varphi_p\colon \varepsilon_p\mathcal{R}(G) \to \hat{\mathbb{Z}}_p$, что $\varepsilon_p g \notin \ker\varphi_p$. Так как $\varepsilon_p\mathcal{R}(G)$ — прямое слагаемое в $\mathcal{R}(G)$, а $\hat{\mathbb{Z}}_p$ — прямое слагаемое в R, то существует гомоморфизм $\varphi\colon \mathcal{R}(G) \to R$, такой что $g \notin \ker\varphi$. Пусть ψ — ограничение гомоморфизма φ на группу G. Тогда $\psi \in \mathrm{Hom}(G,R)$ и $\psi(g) = \varphi(g) \neq 0$, т. е. $g \notin G[0]$. Получили противоречие, значит, $\chi(g)$ не содержит символов ∞ и $G[0] \subseteq H$, т. е. $G[0] = H$.

2. Пусть $g \in G[0]$, $r \in R$. Убедимся, что $rg \in G[0]$. Из свойств псевдорациональных чисел следует, что

$$r = (1-\varepsilon)\frac{m}{n} + \varepsilon r.$$

Тогда

$$n(rg) = (1-\varepsilon)mg + n(\varepsilon rg).$$

Так как $\chi(g) < \infty$, то $\varepsilon_p g \in \mathrm{t}(G)$ при любом p, следовательно, $n(\varepsilon rg) \in \mathrm{t}(G)$ и $(1-\varepsilon)mg = mg - \varepsilon mg \in G$. Таким образом, $n(rg) \in G$, а значит, в силу строения группы G $rg \in G$. Учитывая, что $\chi(rg) \leqslant \chi(g) < \infty$, получаем, что $rg \in G[0]$.

3. Из свойства 2 следует, что $G[0]$ — R-модуль, причём $TG[0] = \mathrm{t}(G[0]) = \mathrm{t}(G)$. Тогда из свойств R-модулей следует, что $G[0]/\mathrm{t}(G) = G[0]/TG[0]$ — векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$, т. е. $G[0]/\mathrm{t}(G)$ — делимая группа без кручения.

В [6] доказано, что $G/\mathrm{t}(G)$ — факторно делимая группа без кручения. Так как $G[0]/\mathrm{t}(G)$ — делимая подгруппа $G/\mathrm{t}(G)$ и $G/G[0] \cong (G/\mathrm{t}(G))/(G[0]/\mathrm{t}(G))$, то $G/G[0]$ — факторно делимая группа без кручения.

4. Так как $G[0]/\operatorname{t}(G)$ — делимая группа, то $G/\operatorname{t}(G) \cong G[0]/\operatorname{t}(G) \oplus G/G[0]$, следовательно, $\mathrm{r}^*(G/\operatorname{t}(G)) = \mathrm{r}^*(G[0]) + \mathrm{r}^*(G/G[0])$. □

Теорема 12. *Если G — произвольная факторно делимая группа, то*

$$\mathrm{r}^*(\mathrm{Hom}(G,R)) \leqslant \mathrm{r}^*(G) - \mathrm{r}^*(G[0]).$$

Доказательство. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — фундаментальная система группы G. Рассмотрим R-модуль

$$\nabla G[0] = \{(r_1, \ldots, r_n) \in R^n \mid r_1x_1 + \ldots + r_nx_n \in G[0]\}.$$

Условие $r_1x_1 + \ldots + r_nx_n \in G[0]$ равносильно тому, что

$$\varphi(r_1x_1 + \ldots + r_nx_n) = r_1(\varphi(x_1)) + \ldots + r_n(\varphi(x_n)) = 0$$

при любом $\varphi \in \mathrm{Hom}(G,R)$, а значит,

$$(r_1, \ldots, r_n) \in \nabla G[0] \iff \Lambda G_X \begin{pmatrix} r_1 \\ \ldots \\ r_n \end{pmatrix} = 0. \tag{3}$$

Как и в доказательстве теоремы 9, из (3) получаем

$$\mathrm{r}^*(\nabla G[0]) \leqslant \mathrm{r}(G) - \mathrm{r}^*(\mathrm{Hom}(G,R)). \tag{4}$$

С другой стороны, $G[0] \cong \nabla G[0]/\Delta G_X$, следовательно,

$$\mathrm{r}^*(\nabla G[0]) = \mathrm{r}^*(G[0]) + \mathrm{r}^*(\Delta G_X) = \mathrm{r}^*(G[0]) + \mathrm{r}(G) - \mathrm{r}^*(G). \tag{5}$$

Из (4) и (5) получаем

$$\mathrm{r}^*(\mathrm{Hom}(G,R)) \leqslant \mathrm{r}^*(G) - \mathrm{r}^*(G[0]).$$

Теорема доказана. □

Лемма 3. *Радикал $G[0]$ является сервантной подгруппой группы G.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение $nx = g$, где $g \in G[0]$. Пусть x_0 — его решение в группе G, тогда

$$\varphi(g) = \varphi(nx_0) = n\varphi(x_0) = 0$$

при любом $\varphi \in \mathrm{Hom}(G,R)$. Но в R нет элементов конечного порядка, значит, из равенства $n\varphi(x_0) = 0$ следует, что $\varphi(x_0) = 0$ при любом $\varphi \in \mathrm{Hom}(G,R)$, т. е. $x_0 \in G[0]$. □

Теорема 13. *Если G — факторно делимая смешанная группа, то справедливы следующие утверждения.*

1. $\mathrm{Hom}(G,R) = 0 \iff G$ *имеет локально свободный тип Ричмана.*
2. $\mathrm{Hom}(G,R) \cong R^{\mathrm{r}(G)} \iff G$ *— свободная группа.*
3. $\mathrm{Hom}(G,R) \ncong T^{\mathrm{r}(G)}$ *для любой факторно делимой группы G.*

Доказательство.

1. Условие равенства нулю группы $\mathrm{Hom}(G, R)$ равносильно тому, что $G = G[0]$, а последнее означает, что G имеет локально свободный тип Ричмана.

2. Для факторно делимой смешанной группы G имеет место изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(G, R) \cong \mathrm{Hom}(G/G[0], R),$$

где $G/G[0]$ — факторно делимая группа без кручения конечного ранга. Используя результаты, полученные в [3], можно доказать, что для группы без кручения $G/G[0]$ условие $\mathrm{Hom}(G/G[0], R) \cong R^{\mathrm{r}(G)}$ равносильно тому, что $G/G[0]$ — свободная группа без кручения ранга $\mathrm{r}(G)$. Так как $G[0]$ — сервантная подгруппа группы G, то по известной теореме Куликова (см. [1, теорема 28.2]) из того, что группа $G/G[0]$ свободная, следует, что $G[0]$ — прямое слагаемое группы G, т. е.

$$G = G[0] \oplus F,$$

где F — свободная группа ранга $\mathrm{r}(G)$, поскольку $F \cong G/G[0]$. Из прямого разложения следует, что $\mathrm{r}(G[0]) = \mathrm{r}(G) - \mathrm{r}(F) = 0$, а значит, $G[0] = \mathrm{t}(G)$ — периодическая группа. Но группа $\mathrm{t}(G) \oplus F$ является факторно делимой тогда и только тогда, когда $\mathrm{t}(G) = 0$. Таким образом, из $\mathrm{Hom}(G, R) \cong R^{\mathrm{r}(G)}$ следует, что G — свободная группа. Обратное утверждение очевидно.

3. Если $\mathrm{Hom}(G, R) \cong T^{\mathrm{r}(G)}$ для факторно делимой группы G, то

$$\mathrm{Hom}(G/G[0], R) \cong T^{\mathrm{r}(G)}$$

для группы без кручения $G/G[0]$ конечного ранга. Но, как показано в [3], последнее равносильно тому, что $G/G[0]$ — коредуцированная локально свободная группа, что невозможно, так как $G/G[0]$ — факторно делимая группа. $\square$

Литература

[1] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1974, 1977.

[2] Царев А. В. Модуль псевдо-рациональных отношений группы // Чебышёвский сборник. — 2002. — Т. 3, вып. 1. — С. 120—134.

[3] Царев А. В. Псевдорациональный ранг абелевой группы // Сиб. мат. журн. — 2005. — Т. 46, № 1. — С. 217—229.

[4] Beaumont R., Pierce R. Torsion free rings // Illinois J. Math. — 1961. — Vol. 5. — P. 61—98.

[5] Fomin A. A. Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers // Proceedings of the Dublin's Conference on Abelian Groups. — 1999. — P. 87—100.

[6] Fomin A. A. Quotient divisible mixed groups // Contemp. Math. — 2001. — Vol. 273. — P. 117—128.

[7] Fomin A. A., Wickless W. Quotient divisible abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1998. — Vol. 126. — P. 45—52.

[8] Glaz S., Wickless W. Regular and principal projective endomorphism rings of mixed abelian groups // Comm. Algebra. — 1994. — Vol. 22. — P. 1553—1565.