Колчаны полумаксимальных колец

С. И. ЦЮПИЙ
*Киевский национальный университет
имени Тараса Шевченко*
e-mail: tsupiy@bigmir.net

УДК 512.552.1

Ключевые слова: колчаны, полумаксимальные кольца, черепичные порядки.

Аннотация

В работе исследуется множество колчанов полумаксимальных колец. Доказано, что элементы этого множества образуются из элементов множества колчанов черепичных порядков, а множество колчанов черепичных порядков с n вершинами определяется точками с целочисленными координатами, которые принадлежат граням выпуклой многогранной области из положительного октанта пространства $\mathbb{R}^{n^2-n}$, и содержит все простые ориентированные сильно связные графы с n вершинами и n петлями, не содержит графов с n вершинами и $n-1$ петлей и содержит только часть графов с n вершинами и m $(m < n-1)$ петлями.

Abstract

S. I. Tsupiy, Quivers of semi-maximal rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 3, pp. 215—224.

In this paper, the set of quivers of semi-maximal rings is investigated. It is proved that the elements of this set are formed by the elements of the set of quivers of tiled orders and that the set of quivers of tiled orders with n vertices is determined by the integer points of a convex polyhedral domain that lie in the nonnegative part of the space $\mathbb{R}^{n^2-n}$. It is also proved that the set of quivers of tiled orders with n vertices contains all simple oriented strongly connected graphs with n vertices and n loops, does not contain any graphs with n vertices and $n-1$ loops, and contains only a part of the graphs with n vertices and m $(m < n-1)$ loops.

1. Введение

Понятие колчана широко используется в структурной теории колец. При этом возникает проблема изучения колчанов различных классов колец. В статье исследуется множество колчанов полумаксимальных колец, построенных по радикалу Джекобсона, в целом. Рассматривается задача о реализации графов в качестве колчанов полумаксимальных колец. Некоторые свойства конечного подмножества этого множества (с ограничением на число вершин колчанов) рассматривались в [1].

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 3, с. 215—224.

Основные сведения о полумаксимальных кольцах и их колчанах можно найти в [2].

Полумаксимальные кольца являются конечными прямыми произведениями черепичных порядков над дискретно нормированными кольцами. Пусть Λ — черепичный порядок, мы будем записывать его как $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$, где $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ — матрица показателей Λ и $\mathcal{O}$ — дискретно нормированное кольцо. Напомним, что элементы α_{ij} матрицы показателей кольца удовлетворяют кольцевым неравенствам $\alpha_{ij} \leqslant \alpha_{ik} + \alpha_{kj}$ для всех i, j, k и для приведённого черепичного порядка всегда $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} > 0$ для всех i, k, $i \neq k$.

Для полумаксимального кольца колчан является простым ориентированным графом. Для черепичного порядка колчан, кроме того, является сильно связным. Поэтому все графы, которые рассматриваются в статье, считаются простыми (т. е. без кратных стрелок и кратных петель), ориентированными и сильно связными.

Для множеств введём следующие обозначения: MQ — множество колчанов черепичных порядков; $\mathrm{MG}(n,m)$ — множество простых ориентированных сильно связных графов с n вершинами и m петлями ($n \geqslant 1$, $m \leqslant n$); $\mathrm{MQ}(n,m)$ — множество колчанов черепичных порядков с n вершинами и m петлями ($n \geqslant 1$, $m \leqslant n$). Будем считать, что колчан дискретно нормированного кольца — вершина с петлей. Понятно, что $\mathrm{MQ}(n,m) \subseteq \mathrm{MG}(n,m)$.

2. Строение колчана полумаксимального кольца

Пусть A — полумаксимальное кольцо, $Q(A)$ — колчан кольца A. Обозначим через Λ черепичный порядок, через $Q(\Lambda)$ — колчан черепичного порядка Λ, а через MQ — всё множество колчанов черепичных порядков.

Теорема 1. *Колчан $Q(A)$ полумаксимального кольца A есть несвязное объединение конечного числа колчанов черепичных порядков*:

$$Q(A) = \bigcup_{i=1}^{k} Q_i, \quad 1 \leqslant k < \infty, \quad Q_i \in \mathrm{MQ}, \quad Q_i \cap Q_j = \varnothing, \quad i \neq j.$$

Доказательство. Пусть A — произвольное полумаксимальное кольцо. Так как полумаксимальное кольцо есть прямое произведение конечного числа черепичных порядков, т. е.

$$A = \bigotimes_{i=1}^{k} \Lambda_i, \quad 1 \leqslant k < \infty,$$

где Λ_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) — черепичные порядки [2], то колчан кольца A есть несвязное объединение колчанов черепичных порядков Λ_i, т. е.

$$Q(A) = \bigcup_{i=1}^{k} Q(\Lambda_i), \quad Q(\Lambda_i) \in \mathrm{MQ}, \quad Q(\Lambda_i) \cap Q(\Lambda_j) = \varnothing, \quad i \neq j.$$

Теорема доказана. □

Исследуем колчаны черепичных порядков. Поскольку колчан такого кольца не изменяется при переходе к соответствующему приведённому кольцу, можно считать, что Λ — приведённый черепичный порядок, т. е. фактор-кольцо $\Lambda/\operatorname{rad}\Lambda$ является прямым произведением тел.

3. Количество стрелок колчана черепичного порядка

Пусть R — радикал Джекобсона черепичного порядка Λ, $\mathcal{E}(R) = (r_{ij})$ — матрица показателей радикала Джекобсона размерности $n \times n$. Из кольцевых неравенств вытекает, что в случае приведённого черепичного порядка для элементов r_{ij} матрицы показателей радикала R порядка Λ выполняются неравенства

$$r_{ij} \leqslant r_{ik} + r_{kj}$$

для всех i, j, k. Будем называть их радикальными кольцевыми неравенствами.

Введём такие множества: $I(\Lambda)$ — множество пар индексов элементов матрицы показателей радикала Джекобсона черепичного порядка Λ:

$$I(\Lambda) = \{(i,j)\colon i,j = 1,2,\ldots,n\};$$

$I_0(\Lambda)$ — множество пар индексов $(i,j) \in I(\Lambda)$, для которых найдётся хотя бы одно значение k_0, такое что для тройки индексов i, j, k_0 соответствующее радикальное кольцевое неравенство выполняется как равенство:

$$I_0(\Lambda) = \{(i,j) \in I(\Lambda)\colon \text{найдётся } k_0, \text{ для которого } r_{ij} = r_{ik_0} + r_{k_0 j}\};$$

$I_1(\Lambda)$ — множество пар индексов $(i,j) \in I(\Lambda)$, таких что при любом значении k для тройки индексов i, j, k соответствующее радикальное кольцевое неравенство строгое:

$$I_1(\Lambda) = \{(i,j) \in I(\Lambda)\colon r_{ij} < r_{ik} + r_{kj} \text{ для всех } k\}.$$

Понятно, что множества $I_0(\Lambda)$ и $I_1(\Lambda)$ не пересекаются, а множество $I(\Lambda)$ является суммой множеств $I_0(\Lambda)$ и $I_1(\Lambda)$:

$$I(\Lambda) = I_0(\Lambda) \cup I_1(\Lambda), \quad I_0(\Lambda) \cap I_1(\Lambda) = \varnothing,$$

и

$$m(I(\Lambda)) = m(I_0(\Lambda)) + m(I_1(\Lambda)),$$

где $m(I)$ — количество элементов множества I.

Теорема 2. *Пусть $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$ — приведённый черепичный порядок, $Q(\Lambda)$ — колчан Λ, K — количество стрелок (включая петли) колчана $Q(\Lambda)$. Тогда*

$$K = m(I_1(\Lambda)),$$

где $m(I_1(\Lambda))$ — количество элементов множества $I_1(\Lambda)$, а колчан $Q(\Lambda)$ имеет стрелку из i-й вершины в j-ю тогда и только тогда, когда $(i,j) \in I_1(\Lambda)$.

В частности, колчан имеет петлю в i-й вершине тогда и только тогда, когда $(i,i) \in I_1(\Lambda)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ — матрица показателей черепичного порядка, $\mathcal{E}(R) = (r_{ij})$ — матрица показателей радикала Джекобсона, $\mathcal{E}(R^2) = (r'_{ij})$ — матрица показателей квадрата радикала Джекобсона, $[Q(\Lambda)] = (q_{ij})$ — матрица смежностей колчана $Q(\Lambda)$. Тогда справедлива формула [2]

$$[Q(\Lambda)] = \mathcal{E}(R^2) - \mathcal{E}(R),$$

или

$$q_{ij} = r'_{ij} - r_{ij} = \min_k (r_{ik} + r_{kj} - r_{ij}).$$

Пусть колчан $Q(\Lambda)$ имеет стрелку из вершины p в вершину q, т. е. $q_{pq} = 1$. Докажем, что элемент (p,q) принадлежит множеству $I_1(\Lambda)$. Из равенства $q_{pq} = 1$ вытекает, что $r_{pk} + r_{kq} - r_{pq} > 0$ для всех k, и по определению элемент (p,q) принадлежит множеству $I_1(\Lambda)$.

Докажем обратное утверждение. Пусть элемент (p,q) принадлежит множеству $I_1(\Lambda)$. Докажем, что колчан $Q(\Lambda)$ имеет стрелку из вершины p в вершину q. По определению множества $I_1(\Lambda)$ имеем

$$r_{pk} + r_{kq} - r_{pq} > 0$$

для всех k. Тогда

$$q_{pq} = \min_k (r_{pk} + r_{kq} - r_{pq}) > 0$$

для всех k. Учитывая, что колчан $Q(\Lambda)$ не имеет кратных стрелок, т. е. $q_{pq} \leqslant 1$, получаем $q_{pq} = 1$, т. е. колчан $Q(\Lambda)$ имеет стрелку из вершины p в вершину q.

Окончательно получаем, что колчан $Q(\Lambda)$ имеет стрелку из i-й вершины в j-ю тогда и только тогда, когда $(i,j) \in I_1(\Lambda)$. Отсюда вытекает, что выполняется равенство $K = m(I_1(\Lambda))$. Теорема доказана. □

4. Колчаны черепичных порядков, которые имеют две вершины

Обозначим через $C_2(m)$ $(m = 0,1,2)$ граф, который получается из простого цикла C_2 присоединением m петель. Понятно, что $C_2 = C_2(0)$.

Предложение 1. *Колчанов черепичных порядков с двумя вершинами существуют всего два: простой цикл $C_2 = C_2(0)$ и граф $C_2(2)$, а граф $C_2(1)$ не является колчаном черепичного порядка.*

Доказательство. Пусть $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$ — черепичный порядок с матрицей показателей

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица показателей радикала Джекобсона имеет вид

$$\mathcal{E}(R) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & 1 \end{pmatrix},$$

матрица показателей квадрата радикала Джекобсона имеет вид

$$\mathcal{E}(R^2) = \begin{pmatrix} \min(2, \alpha_{12} + \alpha_{21}) & \alpha_{12} + 1 \\ \alpha_{21} + 1 & \min(2, \alpha_{12} + \alpha_{21}) \end{pmatrix},$$

матрица смежностей колчана имеет вид

$$[Q(\Lambda)] = \mathcal{E}(R^2) - \mathcal{E}(R) = \begin{pmatrix} \min(1, \alpha_{12} + \alpha_{21} - 1) & 1 \\ 1 & \min(1, \alpha_{12} + \alpha_{21} - 1) \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что матрица показателей $\mathcal{E}(\Lambda)$ не имеет симметричных нулей, т. е. $\alpha_{12} + \alpha_{21} > 0$, имеем всего два возможных случая.

1. $\alpha_{12} + \alpha_{21} - 1 = 0$. В этом случае

$$[Q(\Lambda)] = [C_2(0)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

т. е. получаем простой цикл C_2.

2. $\alpha_{12} + \alpha_{21} - 1 > 0$. В этом случае

$$[Q(\Lambda)] = [C_2(0)] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. получаем граф $C_2(2)$.

Следовательно, колчанов черепичных порядков с двумя вершинами существуют всего два: $C_2 = C_2(0)$ и $C_2(2)$, а граф $C_2(1)$ не реализуется как колчан черепичного порядка. Утверждение доказано. □

5. Колчаны черепичных порядков, которые имеют n вершин и n петель

Теорема 3. *Любой простой ориентированный сильно связный граф G с n вершинами и n петлями является колчаном некоторого черепичного порядка: для каждого $G \in \mathrm{MG}(n, n)$ найдётся $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$, такой что $Q(\Lambda) = G$.*

Доказательство. Пусть G — любой простой ориентированный сильно связный граф с n вершинами и n петлями.

Рассмотрим черепичный порядок $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$, матрицу показателей которого $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n}$ построим следующим образом: α_{ij} $(i \neq j)$ равно длине кратчайшего пути из вершины i в вершину j графа G, $\alpha_{ii} = 0$.

Обозначим матрицу показателей радикала Джекобсона $\mathcal{E}(R) = (\beta_{ij})$, матрицу показателей квадрата радикала Джекобсона $\mathcal{E}(R^2) = (\gamma_{ij})$, матрицу смежностей колчана $[Q(\Lambda)] = (q_{ij})$.

Рассмотрим элемент $q_{ss} = \gamma_{ss} - \beta_{ss}$ для произвольного s. Поскольку граф G сильно связный, то все элементы матрицы показателей, которые не стоят на главной диагонали, не меньше чем 1, а следовательно, $\beta_{st} \geqslant 1$. Тогда $\gamma_{st} \geqslant 2$, $\gamma_{ss} = 2$ и для элементов q_{ss} имеем

$$q_{ss} = \gamma_{ss} - \beta_{ss} = 2 - 1 = 1.$$

Это означает, что колчан $Q(\Lambda)$ имеет петлю в любой вершине.

Пусть граф G имеет стрелку из вершины s в вершину t $(s \neq t)$. Это означает, что длина кратчайшего пути из вершины s в вершину t графа G равна 1, а следовательно, $\alpha_{st} = 1$. Отсюда $\gamma_{st} = 2$. Тогда

$$q_{st} = \gamma_{st} - \beta_{st} = 2 - 1 = 1.$$

Это означает, что колчан $Q(\Lambda)$ имеет стрелку из вершины s в вершину t. Таким образом, мы доказали, что $G \subseteq Q(\Lambda)$.

Докажем обратное включение. Допустим, что колчан $Q(\Lambda)$ имеет стрелку из вершины s в вершину t $(s \neq t)$, т. е. $q_{st} = \gamma_{st} - \beta_{st} = 1$, или

$$q_{st} = \max_k(\beta_{sk} + \beta_{kt} - \beta_{st}) = 1,$$

откуда $\beta_{sk} + \beta_{kt} - \beta_{st} \geqslant 1$ для всех k. Тогда получаем $\alpha_{sk} + \alpha_{kt} - \alpha_{st} \geqslant 1$ для всех k, $k \neq s$, $k \neq t$, или $\alpha_{sk} + \alpha_{kt} > \alpha_{st}$ для всех k, $k \neq s$, $k \neq t$. Допустим, что $\alpha_{st} \geqslant 2$. Тогда существует такое k_0, $k_0 \neq s$, $k_0 \neq t$, что $\alpha_{sk_0} + \alpha_{k_0t} = \alpha_{st}$. Это противоречит неравенствам $\alpha_{sk} + \alpha_{kt} > \alpha_{st}$ для всех k, $k \neq s$, $k \neq t$. Следовательно, $\alpha_{st} = 1$. Это означает, что граф G имеет стрелку из вершины s в вершину t $(s \neq t)$. Таким образом, мы доказали включение $Q(\Lambda) \subseteq G$.

Из доказанных включений имеем $Q(\Lambda) = G$. Теорема доказана. □

6. Колчаны черепичных порядков, которые имеют n вершин и $n - 1$ петлю

Теорема 4. *Колчан черепичного порядка, который имеет n вершин, не может иметь $n - 1$ петлю, т. е. ни один из простых ориентированных сильно связных графов с n вершинами и $n - 1$ петлей не является колчаном черепичного порядка: для любого $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$ справедливо, что $Q(\Lambda) \neq G$ для любого $G \in \mathrm{MG}(n, n-1)$.*

Доказательство. Допустим от противного, что существует черепичный порядок $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$, колчан которого $Q(\Lambda)$ имеет n вершин и $n - 1$ петлю. Не ограничивая общности, можно считать, что колчан $Q(\Lambda)$ имеет петли во всех вершинах, кроме n-й. Тогда по теореме 2 $(n, n) \in I_0(\Lambda)$, и по определению множества $I_0(\Lambda)$ существует такое k, $k \neq n$, что соответствующее радикальное кольцевое неравенство выполняется как равенство: $r_{nn} = r_{nk} + r_{kn}$. Учитывая, что $r_{nn} = 1 = r_{kk}$, получаем $r_{kk} = r_{kn} + r_{nk}$, $n \neq k$, т. е. $(k, k) \in I_0(\Lambda)$, и по теореме 2 колчан $Q(\Lambda)$ не имеет петли в вершине k $(k \neq n)$. Это противоречит предположению о том, что колчан $Q(\Lambda)$ имеет петли во всех вершинах, кроме n-й.

Следовательно, не существует черепичного порядка, колчан которого имеет n вершин и $n-1$ петлю, т. е. колчан черепичного порядка, который имеет n вершин, не может иметь $n-1$ петлю. Теорема доказана. $\square$

7. Колчаны черепичных порядков, которые имеют n вершин и m $(m < n-1)$ петель

Случай $n = 2$ рассмотрен в предложении 1.

Рассмотрим случай $n \geqslant 3$.

Теорема 5. *Множество черепичных порядков с n вершинами и m петлями* $\mathrm{MQ}(n, m)$ $(n \geqslant 3,\ m \leqslant n-2)$ *непусто*:

$$\mathrm{MQ}(n, m) \neq \varnothing \quad (n \geqslant 3,\ m \leqslant n-2).$$

Доказательство. Рассмотрим черепичный порядок $\Omega_m = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Omega_m)\}$ с матрицей показателей размерности $n \times n$

$$\mathcal{E}(\Omega_m) = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right),$$

где A_{11} — квадратная матрица размерности $m \times m$:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

A_{22} — матрица показателей наследственного черепичного порядка H_{n-m}:

$$A_{22} = \mathcal{E}(H_{n-m}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$A_{12} = (1)$ и $A_{21} = (1)$ — матрицы размерностей $(n-m) \times m$ и $m \times (n-m)$ соответственно, у которых все элементы равны единице. В случае $m = 0$ матрицы A_{11}, A_{12}, A_{21} отсутствуют. Матрица показателей радикала Джекобсона порядка Ω_m имеет вид

$$\mathcal{E}(R_m) = \left(\begin{array}{c|c} R_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & R_{22} \end{array}\right),$$

где $R_{11} = (1)$,

$$R_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица показателей квадрата радикала Джекобсона порядка Ω_m имеет вид

$$\mathcal{E}(R_m^2) = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right),$$

где

$$B_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 2 & 2 & \dots & 2 \end{pmatrix}, \quad B_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрицей смежностей колчана $Q(\Omega_m)$ черепичного порядка Ω_m будет

$$[Q(\Omega_m)] = \mathcal{E}(R_m^2) - \mathcal{E}(R_m) = \left(\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & [C_{n-m}] \end{array}\right),$$

где $C_{11} = (1)$,

$$C_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$[C_{n-m}]$— матрица смежностей простого цикла порядка $n-m$: Из вида матрицы смежностей $[Q(\Omega_m)]$ вытекает, что колчан черепичного порядка Ω_m имеет m петель. Следовательно,

$$\mathrm{MQ}(n,m) \neq \varnothing \quad (n \geqslant 3,\ m \leqslant n-2).$$

Теорема доказана. □

Множество колчанов черепичных порядков, которые имеют n вершин и m петель, является разностью двух множеств колчанов черепичных порядков с n вершинами: с количеством петель не меньше чем m и не меньше чем $m+1$.

Описание множества колчанов черепичных порядков, которые имеют n вершин и не меньше чем m петель, можно получить с помощью системы радикальных кольцевых неравенств

$$\begin{cases} r_{ik} + r_{kj} - r_{ij} \geqslant 0, \\ r_{ik} + r_{ki} - 1 > 0, \quad k \leqslant m, \\ r_{ik} + r_{ki} - 1 \geqslant 0, \quad k > m, \\ r_{ij} \geqslant 0 \end{cases}$$

для всех $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$.

Решением этой линейной неоднородной системы неравенств является выпуклая многогранная область K, которая лежит в положительном октанте пространства $\mathbb{R}^{n^2-n}$. Очевидно, что точки с целочисленными координатами, которые принадлежат области K, определяют матрицы показателей черепичных порядков, и при этом по теореме 2 все такие точки одной грани области K определяют один и тот же колчан, а все внутренние точки относительно области K определяют полный колчан. Понятно, что некоторые из граней могут определять колчан одинакового вида, но с разной нумерацией вершин.

С помощью компьютерных вычислений были получены описания множеств колчанов черепичных порядков с тремя и четырьмя вершинами. Оказалось, что колчанов с тремя вершинами всего 9, среди которых 2 колчана без петель, 2 колчана с одной петлей и 5 колчанов с тремя петлями, колчанов с четырьмя вершинами всего 149, среди которых 11 колчанов без петель, 13 колчанов с одной петлей, 42 колчана с двумя петлями и 83 колчана с четырьмя петлями.

Полученные в работе результаты имеют теоретический характер и могут быть использованы для дальнейших исследований в теории представлений и современной структурной теории колец.

Литература

[1] Цюпий Т. И. Колчаны и индексы полумаксимальных колец // Известия Гомельского государственного университета. — 2001. — Т. 3, № 6. — С. 114—123.

[2] Gubareni N. M., Kirichenko V. V. Rings and Modules. — Chestochowa, 2001.