О задании обобщений кос с помощью малого числа образующих*

В. В. ВЕРШИНИН
Университет Монпелье II, Франция,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
e-mail: vershini@math.univ-montp2.fr,
versh@math.nsc.ru

УДК 512.54+512.53

Ключевые слова: группа кос, моноид кос с особенностями, обобщённые группы кос, задание.

Аннотация

В своей основополагающей работе по косам Э. Артин привёл задание произвольной группы кос с помощью двух образующих. Мы даём аналоги этого задания Артина для всевозможных обобщений кос.

Abstract

V. V. Vershinin, On presentations of generalizations of braids with few generators, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 4, pp. 23—32.

In his initial paper on braids, E. Artin gave a presentation with two generators for an arbitrary braid group. We give analogues of the Artin's presentation for various generalizations of braids.

Различные аспекты, связанные с заданием групп кос с помощью образующих и соотношений, продолжают привлекать внимание [8, 13, 15].

Каноническое задание группы кос Br_n, данное Э. Артином [4], хорошо известно. Оно имеет образующие $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ и соотношения

$$\begin{cases} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, & \text{если } |i-j| > 1,\ i,j = 1,\ldots,n-1, \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, & i = 1,\ldots,n-2. \end{cases}$$

Имеются также и другие задания группы кос. Дж. С. Бирман, К. Х. Ко и С. Дж. Ли [8] предложили задание с образующими a_{ts}, где $1 \leqslant s < t \leqslant n$, и соотношениями

$$\begin{cases} a_{ts}a_{rq} = a_{rq}a_{ts} & \text{для } (t-r)(t-q)(s-r)(s-q) > 0, \\ a_{ts}a_{sr} = a_{tr}a_{ts} = a_{sr}a_{tr} & \text{для } 1 \leqslant r < s < t \leqslant n. \end{cases}$$

*Частично автор был поддержан российско-французским грантом ACI-NIM-2004-243 «Узлы и косы» Министерства науки Франции.

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 4, с. 23—32.

Образующие a_{ts} выражаются через канонические образующие σ_i следующим образом:

$$a_{ts} = (\sigma_{t-1}\sigma_{t-2}\dots\sigma_{s+1})\sigma_s(\sigma_{s+1}^{-1}\dots\sigma_{t-2}^{-1}\sigma_{t-1}^{-1}) \quad \text{для} \quad 1 \leqslant s < t \leqslant n.$$

Аналог задания Бирман—Ко—Ли для обобщений кос (а именно для моноида кос с особенностями) был получен в [15].

В своей основополагающей работе [4] Артин дал также другое задание для произвольной группы кос. Оно имеет две образующие, σ_1 и σ, и следующие соотношения:

$$\begin{cases} \sigma_1\sigma^i\sigma_1\sigma^{-i} = \sigma^i\sigma_1\sigma^{-i}\sigma_1 \quad \text{для } 2 \leqslant i \leqslant n/2, \\ \sigma^n = (\sigma\sigma_1)^{n-1}. \end{cases} \tag{1}$$

Связь с каноническими образующими даётся по следующим формулам:

$$\sigma = \sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-1}, \tag{2}$$

$$\sigma_{i+1} = \sigma^i\sigma_1\sigma^{-i}, \quad i = 1, \dots, n-2. \tag{3}$$

Это представление рассматривалось также в [3].

Представляется интересным получить аналоги задания (1) для всевозможных обобщений кос [1, 2, 5, 7, 10, 12].

Рассмотрим группу кос на сфере $\mathrm{Br}_n(S^2)$. Она имеет задание с образующими δ_i, $i = 1, \dots, n-1$, и соотношениями

$$\begin{cases} \delta_i\delta_j = \delta_j\delta_i, & \text{если } |i-j| > 1, \\ \delta_i\delta_{i+1}\delta_i = \delta_{i+1}\delta_i\delta_{i+1}, \\ \delta_1\delta_2\dots\delta_{n-2}\delta_{n-1}^2\delta_{n-2}\dots\delta_2\delta_1 = 1. \end{cases}$$

Это задание было впервые найдено О. Зариским [16] в 1936 году и переоткрыто позже Э. Фаделлом и Дж. Ван Бускирком [11] в 1961 году. Отсюда можно легко получить задание с двумя образующими δ_1, δ и следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \delta_1\delta^i\delta_1\delta^{-i} = \delta^i\delta_1\delta^{-i}\delta_1 \quad \text{для } 2 \leqslant i \leqslant n/2, \\ \delta^n = (\delta\delta_1)^{n-1}, \\ \delta^n(\delta_1\delta^{-1})^{n-1} = 1. \end{cases}$$

Другим обобщением кос является *моноид Баеса—Бирман* SB_n, или, как его ещё называют, *моноид кос с особенностями* [5, 7]. Он определяется как моноид с образующими σ_i, σ_i^{-1}, x_i, $i = 1, \dots, n-1$, и соотношениями

$$\begin{cases} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, & \text{если } |i-j| > 1, \\ x_ix_j = x_jx_i, & \text{если } |i-j| > 1, \\ x_i\sigma_j = \sigma_jx_i, & \text{если } |i-j| \neq 1, \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \\ \sigma_i\sigma_{i+1}x_i = x_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \\ \sigma_{i+1}\sigma_ix_{i+1} = x_i\sigma_{i+1}\sigma_i, \\ \sigma_i\sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1}\sigma_i = 1. \end{cases} \tag{4}$$

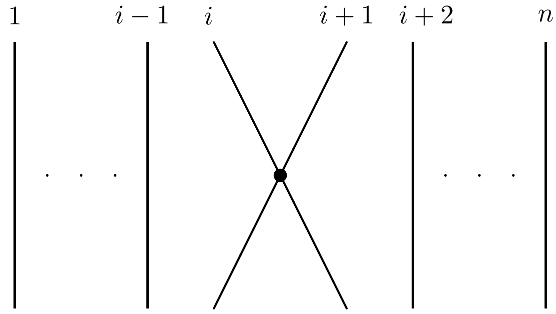

Рис. 1

В диаграммах σ_i соответствует канонической образующей группы кос, а x_i представляется как пересечение i-й и $(i+1)$-й нитей, как показано на рис. 1. Моноид кос с особенностями с двумя нитями SB_2 изоморфен $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}^+$.

Мотивировкой для изучения этого объекта является теория Васильева—Гусарова инвариантов конечного типа.

Пусть F_n есть свободная группа от n образующих $x_1,\ldots,x_n$ и $\operatorname{Aut}F_n$ — её группа автоморфизмов. *Группа кос-перестановок* BP_n, рассмотренная Р. Фенном, Р. Риманьи и К. Рурком [12], есть подгруппа $\operatorname{Aut}F_n$, порождённая двумя множествами автоморфизмов: σ_i,

$$\begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1}, & \\ x_{i+1} \mapsto x_{i+1}^{-1}x_ix_{i+1}, & \\ x_j \mapsto x_j, & j\neq i, i+1, \end{cases}$$

и ξ_i,

$$\begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1}, & \\ x_{i+1} \mapsto x_i, & \\ x_j \mapsto x_j, & j\neq i, i+1. \end{cases}$$

Р. Фенн, Р. Риманьи и К. Рурк доказали [12], что эта группа задается множеством образующих $\{\xi_i,\sigma_i,\ i=1,2,\ldots,n-1\}$ и соотношениями

$$\begin{cases} \xi_i^2=1, \\ \xi_i\xi_j=\xi_j\xi_i, \quad \text{если } |i-j|>1, \\ \xi_i\xi_{i+1}\xi_i=\xi_{i+1}\xi_i\xi_{i+1} \end{cases} \qquad \text{(соотношения симметрической группы)},$$

$$\begin{cases} \sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i, \quad \text{если } |i-j|>1, \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i=\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \end{cases} \qquad \text{(соотношения группы кос)},$$

$$\begin{cases} \sigma_i \xi_j = \xi_j \sigma_i, \quad \text{если } |i-j| > 1, \\ \xi_i \xi_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \xi_i \xi_{i+1}, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \xi_i = \xi_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \end{cases} \qquad \text{(смешанные соотношения).}$$

Р. Фенн, Р. Риманьи и К. Рурк дали также геометрическую интерпретацию группы BP_n как группы кос со спайками.

Давайте получим задание моноида кос с особенностями и группы кос-перестановок, аналогичные заданию (1). Если мы добавим новую образующую σ, определённую по формуле (2), к множеству образующих SB_n, то будут выполнены следующие соотношения:

$$x_{i+1} = \sigma^i x_1 \sigma^{-i}, \quad i = 1, \ldots, n-2. \tag{5}$$

Это даёт возможность избавиться от образующих x_i, $i \geqslant 2$.

Теорема 1. *Моноид кос с особенностями* SB_n *имеет задание с образующими* σ_1, σ_1^{-1}, σ, σ^{-1} *и* x_1 *и соотношениями*

$$\begin{cases} \sigma_1 \sigma^i \sigma_1 \sigma^{-i} = \sigma^i \sigma_1 \sigma^{-i} \sigma_1 & \text{для } 2 \leqslant i \leqslant n/2, \\ \sigma^n = (\sigma \sigma_1)^{n-1}, \\ x_1 \sigma^i \sigma_1 \sigma^{-i} = \sigma^i \sigma_1 \sigma^{-i} x_1 & \text{для } i = 0, 2, \ldots, n-2, \\ x_1 \sigma^i x_1 \sigma^{-i} = \sigma^i x_1 \sigma^{-i} x_1 & \text{для } 2 \leqslant i \leqslant n/2, \\ \sigma^n x_1 = x_1 \sigma^n, \\ x_1 \sigma \sigma_1 \sigma^{-1} \sigma_1 = \sigma \sigma_1 \sigma^{-1} \sigma_1 \sigma x_1 \sigma^{-1}, \\ \sigma_1 \sigma_1^{-1} = \sigma_1^{-1} \sigma_1 = 1, \\ \sigma \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \sigma = 1. \end{cases} \tag{6}$$

Доказательство. Мы следуем оригинальному доказательству Артина [4] и начинаем с задания SB_n с образующими σ_i, σ_i^{-1}, x_i, $i = 1, \ldots, n-1$, и соотношениями (4). Затем мы добавляем новые образующие σ, σ^{-1}, соотношение (2), а также следующие соотношения:

$$\sigma \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \sigma = 1.$$

Рассмотрим σx_i. Используя соотношения кос так же, как Артин рассматривал произведение $\sigma \sigma_i$, мы имеем

$$\sigma x_i = \sigma_1 \ldots \sigma_{n-1} x_i = \sigma_1 \ldots \sigma_i \sigma_{i+1} x_i \sigma_{i+2} \ldots \sigma_{n-1} = \\ = \sigma_1 \ldots x_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_{i+2} \ldots \sigma_{n-1} = x_{i+1} \sigma.$$

Мы приходим, таким образом, к соотношениям (3) и (5). Теперь мы можем избавиться от пятого соотношения в (4). Сначала, используя (3) и (5), мы можем свести его к случаю $i = 1$, который рассматривается следующим образом: x_1 коммутирует с $\sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma$:

$$x_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma = \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma x_1 = \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} x_2 \sigma.$$

Отсюда получаем

$$x_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1} = \sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}x_2,$$

что эквивалентно пятому соотношению в (4) для $i = 1$. Используя (3) и (5), шестое соотношение в (4) мы сводим к случаю $i = 1$, что является шестым соотношением в (6).

Третье и четвёртое соотношения в (6) легко следуют из соответствующих соотношений в (4), (3) и (5). Пятое соотношение в (6) является следствием определения σ и соотношений для кос с особенностями (4). Третье соотношение в (4) получается из четвёртого и пятого соотношений в (6) таким же образом, как Артин получал коммутирование σ_i и σ_j из соотношений (1). Артин использовал существенным образом тот факт, что из второго соотношения в (1) следует, что σ^n находится в центре Br_n. Здесь нам нужно пятое соотношение в (6), чтобы получить аналогичный факт в SB_n. Третье соотношение в (4) в новых образующих переписывается следующим образом:

$$\sigma^i x_1\sigma^{-i}\sigma^j\sigma_1\sigma^{-j} = \sigma^j\sigma_1\sigma^{-j}\sigma^i x_1\sigma^{-i},$$

что эквивалентно

$$x_1\sigma^{j-i}\sigma_1\sigma^{i-j} = \sigma^{j-i}\sigma_1\sigma^{i-j}x_1.$$

Если $j > i$, то это есть в точности третье соотношение в (6), если $j < i$, то это следует из третьего соотношения в (6) после применения сопряжение элементом σ^n и использования коммутирование σ^n с x_1. □

Для случая группы кос-перестановок SB_n мы также добавляем новую образующую σ, определённую по формуле (2), к множеству стандартных образующих BP_n. Тогда выполняются соотношения (3) и следующие соотношения:

$$\xi_{i+1} = \sigma^i\xi_1\sigma^{-i}, \quad i = 1, \ldots, n-2.$$

Это даёт возможность избавиться от ξ_i, а также от σ_i для $i \geqslant 2$.

Теорема 2. *Группа кос-перестановок* BP_n *имеет задание с образующими* σ_1, σ, ξ_1 *и соотношениями*

$$\begin{cases}
\sigma_1\sigma^i\sigma_1\sigma^{-i} = \sigma^i\sigma_1\sigma^{-i}\sigma_1 & \text{для } 2 \leqslant i \leqslant n/2,\\
\sigma^n = (\sigma\sigma_1)^{n-1}, & \\
\xi_1\sigma^i\sigma_1\sigma^{-i} = \sigma^i\sigma_1\sigma^{-i}\xi_1 & \text{для } i = 2, \ldots, n-2,\\
\xi_1\sigma^i\xi_1\sigma^{-i} = \sigma^i\xi_1\sigma^{-i}\xi_1 & \text{для } i = 2, \ldots, n-2,\\
\xi_1\sigma\xi_1\sigma^{-1}\sigma_1 = \sigma\sigma_1\sigma^{-1}\xi_1\sigma\xi_1\sigma^{-1}, & \\
\xi_1\sigma\xi_1\sigma^{-1}\xi_1 = \sigma\xi_1\sigma^{-1}\xi_1\sigma\xi_1\sigma^{-1}, & \\
\xi^2 = 1. &
\end{cases}$$

Рассмотрим обобщённые группы кос в смысле Брискорна (их называют также группами Артина) [1]. Легко видеть, что для группы кос типа B_n из канонического задания с образующими σ_i, $i = 1, \ldots, n-1$, τ и соотношениями

$$\begin{cases} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, & \text{если } |i-j|>1,\\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, & \\ \tau\sigma_i = \sigma_i\tau, & \text{если } i \geqslant 2,\\ \tau\sigma_1\tau\sigma_1 = \sigma_1\tau\sigma_1\tau & \end{cases}$$

мы можем получить задание с тремя образующими σ_1, σ, τ и следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \sigma_1\sigma^i\sigma_1\sigma^{-i} = \sigma^i\sigma_1\sigma^{-i}\sigma_1 & \text{для } 2 \leqslant i \leqslant n/2,\\ \sigma^n = (\sigma\sigma_1)^{n-1}, & \\ \tau\sigma^i\sigma_1\sigma^{-i} = \sigma^i\sigma_1\sigma^{-i}\tau & \text{для } 2 \leqslant i \leqslant n-2,\\ \tau\sigma_1\tau\sigma_1 = \sigma_1\tau\sigma_1\tau. & \end{cases} \tag{7}$$

Если мы добавим соотношения

$$\begin{cases} \sigma_1^2 = 1,\\ \tau^2 = 1 \end{cases}$$

к соотношениям (7), то мы получим задание группы Кокстера типа B_n.

Похожим образом для группы кос типа D_n из канонического задания с образующими σ_i, ρ и соотношениями

$$\begin{cases} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, & \text{если } |i-j|>1,\\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, & \\ \rho\sigma_i = \sigma_i\rho, & \text{если } i = 1,3,\ldots,n-1,\\ \rho\sigma_2\rho = \sigma_2\rho\sigma_2 & \end{cases}$$

мы можем получить задание с тремя образующими σ_1, σ, ρ и соотношениями

$$\begin{cases} \sigma_1\sigma^i\sigma_1\sigma^{-i} = \sigma^i\sigma_1\sigma^{-i}\sigma_1 & \text{для } 2 \leqslant i \leqslant n/2,\\ \sigma^n = (\sigma\sigma_1)^{n-1}, & \\ \rho\sigma^i\sigma_1\sigma^{-i} = \sigma^i\sigma_1\sigma^{-i}\rho & \text{для } i = 0,2,\ldots,n-2,\\ \rho\sigma\sigma_1\sigma^{-1}\rho = \sigma\sigma_1\sigma^{-1}\rho\sigma\sigma_1\sigma^{-1}. & \end{cases} \tag{8}$$

Если мы добавим соотношения

$$\begin{cases} \sigma_1^2 = 1,\\ \rho^2 = 1 \end{cases}$$

к соотношениям (8), мы придём к заданию группы Кокстера типа D_n.

Для исключительных групп кос типов E_6—E_8 наши задания похожи на задания для групп типа D (8). Мы приведём здесь задание для группы типа E_8: оно имеет три образующих σ_1, σ, ω и соотношения

$$\begin{cases} \sigma_1\sigma^i\sigma_1\sigma^{-i} = \sigma^i\sigma_1\sigma^{-i}\sigma_1 & \text{для } i = 2, 3, 4, \\ \sigma^8 = (\sigma\sigma_1)^7, \\ \omega\sigma^i\sigma_1\sigma^{-i} = \sigma^i\sigma_1\sigma^{-i}\omega & \text{для } i = 0, 1, 3, 4, 5, 6, \\ \omega\sigma^2\sigma_1\sigma^{-2}\omega = \sigma^2\sigma_1\sigma^{-2}\omega\sigma^2\sigma_1\sigma^{-2}. \end{cases} \tag{9}$$

Аналогично, если мы добавим соотношения

$$\begin{cases} \sigma_1^2 = 1, \\ \omega^2 = 1 \end{cases}$$

к соотношениям (9), то придём к заданию группы Кокстера типа E_8.

Что касается других исключительных групп кос, то группа F_4 имеет четыре образующих и, как следует из её диаграммы Кокстера, для неё не имеет смысла говорить об аналогах задания Артина (1), группы типов G_2 и $I_2(p)$ заданы двумя образующими, а H_3 имеет три образующих. Для группы типа H_4 возможно уменьшить число образующих с четырёх до трёх, и задание будет похоже на задание для группы кос типа B_4.

Мы можем неформально резюмировать то, что мы делали. Пусть группа имеет задание с помощью графа, аналогичного графу Кокстера. Если существует линейный подграф, соответствующий стандартному заданию классической группы кос, то в задании нашей группы часть, соответствующая этому линейному подграфу, может быть заменена на задание с двумя образующими и соотношениями (1). Этот рецепт может быть применен к комплексным группам псевдоотражений [14], задания которых в стиле Кокстера получены в [6,9]. Для серии комплексных групп кос $B(2e, e, r)$, $e \geqslant 2$, $r \geqslant 2$, которые соответствуют комплексным группам псевдоотражений $G(de, e, r)$, $d \geqslant 2$ [9], мы берём линейный подграф с вершинами $\tau_2, \ldots, \tau_r$ и полагаем, как и раньше, $\tau = \tau_2 \ldots \tau_r$. Группа $B(2e, e, r)$ имеет задание с образующими τ_2, τ, σ, τ_2' и соотношениями

$$\begin{cases} \tau_2\tau^i\tau_2\tau^{-i} = \tau^i\tau_2\tau^{-i}\tau_2 & \text{для } 2 \leqslant i \leqslant r/2, \\ \tau^r = (\tau\tau_2)^{r-1}, \\ \sigma\tau^i\tau_2\tau^{-i} = \tau^i\tau_2\tau^{-i}\sigma & \text{для } 1 \leqslant i \leqslant r-2, \\ \sigma\tau_2'\tau_2 = \tau_2'\tau_2\sigma, \\ \tau_2'\tau\tau_2\tau^{-1}\tau_2' = \tau\tau_2\tau^{-1}\tau_2'\tau\tau_2\tau^{-1}, \\ \tau\tau_2\tau^{-1}\tau_2'\tau_2\tau\tau_2\tau^{-1}\tau_2'\tau_2 = \tau_2'\tau_2\tau\tau_2\tau^{-1}\tau_2'\tau_2\tau\tau_2\tau^{-1}, \\ \underbrace{\tau_2\sigma\tau_2'\tau_2\tau_2'\tau_2\tau_2'\ldots}_{e+1 \text{ сомножитель}} = \underbrace{\sigma\tau_2'\tau_2\tau_2'\tau_2\tau_2'\tau_2\ldots}_{e+1 \text{ сомножитель}}. \end{cases} \tag{10}$$

Если мы добавим соотношения

$$\begin{cases} \sigma^d = 1, \\ \tau_2^2 = 1, \\ {\tau_2'}^2 = 1 \end{cases}$$

к соотношениям (10), мы придём к заданию комплексной группы псевдоотражений $G(de, e, r)$.

Группа кос $B(d, 1, n)$, $d > 1$, имеет то же задание, что и группа Артина—Брискорна типа B_n, а если мы добавим соотношения

$$\begin{cases} \sigma_1^2 = 1, \\ \tau^d = 1 \end{cases}$$

к соотношениям (7), то мы придём к заданию комплексной группы псевдоотражений $G(d, 1, n)$, $d \geqslant 2$.

Для серии групп кос $B(e, e, r)$, $e \geqslant 2$, $r \geqslant 3$, которая соответствует комплексным группам псевдоотражений $G(e, e, r)$, $e \geqslant 2$, $r \geqslant 3$, мы снова берём линейный подграф с вершинами $\tau_2, \ldots, \tau_r$ и, как выше, полагаем $\tau = \tau_2 \ldots \tau_r$. Группа $B(e, e, r)$ имеет задание с образующими τ_2, τ, τ_2' и соотношениями

$$\begin{cases} \tau_2\tau^i\tau_2\tau^{-i} = \tau^i\tau_2\tau^{-i}\tau_2 & \text{для } 2 \leqslant i \leqslant r/2, \\ \tau^r = (\tau\tau_2)^{r-1}, \\ \tau_2'\tau\tau_2\tau^{-1}\tau_2' = \tau\tau_2\tau^{-1}\tau_2'\tau\tau_2\tau^{-1}, \\ \tau\tau_2\tau^{-1}\tau_2'\tau_2\tau\tau_2\tau^{-1}\tau_2'\tau_2 = \tau_2'\tau_2\tau\tau_2\tau^{-1}\tau_2'\tau_2\tau\tau_2\tau^{-1}, \\ \underbrace{\tau_2\tau_2'\tau_2\tau_2'\tau_2\tau_2'\ldots}_{e \text{ сомножителей}} = \underbrace{\tau_2'\tau_2\tau_2'\tau_2\tau_2'\tau_2\ldots}_{e \text{ сомножителей}}. \end{cases} \tag{11}$$

Если $e = 2$, то это задание то же самое, что и задание группы Артина—Брискорна типа D_r (8). Если мы добавим соотношения

$$\begin{cases} \tau_2^2 = 1, \\ {\tau_2'}^2 = 1 \end{cases}$$

к соотношениям (11), то мы получим задание комплексной группы псевдоотражений $G(e, e, r)$, $e \geqslant 2$, $r \geqslant 3$.

Что касается исключительных комплексных групп кос, разумно рассмотреть группы $\mathrm{Br}(G_{30})$, $\mathrm{Br}(G_{33})$ и $\mathrm{Br}(G_{34})$, которые соответствуют комплексным группам псевдоотражений G_{30}, G_{33} и G_{34}.

Задание для $\mathrm{Br}(G_{30})$ аналогично заданию (7) для $\mathrm{Br}(B_4)$, в котором последнее соотношение заменено на соотношение длины 5: три образующих σ_1, σ, τ и соотношения

$$\begin{cases} \sigma_1\sigma^2\sigma_1\sigma^{-2} = \sigma^2\sigma_1\sigma^{-2}\sigma_1, \\ \sigma^4 = (\sigma\sigma_1)^3, \\ \tau\sigma^i\sigma_1\sigma^{-i} = \sigma^i\sigma_1\sigma^{-i}\tau & \text{для } i = 2, 3, \\ \tau\sigma_1\tau\sigma_1\tau = \sigma_1\tau\sigma_1\tau\sigma_1. \end{cases} \tag{12}$$

Если мы добавим соотношения

$$\begin{cases} \sigma_1^2 = 1, \\ \tau^2 = 1 \end{cases}$$

к соотношениям (12), то получим задание комплексной группы псевдоотражений G_{30}.

Что касается групп $\mathrm{Br}(G_{33})$ и $\mathrm{Br}(G_{34})$, мы дадим здесь задание для последней, так как граф типа Кокстера для $\mathrm{Br}(G_{33})$ имеет на одну вершину меньше в линейном подграфе (который обсуждался выше), чем граф для $\mathrm{Br}(G_{34})$. Это задание имеет три образующих s, z ($z = stuvx$ в стандартных образующих) и w и соотношения

$$\begin{cases} sz^isz^{-i} = z^isz^{-i}s & \text{для } i = 2,3, \\ z^6 = (zs)^5, \\ wz^isw^{-i} = z^isz^{-i}w & \text{для } i = 0,3,4, \\ wz^isz^{-i}w = z^isz^{-i}wz^isz^{-i} & \text{для } i = 1,2, \\ wz^2sz^{-2}wzsz^{-1}wz^2sz^{-2} = zsz^{-1}wz^2sz^{-2}wzsz^{-1}w. \end{cases} \tag{13}$$

Аналогично сказанному выше, если мы добавим соотношения

$$\begin{cases} s^2 = 1, \\ w^2 = 1 \end{cases}$$

к соотношениям (13), то придём к заданию группы комплексных псевдоотражений G_{34}.

Мы можем получить задания с малым числом образующих для других комплексных групп псевдоотражений, используя уже рассмотренные задания групп кос. Для G_{25} и G_{32} мы можем использовать задания (1) для классических групп кос Br_4 и Br_5 с одним дополнительным соотношением

$$\sigma_1^3 = 1.$$

Автор выражает глубокую благодарность В. П. Лексину за полезные советы.

Литература

[1] Брискорн Э. О группах кос (по В. И. Арнольду) // Математика (сб. переводов). — 1974. — Т. 18, № 3. — С. 46—59.

[2] Вершинин В. В. Группы кос и пространства петель // Успехи мат. наук. — 1999. — Т. 54, № 2. — С. 3—84.

[3] Кокстер Г. С. М., Мозер У. О. Дж. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. — М.: Наука, 1980.

[4] Artin E. Theorie der Zöpfe // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1925. — B. 4. — S. 47—72.

[5] Baez J. C. Link invariants of finite type and perturbation theory // Lett. Math. Phys. — 1992. — Vol. 26, no. 1. — P. 43—51.

[6] Bessis D., Michel J. Explicit presentations for exceptional braid groups. — 2003. — `arXiv:math.GR/0312191`.

[7] Birman J. S. New points of view in knot theory // Bull. Amer. Math. Soc. — 1993. — Vol. 28, no. 2. — P. 253—387.

[8] Birman J. S., Ko K. H., Lee S. J. A new approach to the word and conjugacy problems in the braid groups // Adv. Math. — 1998. — Vol. 139, no. 2. — P. 322—353.

[9] Broué M., Malle G., Rouquier R. Complex reflection groups, braid groups, Hecke algebras // J. Reine Angew. Math. — 1998. — Vol. 500. — P. 127—190.

[10] Deligne P. Les immeubles des groupes de tresses généralisés // Invent. Math. — 1972. — Vol. 17. — P. 273—302.

[11] Fadell E., Van Buskirk J. The braid groups of E^2 and S^2 // Duke Math. J. — 1962. — Vol. 29. — P. 243—257.

[12] Fenn R., Rimányi R., Rourke C. The braid-permutation group // Topology. — 1997. — Vol. 36, no. 1. — P. 123—135.

[13] Sergiescu V. Graphes planaires et présentations des groupes de tresses // Math. Z. — 1993. — Vol. 214. — P. 477—490.

[14] Shephard G. C., Todd J. A. Finite unitary reflection groups // Can. J. Math. — 1954. — Vol. 6. — P. 274—304.

[15] Vershinin V. V. On the singular braid monoid. — 2003. — `arXiv:math.GR/0309339`.

[16] Zariski O. On the Poincaré group of rational plane curves // Amer. J. Math. — 1936. — Vol. 58. — P. 607—619.