Род G-пространств и нижняя топологическая оценка хроматического числа гиперграфа*

А. Ю. ВОЛОВИКОВ
Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)
e-mail: a_volov@list.ru

УДК 515.162.6

Ключевые слова: род G-пространств, когомологический индекс, гиперграф, хроматическое число.

Аннотация

Приводятся нижние оценки хроматического числа гиперграфа через род и когомологический индекс специальных комплексов (Hom- и JHom-комплексов).

Abstract

A. Yu. Volovikov, The genus of G-spaces and topological lower bounds for chromatic numbers of hypergraphs, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 4, pp. 33—48.

Lower bounds for chromatic numbers of hypergraphs via genus and cohomological index of special complexes (Hom- and JHom-complexes) are given.

1. Введение

Начиная с работы Ловаса [15], в которой была доказана гипотеза Кнезера, методы эквивариантной топологии начали активно применяться в задачах комбинаторики и дискретной математики [2,8,12,16—18]. Этим вопросам посвящены обзоры [21, 22], а также недавно вышедшая книга [14].

В доказательствах гипотез Кнезера и Эрдоша, топологической теоремы Тверберга и других утверждений топологические методы используются для того, чтобы установить несуществование эквивариантного отображения одного G-пространства в другое, где G — подходящая конечная группа, а G-пространства специальным образом строятся исходя из задачи (см., например, [8, 12, 17, 18]). В большинстве случаев решение может быть получено применением теорем типа Бuржена—Янга—Шварца (см. [2]), где рассмотрены обобщения теоремы ван Кампена—Флореса и топологической теоремы Тверберга.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 05-01-00993.

Для G-пространства X и отображения $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ обозначим через $A(f)$ множество точек пространства X, на орбитах которых f постоянно. Теоремы типа Буржена—Янга—Шварца указывают условия, при которых множество $A(f)$ непусто, например такие как ацикличность пространства X до подходящей размерности. В общем случае эти теоремы дают нижнюю оценку размерности множества $A(f)$.

При решении подобных вопросов важную роль играет индекс G-пространств, поскольку несуществование эквивариантного отображения часто можно установить, оценив индексы рассматриваемых пространств, и условия в теоремах типа Буржена—Янга—Шварца также формулируются как неравенство снизу на индекс G-пространства X.

Индекс — это «функция», ставящая в соответствие G-пространству целое неотрицательное число или ∞, основным свойством которой является неубывание при эквивариантных отображениях. Из существования G-отображения $X \to Y$ следует, что индекс пространства X не больше, чем индекс пространства Y.

В качестве индексов в настоящей работе используются когомологический индекс $i(\cdot)$, введённый в [3] и связанный с идеалозначным индексом Фаделла—Хуссейни [11], и род G-пространств, совпадающий с родом А. С. Шварца [6, 7] в случае пространств со свободным действием циклической группы простого порядка.

Кратко схема применения теорем типа Буржена—Янга—Шварца в задачах получения нижних оценок хроматических чисел гиперграфов состоит в следующем.

В качестве действующей группы мы берём p-тор (элементарную абелеву p-группу). Роль отображаемого пространства X играют специальным образом построенные Hom- и JHom-комплексы (с действием p-тора), первый из которых обобщает введённый Ловасом для графов Hom-комплекс, а второй представляет собой ящичный комплекс, часто использующийся в этой тематике (эти комплексы являются также обобщениями взрезанных произведений и джойнов). Наконец, размерность m евклидова пространства и способ построения отображения $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ связаны с числом красок, достаточным для правильной раскраски вершин гиперграфа (m на 1 меньше числа красок). Для построенного по правильной раскраске отображения f множество $A(f)$ пусто, и теоремы типа Буржена—Янга—Шварца дают нижнюю оценку для m (а следовательно, и для хроматического числа) через индекс (или род) пространства X.

Некоторые из представленных результатов отражены в работах автора [4, 5].

2. Род свободных G-пространств

Пусть G — конечная группа. Для G-пространств X, Y, следуя [14, 21], будем писать $X \leqslant_G Y$, если существует G-отображение из X в Y.

Определение 1. Род $\mathrm{g}_{\mathrm{free}}(X)$ пространства X со свободным действием группы G есть наименьшее d, такое что $X \leqslant_G J^d(G)$, где $J^d(G)$ — джойн d экземпляров G (рассматриваемый с диагональным действием группы G).

Для циклических групп род был введён М. А. Красносельским. Для группы $G = \mathbb{Z}_2$ числовой инвариант, на 1 меньший рода, рассматривал Янг [20] под названием B-индекса. Общий случай свободных действий произвольных топологических групп рассматривал А. С. Шварц [6, 7] на основе введённого им понятия рода расслоения, являющегося обобщением категории Люстерника—Шнирельмана. По определению род расслоения равен наименьшей мощности такого открытого покрытия базы, что над каждым из элементов покрытия имеется сечение расслоения (в самом общем смысле под расслоением понимают произвольное сюръективное отображение, называя его проекцией, отображаемое пространство — тотальным пространством расслоения, пространство-образ — базой, а прообразы точек — слоями).

На категории паракомпактных G-пространств со свободным действием род обладает следующими свойствами.

1. Если $X \leqslant_G Y$, то $\mathrm{g}_{\mathrm{free}}(X) \leqslant \mathrm{g}_{\mathrm{free}}(Y)$.
2. Род непрерывен, т. е. для замкнутого инвариантного $A \subset X$ существует G-инвариантная окрестность U, такая что $\mathrm{g}_{\mathrm{free}}(U) = \mathrm{g}_{\mathrm{free}}(A)$.
3. $\mathrm{g}_{\mathrm{free}}(X) \leqslant \mathrm{g}_{\mathrm{free}}(A) + \mathrm{g}_{\mathrm{free}}(B)$, где $X = A \cup B$ и A, B — инвариантные подпространства, которые либо оба открыты, либо оба замкнуты, либо $A = X \setminus B$ и одно из них замкнуто (открыто). В частности, $\mathrm{g}_{\mathrm{free}}(X * Y) \leqslant \mathrm{g}_{\mathrm{free}}(X) + \mathrm{g}_{\mathrm{free}}(Y)$.
4. $\mathrm{g}_{\mathrm{free}}(X) \leqslant \dim X + 1$.

Теорема 1 (А. С. Шварц [7]). *Предположим, что G действует свободно на X и $E \setminus P$, где $P \subset E$ — инвариантное замкнутое подпространство. Пусть $f\colon X \to E$ — эквивариантное отображение. Тогда*

$$\mathrm{g}_{\mathrm{free}}(f^{-1}P) \geqslant \mathrm{g}_{\mathrm{free}}(X) - \mathrm{g}_{\mathrm{free}}(E \setminus P).$$

В частности, $f^{-1}P \neq \varnothing$, если $\mathrm{g}_{\mathrm{free}}(X) > \mathrm{g}_{\mathrm{free}}(E \setminus P)$.

Для $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ положим

$$A(f) = \{x \in X \mid f(x) = f(gx) \text{ для любого } g \in G\}.$$

Теорема 2 (А. С. Шварц [7]). *Пусть X — свободное G-пространство, где $G = \mathbb{Z}_p$ — циклическая группа простого порядка p, и $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Тогда $\mathrm{g}_{\mathrm{free}}(A(f)) \geqslant \mathrm{g}_{\mathrm{free}}(X) - m(p-1)$. Кроме того, $A(f) \neq \varnothing$ для любого $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{g}_{\mathrm{free}}(X) > m(p-1)$.*

При $p = 2$ этот результат превращается в теорему Янга [20].

Замечание 1. Кроме того, Шварц рассматривал и гомологическую версию рода — гомологический и слабый гомологический род (эти инварианты служат нижними оценками для рода подобно оценке категории Люстерника—Шнирельмана через когомологическую длину). Для группы порядка 2 слабый гомологический род на 1 больше гомологического индекса Янга [19]. Подобные гомологические инварианты рассматривались также в [10] для случая свободного действия произвольной конечной группы.

Мы изложили лишь незначительное число результатов из фундаментальной работы Шварца. Заинтересованному читателю следует обратиться непосредственно к этой работе, важность которой подтверждается тем, что её результаты время от времени переоткрываются. Это относится и к самому понятию рода. Например, в [14] при доказательстве комбинаторных результатов использовался введённый Живалевичем [21] индекс, который, как легко видеть, ровно на 1 меньше рода Шварца. Использование этого индекса считается удачным с методологической точки зрения, поскольку позволяет изложить доказательства важных комбинаторных результатов, полученных с помощью методов алгебраической топологии, практически без привлечения теории гомологий. Все общие свойства и утверждения, касающиеся этого индекса, прямо следуют из результатов о роде. Например, теорема о p-совпадениях [14, теорема 6.3.3] для отображений свободного $\mathbb{Z}_p$-пространства X в $\mathbb{R}^m$ является частным случаем теоремы Шварца (теоремы 2). Таким образом, вместо индекса Живалевича с тем же успехом можно было использовать род Шварца. Переоткрыты были и многие свойства рода и, в частности, его нестабильность (даже для группы порядка 2), т. е. существование такого пространства X, что его род совпадает с родом пространства $X * G$ (другой пример подобного пространства построен в [10]).

3. Род пространств с G-действием без неподвижных точек

Пусть G — конечная группа. Все рассматриваемые ниже G-пространства предполагаются *паракомпактными* и, если не сказано противное, с G-действием *без неподвижных точек*.

В основном нас будет интересовать случай действия p-тора, т. е. группы $G = \mathbb{Z}_p^n = \mathbb{Z}_p \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_p$ (n слагаемых), где p — простое число.

Обозначим через D дизъюнктное объединение однородных пространств G/H, взятое по всем подгруппам $H \neq G$.

Определение 2. Определим *род* $\mathrm{g}(X)$ как наименьшее d, такое что $X \leqslant_G J^d(D)$, где $J^d(D)$ — джойн d экземпляров G-пространства D, рассматриваемый с диагональным действием.

Таким образом, род пространства есть целое положительное число или ∞.

Замечание 2. Это — одно из возможных определений рода (см. [9]). Для пространств с G-действием без неподвижных точек можно определить инварианты типа рода многими разными способами (вместо рода говорят о G-категории и т. п.).

Определение 3. Определим *род* $\tilde{\mathrm{g}}(X)$ как наименьшее d, такое что $X \leqslant_G G/H_1 * \ldots * G/H_d$, где $H_i \neq G$ для всех i (подгруппы не обязательно различны).

Поскольку $G/H_1 * \ldots * G/H_d \leqslant_G J^d(D)$, имеем следующее предложение.

Предложение 1. $\mathrm{g}(X) \leqslant \tilde{\mathrm{g}}(X)$ *для любого G-пространства X (с действием без неподвижных точек).*

Если X — свободное G-пространство, то, поскольку $J^d(G) \subset J^d(D)$, имеем $\mathrm{g}_{\mathrm{free}}(X) \geqslant \mathrm{g}(X)$, причём в общем случае неравенство строгое. Например, в общем случае $\mathrm{g}(J^d(G)) < \mathrm{g}_{\mathrm{free}}(J^d(G)) = d$.

Род является инвариантом эквивариантного гомотопического типа. Более того, если $X \leqslant_G Y$ и $Y \leqslant_G X$, то $\mathrm{g}(X) = \mathrm{g}(Y)$ и $\tilde{\mathrm{g}}(X) = \tilde{\mathrm{g}}(Y)$.

На категории паракомпактных G-пространств род обладает свойствами, аналогичными свойствам обычного рода $\mathrm{g}_{\mathrm{free}}(\cdot)$.

1. Если $X \leqslant_G Y$, то $\mathrm{g}(X) \leqslant \mathrm{g}(Y)$ и $\tilde{\mathrm{g}}(X) \leqslant \tilde{\mathrm{g}}(Y)$.
2. Род непрерывен, т. е. для замкнутого инвариантного $A \subset X$ существует G-инвариантная окрестность U, такая что $\mathrm{g}(U) = \mathrm{g}(A)$ и $\tilde{\mathrm{g}}(U) = \tilde{\mathrm{g}}(A)$.
3. $\mathrm{g}(X) \leqslant \mathrm{g}(A) + \mathrm{g}(B)$ и $\tilde{\mathrm{g}}(X) \leqslant \tilde{\mathrm{g}}(A) + \tilde{\mathrm{g}}(B)$, где $X = A \cup B$ и A, B — инвариантные подпространства, которые либо оба открыты, либо оба замкнуты, либо $A = X \setminus B$ и одно из них замкнуто (открыто). Действительно, для открытых A, B имеем $X \leqslant_G A * B$, поскольку G-отображение $X \to A * B$ можно определить с помощью инвариантного разбиения единицы, отвечающего покрытию $X = A \cup B$. Остальные случаи рассматриваются с помощью свойства непрерывности рода. В частности, $\mathrm{g}(X * Y) \leqslant \mathrm{g}(X) + \mathrm{g}(Y)$ и $\tilde{\mathrm{g}}(X * Y) \leqslant \tilde{\mathrm{g}}(X) + \tilde{\mathrm{g}}(Y)$ (это неравенство также легко следует из определения рода).
4. $\mathrm{g}(X) \leqslant \dim X + 1$.

Теорема 3. *Предположим, что G действует без неподвижных точек на X и действует на E так, что неподвижные точки действия содержатся в инвариантном и замкнутом подпространстве $P \subset E$. Пусть $f\colon X \to E$ — эквивариантное отображение. Тогда $\mathrm{g}(f^{-1}P) \geqslant \mathrm{g}(X) - \mathrm{g}(E \setminus P)$ и $\tilde{\mathrm{g}}(f^{-1}P) \geqslant \tilde{\mathrm{g}}(X) - \tilde{\mathrm{g}}(E \setminus P)$. В частности, $f^{-1}P \neq \varnothing$, если $\mathrm{g}(X) > \mathrm{g}(E \setminus P)$ или $\tilde{\mathrm{g}}(X) > \tilde{\mathrm{g}}(E \setminus P)$.*

Доказательство. Для рода $\mathrm{g}(\cdot)$ теорема доказана в [5]. Аналогичные рассуждения показывают её справедливость и для рода $\tilde{\mathrm{g}}(\cdot)$. А именно, из свойства 3 получаем $\tilde{\mathrm{g}}(X) \leqslant \tilde{\mathrm{g}}(f^{-1}P) + \tilde{\mathrm{g}}(f^{-1}(E \setminus P))$, и поскольку $\tilde{\mathrm{g}}(f^{-1}(E \setminus P)) \leqslant \tilde{\mathrm{g}}(E \setminus P)$ (в силу свойства 1), то $\tilde{\mathrm{g}}(f^{-1}P) \geqslant \tilde{\mathrm{g}}(X) - \tilde{\mathrm{g}}(E \setminus P)$. $\square$

Наилучшими свойствами обладает род на категории пространств с действием p-тора.

Предложение 2. *Пусть $G = \mathbb{Z}_p^n$ действует без неподвижных точек на X. Тогда $i(X) \leqslant \mathrm{g}(X)$. В частности, если $\tilde{H}^i(X) = 0$ при всех $i \leqslant N - 1$, то* $\mathrm{g}(X) \geqslant N + 1$.

Здесь $i(X)$ — когомологический индекс, введённый в [3].

Из предложения 2 и свойства 4 рода $\mathrm{g}(\cdot)$ получаем следующий результат.

Предложение 3. *Пусть S — когомологическая N-мерная сфера (над полем $\mathbb{Z}_p$), размерность которой равна N. Пусть группа $G = \mathbb{Z}_p^n$ действует без неподвижных точек на S (в этом случае N нечётно, если $p > 2$). Тогда $\mathrm{g}(S) = N + 1$.*

Предложение 4. *Пусть S — стандартная N-мерная сфера, на которой группа $G = \mathbb{Z}_p^n$ действует линейно и без неподвижных точек. Тогда $\tilde{\mathrm{g}}(S) = N + 1$.*

Доказательство. Пусть сначала $p > 2$. Поскольку действие линейно и не имеет неподвижных точек, S эквивариантно гомеоморфно джойну $(N+1)/2$ окружностей, каждая из которых содержится в джойне орбит двух близких точек, откуда и следует требуемое. Если $p = 2$, то S представляется как джойн 0-мерных сфер (каждая такая 0-мерная сфера G-гомеоморфна G/H, $H \cong \mathbb{Z}_2^{n-1}$). $\square$

Для $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ положим

$$A(f) = \{x \in X \mid f(x) = f(gx) \text{ для любого } g \in G\}.$$

Из предложений 3, 4 и теоремы 3 вытекает следующий результат.

Теорема 4. *Пусть $G = \mathbb{Z}_p^n$ действует без неподвижных точек на X и $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ непрерывно. Тогда $\mathrm{g}(A(f)) \geqslant \mathrm{g}(X) - m(p^n - 1)$ и $\tilde{\mathrm{g}}(A(f)) \geqslant \tilde{\mathrm{g}}(X) - m(p^n - 1)$. В частности, $A(f) \neq \varnothing$, если $\mathrm{g}(X) > m(p^n - 1)$ или $\tilde{\mathrm{g}}(X) > m(p^n - 1)$.*

Доказательство. Теоремы 3, 4 и предложение 2 для рода $\mathrm{g}(\cdot)$ доказаны в [5]. Аналогичные рассуждения показывают справедливость теорем 3, 4 и для рода $\tilde{\mathrm{g}}(\cdot)$. $\square$

Теорема 5. *Предположим, что G действует без неподвижных точек на X и действует на E так, что неподвижные точки действия содержатся в инвариантном и замкнутом подпространстве $P \subset E$. Пусть $f\colon X \to E$ — эквивариантное отображение. Тогда $i(f^{-1}P) \geqslant i(X) - i'(E \setminus P)$. В частности, $f^{-1}P \neq \varnothing$, если $i(X) > i'(E \setminus P)$.*

Теорема 6. *Пусть $G = \mathbb{Z}_p^n$ действует без неподвижных точек на X и $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ непрерывно. Тогда $i(A(f)) \geqslant i(X) - m(p^n - 1)$ и $i'(A(f)) \geqslant i'(X) - m(p^n - 1)$. В частности, $A(f) \neq \varnothing$, если $i(X) > m(p^n - 1)$ или $i'(X) > m(p^n - 1)$.*

Эти две теоремы доказываются так же, как и соответствующие утверждение для рода, с использованием неубывания индексов $i(\cdot)$, $i'(\cdot)$ при эквивариантных отображениях, равенства $i((\mathbb{R}^m)^q \setminus \Delta) = i'((\mathbb{R}^m)^q \setminus \Delta) = m(q-1)$, где $q = p^n$, и аналога свойства 3 для индексов $i(\cdot)$ и $i'(\cdot)$, который таков: $i(X) \leqslant i(A) + i'(B)$ и $i'(X) \leqslant i'(A) + i'(B)$, где $X = A \cup B$ и A, B — инвариантные подпространства, которые либо оба открыты, либо оба замкнуты, либо $A = X \setminus B$ и одно из них замкнуто (открыто) (см. [3]).

4. Теоремы типа ван Кампена—Флореса и Тверберга

В [2,3] найдены нижние оценки индексов взрезанных джойнов и взрезанных произведений некоторых пространств, которые использовались для обобщений теорем ван Кампена—Флореса и Тверберга. Если в рассуждениях использовать род вместо индекса, то получатся аналогичные оценки рода этих пространств.

Предложение 5. *Пусть для некоторых натуральных k_i при $i = 1, \ldots, l$ выполнены неравенства $(k_i + 1)(q - 1) + qs_i \geqslant (N_i + 1)(j - 1)$, где $q = p^n$, p — простое число. Положим $K = \Delta^{N_1}_{s_1-1} * \ldots * \Delta^{N_l}_{s_l-1}$. Тогда*

$$\mathrm{g}(J^q_j(K)) \geqslant (N_1 + \ldots + N_l + l)(j - 1) - (k_1 + \ldots + k_l + l)(q - 1),$$
$$\mathrm{g}(P^q_j(K)) \geqslant (N_1 + \ldots + N_l + l)(j - 1) - (k_1 + \ldots + k_l + l + 1)(q - 1).$$

Такие же неравенства справедливы для рода $\tilde{\mathrm{g}}$.

Здесь через Δ^N_k обозначается k-мерный остов N-мерного симплекса Δ^N и $J^q_j(K) \subset J^q(K)$, $P^q_j(K) \subset K^q$ — взрезанные джойн и произведение комплекса соответственно, на которых $G = \mathbb{Z}^n_p$ действует перестановкой сомножителей (см. подробнее [2,17,18]).

Будем обозначать K^q также $P^q(K)$. Взрезанное произведение $P^q_2(K)$ есть CW-комплекс, являющийся объединением клеток $\sigma_1 \times \ldots \times \sigma_q$, таких что $\sigma_i \subset K$ — симплексы и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Взрезанный джойн $J^q_2(K)$ — это симплициальный комплекс, состоящий из симплексов $\sigma_1 * \ldots * \sigma_q$, где $\sigma_i \subset Q$ — такие симплексы, что $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для $i \neq j$ (отметим, что некоторые из σ_i могут быть пустыми). Аналогичным образом определяются и пространства $P^q_j(K)$, $J^q_j(K)$: требуется, чтобы пересечение любых j симплексов из набора $\sigma_1, \ldots, \sigma_q$ было пустым.

Пространства $P^q_j(K)$, $J^q_j(K)$, очевидно, зависят от симплициальной структуры на K.

С помощью предложения 5 и теоремы 4 можно получить обобщение теоремы ван Кампена—Флореса для отображений в евклидово пространство и группы $G = \mathbb{Z}^n_p$. Более сложный случай отображений в многообразие, рассмотренный в [2], требует оценок не рода, а когомологических индексов (аналогичная оценка $\mathrm{g}(P^q_j(\Delta^N)) \geqslant (N+1)(j-1)-q+1$ приводит к топологической теореме Тверберга для группы $G = \mathbb{Z}^n_p$ и отображений в евклидово пространство).

Аналогичным образом находятся и нижние оценки для $\mathrm{g}(J^q_j(K))$, $\mathrm{g}(P^q_j(K))$, где $K = \Delta^N * \Delta^{N_1}_{s_1-1} * \ldots * \Delta^{N_l}_{s_l-1}$. Как заметил С. А. Богатый [1] рассмотрение таких пространств приводит к теореме, включающей одновременно и топологическую теорему Тверберга, и теорему типа ван Кампена—Флореса.

Замечание 3. Как уже отмечалось выше, все результаты из [14], сформулированные в терминах индекса, в частности неравенство Саркариа, доказательство топологической теоремы Тверберга (для простого p) и другие, можно переписать в терминах рода Шварца. Если теперь вместо свободных $\mathbb{Z}_p$-действий рассматривать $\mathbb{Z}_p^n$-действия без неподвижных точек и род $\mathrm{g}_{\mathrm{free}}(\cdot)$ заменить на $\mathrm{g}(\cdot)$ (или на $\tilde{\mathrm{g}}(\cdot)$), то получится доказательство топологической теоремы Тверберга для степени простого числа.

5. Нижняя оценка хроматического числа

Пусть $\mathcal{S}$ — гиперграф с множеством вершин $V(\mathcal{S})$ и рёбер $E(\mathcal{S})=\{S_1,\ldots,S_k\}$, где $S_i \in 2^{V(\mathcal{S})}$ — непустые и попарно различные подмножества множества вершин.

Определение 4. *Хроматическое число* $\chi(\mathcal{S})$ гиперграфа $\mathcal{S}$ — это наименьшее число красок, необходимое для такой раскраски вершин, что ни одно ребро не является монохроматическим.

Определение 5. Гиперграф $\mathcal{S}$ называется *d-однородным*, если любое его ребро является d-элементным множеством.

Например, простой граф (т. е. граф без петель и кратных рёбер) является 2-однородным гиперграфом.

Определим d-однородный гиперграф $[\![\underline{d}]\!]$ как гиперграф с $V([\![\underline{d}]\!]) = [d] = \{1,\ldots,d\}$ и с единственным ребром $[d] \in E([\![\underline{d}]\!])$.

По двум гиперграфам $\mathcal{S}$ и $\mathcal{T}$ определим CW-подкомплекс

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{S},\mathcal{T}) \subset \prod_{v\in V(\mathcal{S})} \big(\Delta_v^{|V(\mathcal{T})|-1}\big) = \big(\Delta^{|V(\mathcal{T})|-1}\big)^{|V(\mathcal{S})|},$$

здесь $\Delta_v^{|V(\mathcal{T})|-1} = \Delta^{|V(\mathcal{T})|-1}$ — симплекс размерности $|V(\mathcal{T})|-1$, поставленный в соответствие вершине $v \in V(\mathcal{S})$. Кроме того, мы считаем, что множество вершин симплекса $\Delta_v^{|V(\mathcal{T})|-1}$ совпадает с $V(\mathcal{T})$. По определению комплекс $\mathrm{Hom}(\mathcal{S},\mathcal{T})$ является объединением некоторых произведений симплексов $\prod\limits_{v\in V(\mathcal{S})} \sigma_v$, где σ_v — грань симплекса $\Delta_v^{|V(\mathcal{T})|-1}$. Произведение содержится в $\mathrm{Hom}(\mathcal{S},\mathcal{T})$ при следующим условии: если выбать произвольным образом по вершине $\varphi(v) \in V(\sigma_v) \subset V\big(\Delta_v^{|V(\mathcal{T})|-1}\big) = V(\mathcal{T})$, где $V(\sigma_v) \subset V(\mathcal{T})$ — множество вершин симплекса σ_v, то полученное отображение $\varphi\colon V(\mathcal{S}) \to V(\mathcal{T})$ является гомоморфизмом гиперграфов, т. е. $\varphi(S) \in E(\mathcal{T})$ для каждого ребра $S \in E(\mathcal{S})$ (здесь $\varphi(S)$ рассматривается как мультимножество, и, таким образом, $\varphi|_S\colon S \to V(\mathcal{T})$ должно быть инъективным на каждом ребре $S \in E(\mathcal{S})$).

Для графов этот комплекс ввёл Ловас.

Определим теперь симплициальные подкомплексы

$$\underline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}(\mathcal{S},\mathcal{T}) \subset \overline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}(\mathcal{S},\mathcal{T}) \subset *_{v\in V(\mathcal{S})}\big(\Delta^{|V(\mathcal{T})|-1}\big) = J^{|V(\mathcal{S})|}\big(\Delta^{|V(\mathcal{T})|-1}\big).$$

Комплекс $\underline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}(\mathcal{S},\mathcal{T})$ есть джойн симплексов $*_{v\in V(\mathcal{S})}\sigma_v$, подчинённых тем же самым условиям, что и в определении CW-комплекса $\mathrm{Hom}(\mathcal{S},\mathcal{T})$, и $\overline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}(\mathcal{S},\mathcal{T})$

получается из $\underline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}(\mathcal{S},\mathcal{T})$ добавлением джойнов граней, таких что одна грань — пустое множество, а остальные совпадают с $\Delta^{|V(\mathcal{T})|-1}$.

Замечание 4. Пусть K_d — полный граф с d вершинами. Тогда $P_2^q(\Delta^d) = \mathrm{Hom}(K_q, K_{d+1})$ и $J_2^q(\Delta^d) \subset \overline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}(K_q, K_{d+1})$.

Для симплициального комплекса Q мы определим *нижний* и *верхний* взрезанный джойн таким образом, что $\underline{J}_2^q(Q) \subset J_2^q(Q) \subset \overline{J}_2^q(Q) \subset J^q(Q)$. Нижний взрезанный джойн обозначался через $\tilde{J}_2^q(Q)$ в [2]. По определению он является объединением симплексов $\sigma_1 * \ldots * \sigma_q$, где $\sigma_i \subset Q$ — такие симплексы, что $\sigma_i \neq \varnothing$ для всех i и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ при $i \neq j$. [(Симплициальное) взрезанное произведение $P_2^q(Q)$ есть объединение клеток $\sigma_1 \times \ldots \times \sigma_q$, таких что $\sigma_i \subset Q$ является симплексом и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Если мы заменим знак произведения $\times$ на джойн $*$, то получим $\underline{J}_2^q(Q)$.] Теперь мы определим $\overline{J}_2^q(Q)$ как объединение $\underline{J}_2^q(Q)$ с подкомплексами $D_i = Q * \ldots * Q * \varnothing * Q * \ldots * Q$, $i = 1, \ldots q$, где пустое множество стоит на i-м месте. Отметим, что $\overline{J}_2^q(Q)$ является объединением симплексов $\sigma_1 * \ldots * \sigma_q$, таких что либо $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ при $i \neq j$, либо среди них имеется пустой симплекс (таким образом, в общем случае $\sigma_i \cap \sigma_j \neq \varnothing$ для некоторых $i \neq j$). Однако если q является степенью простого числа, $q = p^n$, то группа $\mathbb{Z}_p^n$ действует на $\overline{J}_2^q(Q)$ без неподвижных точек.

Обозначим через $\left[\!\left[\begin{smallmatrix} q \\ d \end{smallmatrix}\right]\!\right]$ d-однородный гиперграф с множеством вершин $[q]$ и множеством рёбер $\binom{[q]}{d}$, совпадающим с множеством всех d-элементных подмножеств множества $[q]$. Таким образом, $V\left(\left[\!\left[\begin{smallmatrix} q \\ d \end{smallmatrix}\right]\!\right]\right) = [q]$, $E\left(\left[\!\left[\begin{smallmatrix} q \\ d \end{smallmatrix}\right]\!\right]\right) = \binom{[q]}{d}$. Очевидно, $\left[\!\left[\begin{smallmatrix} q \\ q \end{smallmatrix}\right]\!\right] = [\![\underline{q}]\!]$.

Имеем $\mathrm{Hom}\left([\![\underline{q}]\!], \left[\!\left[\begin{smallmatrix} d+1 \\ q \end{smallmatrix}\right]\!\right]\right) = P_2^q(\Delta^d)$ и $\underline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}\left([\![\underline{q}]\!], \left[\!\left[\begin{smallmatrix} d+1 \\ q \end{smallmatrix}\right]\!\right]\right) = \underline{J}_2^q(\Delta^d)$. В общем случае для $2 \leqslant k \leqslant q$ имеем

$$\mathrm{Hom}\left(\left[\!\!\left[\begin{matrix} q \\ k \end{matrix}\right]\!\!\right], \left[\!\!\left[\begin{matrix} d+1 \\ k \end{matrix}\right]\!\!\right]\right) = P_2^q(\Delta^d) \quad \text{и} \quad \underline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}\left(\left[\!\!\left[\begin{matrix} q \\ k \end{matrix}\right]\!\!\right], \left[\!\!\left[\begin{matrix} d+1 \\ k \end{matrix}\right]\!\!\right]\right) = \underline{J}_2^q(\Delta^d),$$

а также $J_2^q(\Delta^d) \subset \overline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}\left(\left[\!\left[\begin{smallmatrix} q \\ k \end{smallmatrix}\right]\!\right], \left[\!\left[\begin{smallmatrix} d+1 \\ k \end{smallmatrix}\right]\!\right]\right)$.

Для подкомплекса $K \subset \Delta^{|V(\mathcal{T})|-1}$ положим $\mathrm{Hom}(\mathcal{S},\mathcal{T})_K = \mathrm{Hom}(\mathcal{S},\mathcal{T}) \cap K^q$ и $\overline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}(\mathcal{S},\mathcal{T})_K = \overline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}(\mathcal{S},\mathcal{T}) \cap J^q(K)$, и аналогично для $\underline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}$. Например, имеем

$$\mathrm{Hom}\left(\left[\!\!\left[\begin{matrix} q \\ k \end{matrix}\right]\!\!\right], \left[\!\!\left[\begin{matrix} d+1 \\ k \end{matrix}\right]\!\!\right]\right)_K = P_2^q(K) \quad \text{и} \quad \underline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}\left(\left[\!\!\left[\begin{matrix} q \\ k \end{matrix}\right]\!\!\right], \left[\!\!\left[\begin{matrix} d+1 \\ k \end{matrix}\right]\!\!\right]\right)_K = \underline{J}_2^q(K),$$

а также $J_2^q(K) \subset \overline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}\left(\left[\!\left[\begin{smallmatrix} q \\ k \end{smallmatrix}\right]\!\right], \left[\!\left[\begin{smallmatrix} d+1 \\ k \end{smallmatrix}\right]\!\right]\right)_K$.

Более того, чтобы включить в рассмотрение и взрезанные джойны можно определить промежуточный ящичный комплекс $\mathrm{JHom}(\mathcal{S},\mathcal{T})$ добавляя к $\underline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}(\mathcal{S},\mathcal{T})$ джойны граней $*_{v \in V(\mathcal{S})}\sigma_v$ так, чтобы выполнялось следующее условие. Пусть $V' \subset V(\mathcal{S})$ — подмножество всех таких вершин v, что $\sigma_v \neq \varnothing$, и пусть $\varphi\colon V' \to V(\mathcal{T})$ — любое отображение, такое что $\varphi(v) \in V(\sigma_v)$ для любого $v \in V'$. Тогда для любого $S \in E(\mathcal{S})$, такого что $S \cap V' \neq \varnothing$, ограничение $\varphi|_{S \cap V'}\colon S \cap V' \to V(\mathcal{T})$ должно быть инъективным отображением и $\varphi(S \cap V')$

должно представлять собой подмножество некоторого ребра гиперграфа $\mathcal{T}$. Имеем $\underline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}(\mathcal{S},\mathcal{T}) \subset \mathrm{JHom}(\mathcal{S},\mathcal{T}) \subset \overline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}(\mathcal{S},\mathcal{T})$ и $\mathrm{JHom}\left([\![{q \atop k}]\!], [\![{d+1 \atop k}]\!]\right)_K = J^q_2(K)$.

Для $q = p^n$, где p — простое число, на $\mathrm{Hom}([\![\underline{q}]\!],\mathcal{T})$, $\mathrm{JHom}([\![\underline{q}]\!],\mathcal{T})$, $\underline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}([\![\underline{q}]\!],\mathcal{T})$ и $\overline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}([\![\underline{q}]\!],\mathcal{T})$ имеется естественное действие без неподвижных точек группы $G = \mathbb{Z}_p^n$. Отметим, что последние два комплекса — ящичные комплексы, рассматривавшиеся соответственно Кризом [12] и Ланже [13].

Теорема 7. *Пусть $q = p^n$, где p — простое число, и пусть $\mathcal{T}$ — q-однородный гиперграф. Тогда*

$$\chi(\mathcal{T}) \geqslant 1 + \frac{\mathrm{g}(\mathrm{Hom}([\![\underline{q}]\!],\mathcal{T}))}{q-1} \geqslant \frac{\mathrm{g}(\overline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}([\![\underline{q}]\!],\mathcal{T}))}{q-1} \geqslant \\ \geqslant \frac{\mathrm{g}(\mathrm{JHom}([\![\underline{q}]\!],\mathcal{T}))}{q-1} \geqslant \frac{\mathrm{g}(\underline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}([\![\underline{q}]\!],\mathcal{T}))}{q-1}.$$

Аналогичные неравенства имееют место для рода $\tilde{\mathrm{g}}(\cdot)$ и когомологического индекса $i(\cdot)$.

Доказательство. Положим $d = \chi(\mathcal{T})$. Тогда раскраска вершин определяет линейное отображение симплексов $\Delta^{|V(\mathcal{T})|-1} \to \Delta^{d-1}$. Беря композицию этого отображения с проекцией на первый сомножитель $\mathrm{Hom}([\![\underline{q}]\!],\mathcal{T}) \to \Delta^{|V(\mathcal{T})|-1}$, получаем отображение $f\colon \mathrm{Hom}\,([\![\underline{q}]\!],\mathcal{T}) \to \mathbb{R}^{d-1}$. Из определения отображения f следует, что $A(f) = \varnothing$, поэтому теорема 2 даёт $\mathrm{g}(\mathrm{Hom}([\![\underline{q}]\!],\mathcal{T})) \leqslant (q-1)(d-1)$. Таким образом, мы доказали первое неравенство.

Для любого пространства X в [2] было определено Σ_q-отображение

$$J^q(X) \to X^q * \Delta^{q-1}_{q-2},$$

где Σ_q — симметрическая группа и $\Delta^{q-1}_{q-2} = \partial\Delta^{q-1}$ — граница симплекса Δ^{q-1}. Ограничение этого отображения на $\mathrm{JHom}([\![\underline{q}]\!],\mathcal{T})$ определяет эквивариантное отображение $\mathrm{JHom}([\![\underline{q}]\!],\mathcal{T}) \to \mathrm{Hom}([\![\underline{q}]\!],\mathcal{T}) * \Delta^{q-1}_{q-2}$. Поэтому $\mathrm{JHom}([\![\underline{q}]\!],\mathcal{T}) \leqslant_G \leqslant_G \mathrm{Hom}([\![\underline{q}]\!],\mathcal{T}) * \Delta^{q-1}_{q-2}$, и, поскольку $\mathrm{g}\big(\Delta^{q-1}_{q-2}\big) = q-1$, получаем неравенство

$$\mathrm{g}(\mathrm{Hom}([\![\underline{q}]\!],\mathcal{T})) \geqslant \mathrm{g}(\mathrm{JHom}([\![\underline{q}]\!],\mathcal{T})) - q + 1.$$

(Более общо, имеем $\mathrm{g}(\mathrm{Hom}([\![\underline{q}]\!],\mathcal{T})_K) \geqslant \mathrm{g}(\mathrm{JHom}([\![\underline{q}]\!],\mathcal{T})_K) - q + 1$ для подкомплекса K и, кроме того, можно здесь заменить JHom на $\overline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}$ или на $\underline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}$.) $\square$

Эта теорема обобщает результат Ланже [13]. Аналогичный результат имеется и для гиперграфов с мультимножествами в качестве рёбер.

Аналогичные неравенства имеют место и для индекса $\mathrm{in}(\cdot)$, т. е.

$$\chi(\mathcal{T}) > 1 + \frac{\mathrm{in}(\mathrm{Hom}([\![\underline{q}]\!],\mathcal{T}))}{q-1} \geqslant \frac{\mathrm{in}(\overline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}([\![\underline{q}]\!],\mathcal{T}))}{q-1} \geqslant \\ \geqslant \frac{\mathrm{in}(\mathrm{JHom}([\![\underline{q}]\!],\mathcal{T}))}{q-1} \geqslant \frac{\mathrm{in}(\underline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}([\![\underline{q}]\!],\mathcal{T}))}{q-1}.$$

Предложение 6. *Пусть $q = p^n$, p — простое число, и пусть $\mathcal{T}$ — q-однородный гиперграф. Пусть $K \subset \Delta^{|V(\mathcal{T})|-1}$ — подкомплекс и $f\colon K \to \mathbb{R}^m$ — непрерывное отображение. Предположим, что выполнено одно из следующих неравенств*:

1) $\mathrm{g}(\mathrm{Hom}([\![\underline{q}]\!], \mathcal{T})_K) > m(q-1)$,
2) $\tilde{\mathrm{g}}(\mathrm{Hom}([\![\underline{q}]\!], \mathcal{T})_K) > m(q-1)$,
3) $i(\mathrm{Hom}([\![\underline{q}]\!], \mathcal{T})_K) > m(q-1)$,
4) $\mathrm{in}(\mathrm{Hom}([\![\underline{q}]\!], \mathcal{T})_K) \geqslant m(q-1)$.

Тогда найдутся симплексы $\sigma_1, \ldots, \sigma_q \subset K \subset \Delta^{|V(\mathcal{T})|-1}$, такие что $\sigma_1 \times \ldots \times \sigma_q \subset \subset \mathrm{Hom}([\![\underline{q}]\!], \mathcal{T})_K$ и $f(\sigma_1) \cap \ldots \cap f(\sigma_q) \neq \varnothing$.

Теорема 7 вытекает из этого утверждения, которое само можно рассматривать как топологическую оценку хроматического числа. Комбинируя вместе это предложение, замечание 4 и предложение 5, мы также получаем теоремы типа Тверберга и ван Кампена—Флореса (и их смешанный вариант).

Аналогичное утверждение можно сформулировать в терминах ящичных комплексов.

Предложение 7. *Пусть $q = p^n$, где p — простое число, и пусть $\mathcal{T}$ — q-однородный гиперграф. Пусть $K \subset \Delta^{|V(\mathcal{T})|-1}$ — подкомплекс и $f\colon K \to \mathbb{R}^m$ — непрерывное отображение. Предположим, что выполнено одно из следующих неравенств*:

1) $\mathrm{g}(\mathrm{JHom}([\![\underline{q}]\!], \mathcal{T})_K) > (m-1)(q-1)$,
2) $\tilde{\mathrm{g}}(\mathrm{JHom}([\![\underline{q}]\!], \mathcal{T})_K) > (m-1)(q-1)$,
3) $i(\mathrm{JHom}([\![\underline{q}]\!], \mathcal{T})_K) > (m-1)(q-1)$,
4) $\mathrm{in}(\mathrm{JHom}([\![\underline{q}]\!], \mathcal{T})_K) \geqslant (m-1)(q-1)$.

Тогда найдутся грани $\sigma_1, \ldots, \sigma_q \subset K \subset \Delta^{|V(\mathcal{T})|-1}$, такие что $\sigma_1 \times \ldots \times \sigma_q \subset \subset \mathrm{Hom}([\![\underline{q}]\!], \mathcal{T})_K$ и $f(\sigma_1) \cap \ldots \cap f(\sigma_q) \neq \varnothing$.

Отметим также, что в этом предложении ящичный комплекс JHom можно заменить на $\underline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}$ или на $\overline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}$.

В общем случае (для чисел, не являющихся степенью простого) более слабые результаты можно получить, рассматривая частичные совпадения.

Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ — отображение G-пространства X. Определим $A(f,k) \subset X$, $k \geqslant 2$, следующим образом: $x \in A(f,k)$, если найдутся по крайней мере k различных элементов $g_1, \ldots, g_k \in G$, таких что $f(g_1 x) = \ldots = f(g_k x)$.

Следующий результат доказан в [3].

Теорема 8. *Пусть $G = \mathbb{Z}_p^n$, X — G-пространство с действием без неподвижных точек и $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Предположим, что $i(X) \geqslant (m-1)(q-1)+k$ и $k \geqslant (q+1)/2$ или $k=2$, где $q = p^n$. Тогда $A(f) \neq \varnothing$.*

Замечание 5. В [5] показано, что этот результат верен и для всех $k > 3$.

Для положительного целого k через $q(k)$ обозначим либо наименьшее простое число, не меньшее чем k, либо наименьшее число, являющееся степенью простого, не меньшее чем k. В качестве действующей группы мы возьмём p-тор, где p — простое число, степенью которого является $q(k)$ (т. е. в первом случае берётся циклическая группа простого порядка $q(k)$).

Мы воспользуемся ниже предыдущим замечанием, или даже теоремой 8, поскольку $k \geqslant (q(k)+1)/2$. В первом случае это следует из постулата Бертрана, во втором легко видеть, что $k > (q(k)+1)/2$. Действительно, это так, если k является степенью простого числа. В противном случае $2^s < k < 2^{s+1}$ для некоторого s и из определения числа $q(k)$ следует, что $q(k) \leqslant 2^{s+1}$. Следовательно, $(q(k)+1)/2 \leqslant (2^{s+1}+1)/2 = 2^s + 1/2 < k$.

Из теоремы 8 получаем следующее утверждение.

Предложение 8. *Пусть $\mathcal{T}$ — k-однородный гиперграф и $q = q(k)$. Пусть $K \subset \Delta^{|V(\mathcal{T})|-1}$ — подкомплекс и $f\colon K \to \mathbb{R}^m$ — непрерывное отображение. Предположим, что имеет место неравенство $i\left(\mathrm{Hom}\left(\left[\!\left[{q \atop k}\right]\!\right], \mathcal{T}\right)_K\right) > (m-1)(q-1)+k-1$. Тогда найдутся грани $\sigma_1, \ldots, \sigma_q \subset K \subset \Delta^{|V(\mathcal{T})|-1}$ и индексы $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant q$, такие что $\sigma_1 \times \ldots \times \sigma_q \subset \mathrm{Hom}\left(\left[\!\left[{q \atop k}\right]\!\right], \mathcal{T}\right)_K$ и $f(\sigma_{i_1}) \cap \ldots \cap f(\sigma_{i_k}) \neq \varnothing$.*

Из этого предложения получаем следующий результат.

Теорема 9. *Пусть $\mathcal{T}$ — k-однородный гиперграф. Положим $q := q(k)$. Тогда*

$$\chi(\mathcal{T}) > 2 + \frac{i\left(\mathrm{Hom}\left(\left[\!\left[{q \atop k}\right]\!\right], \mathcal{T}\right)\right) - k}{q-1} \geqslant 1 + \frac{i\left(\overline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}\left(\left[\!\left[{q \atop k}\right]\!\right], \mathcal{T}\right)\right) - k}{q-1} \geqslant$$
$$\geqslant 1 + \frac{i\left(\mathrm{JHom}\left(\left[\!\left[{q \atop k}\right]\!\right], \mathcal{T}\right)\right) - k}{q-1} \geqslant 1 + \frac{i\left(\underline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}\left(\left[\!\left[{q \atop k}\right]\!\right], \mathcal{T}\right)\right) - k}{q-1}.$$

Определение 6. Пусть $\mathcal{T}$ — q-однородный гиперграф. Скажем, что раскраска вершин r-допустима, где $2 \leqslant r \leqslant q$, если ни в одном ребре графа $\mathcal{T}$ нельзя найти r вершин, имеющих один и тот же цвет. Обозначим через $\nu_r(\mathcal{T})$ наименьшее число цветов, требуемое для r-допустимой раскраски.

Очевидно, $\nu_q(\mathcal{T}) = \chi(\mathcal{T})$ для q-однородного гиперграфа $\mathcal{T}$, и раскраска 2-допустима в том и только в том случае, когда вершины любого ребра имеют попарно различные цвета. Имеем

$$\chi(\mathcal{T}) = \nu_q(\mathcal{T}) \leqslant \nu_{q-1}(\mathcal{T}) \leqslant \ldots \leqslant \nu_2(\mathcal{T}).$$

Предложение 9. *Пусть $\mathcal{T}$ — k-однородный гиперграф, $K \subset \Delta(V(\mathcal{T}))$ — подкомплекс. Для целого числа $2 \leqslant r \leqslant k$ предположим, что либо $q := q(r) \geqslant k$, либо q — степень простого числа, не меньшая чем k, и $r \neq 3$. Если $i\left(\mathrm{Hom}\left(\left[\!\left[{q \atop k}\right]\!\right], \mathcal{T}\right)_K\right) > (m-1)(q-1)+r-1$, то найдутся симплексы $\sigma_1, \ldots, \sigma_q \subset K \subset \Delta^{|V(\mathcal{T})|-1}$ и индексы $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant q$, такие что $\sigma_1 \times \ldots \times \sigma_q \subset \mathrm{Hom}\left(\left[\!\left[{q \atop k}\right]\!\right], \mathcal{T}\right)_K$ и $f(\sigma_{i_1}) \cap \ldots \cap f(\sigma_{i_r}) \neq \varnothing$.*

Теорема 10. *В условиях предыдущего предложения, наложенных на $\mathcal{T}$, r, k и q, имеем*

$$\nu_r(\mathcal{T}) > 2 + \frac{i\left(\mathrm{Hom}\left(\left[\!\left[\begin{smallmatrix} q \\ k \end{smallmatrix} \right]\!\right], \mathcal{T}\right)\right) - r}{q-1} \geqslant 1 + \frac{i\left(\overline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}\left(\left[\!\left[\begin{smallmatrix} q \\ k \end{smallmatrix} \right]\!\right], \mathcal{T}\right)\right) - r}{q-1} \geqslant$$

$$\geqslant 1 + \frac{i\left(\mathrm{JHom}\left(\left[\!\left[\begin{smallmatrix} q \\ k \end{smallmatrix} \right]\!\right], \mathcal{T}\right)\right) - r}{q-1} \geqslant 1 + \frac{i\left(\underline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}\left(\left[\!\left[\begin{smallmatrix} q \\ k \end{smallmatrix} \right]\!\right], \mathcal{T}\right)\right) - r}{q-1}.$$

В частности, в случае $k = q$ получаем

$$\nu_r(\mathcal{T}) > 2 + \frac{i\left(\mathrm{Hom}\left([\![\underline{q}]\!], \mathcal{T}\right)\right) - r}{q-1} \geqslant 1 + \frac{i\left(\overline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}\left([\![\underline{q}]\!], \mathcal{T}\right)\right) - r}{q-1} \geqslant$$

$$\geqslant 1 + \frac{i\left(\mathrm{JHom}\left([\![\underline{q}]\!], \mathcal{T}\right)\right) - r}{q-1} \geqslant 1 + \frac{i\left(\underline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}\left([\![\underline{q}]\!], \mathcal{T}\right)\right) - r}{q-1}.$$

6. Комплексы симплициальных отображений

Пусть S, T — симплициальные комплексы.

Определение 7. *Комплекс симплициальных отображений* $\mathrm{hom}(S,T)$ (*комплекс невырожденных симплициальных отображений* $\mathrm{Hom}(S,T)$) есть объединение клеток $\prod\limits_{v \in V(S)} \sigma_v$, где σ_v — некоторые грани симплекса $\Delta^{|V(T)|-1}$. Такая клетка включается в $\mathrm{hom}(S,T)$ (соответственно в $\mathrm{Hom}(S,T)$), если любое отображение $\varphi\colon V(S) \to V(T)$, такое что $\varphi(v) \in \sigma_v$, является симплициальным (соответственно симплициальным и невырожденным, последнее означает, что φ инъективно на каждом симплексе комплекса S).

Таким образом, имеем

$$\mathrm{Hom}(S,T) \subset \mathrm{hom}(S,T) \subset P^{|V(S)|}\left(\Delta^{|V(T)|-1}\right) = \left(\Delta^{|V(T)|-1}\right)^{|V(S)|}.$$

Теперь мы определим симплициальные комплексы $\mathrm{JHom}(S,T)$ и $\mathrm{jhom}(S,T)$, такие что

$$\mathrm{JHom}(S,T) \subset \mathrm{jhom}(S,T) \subset J^{|V(S)|}\left(\Delta^{|V(T)|-1}\right) = \Delta^{|V(T)|\cdot|V(S)|-1}.$$

Определение 8. Комплекс $\mathrm{jhom}(S,T)$ ($\mathrm{JHom}(S,T)$) является объединением симплексов $*_{v \in V(S)}\sigma_v$, где σ_v — некоторые грани симплекса $\Delta^{|V(T)|-1}$. Такой симплекс $\gamma = *_{v \in V(S)}\sigma_v$ включается в $\mathrm{jhom}(S,T)$ (соответственно в $\mathrm{JHom}(S,T)$), если выполнено следующее условие. Положим $N_\gamma := \{v \in V(S) \mid \sigma_v \neq \varnothing\}$ и обозначим через S_γ максимальный подкомплекс в S с $V(S_\gamma) = N_\gamma$. Тогда для любого отображения $\varphi\colon N_\gamma = V(S_\gamma) \to V(T)$, такого что $\varphi(v) \in \sigma_v$ при каждом $v \in N_\gamma$, отображение φ является симплициальным отображением из S_γ в T (соответственно симплициальным и невырожденным, последнее означает, что φ инъективно на каждом симплексе комплекса S_γ).

Замечание 6. Как и в случае гиперграфов, можно определить $\underline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}$- и $\overline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}$-комплексы невырожденных симплициальных отображений, причём

$$\underline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}(S,T) \subset \mathrm{JHom}(S,T) \subset \overline{\mathrm{J}}\mathrm{Hom}(S,T) \subset \mathrm{jhom}(S,T).$$

Любой гиперграф определяет ассоциированный с ним симплициальный комплекс — семейство всех подмножеств всех рёбер гиперграфа.

Предложение 10. *Пусть $\mathcal{S}$ и $\mathcal{T}$ — k-однородные гиперграфы и S и T — ассоциированные с ними симплициальные комплексы. Тогда* $\mathrm{Hom}(\mathcal{S},\mathcal{T}) = \mathrm{Hom}(S,T)$ *и* $\mathrm{JHom}(\mathcal{S},\mathcal{T}) = \mathrm{JHom}(S,T)$.

Предложение 11. $\mathrm{jhom}(S,T{*}T') = \mathrm{jhom}(S,T){*}\mathrm{jhom}(S,T')$ *и* $\mathrm{JHom}(S,T{*}T') = \mathrm{JHom}(S,T) * \mathrm{JHom}(S,T')$.

В действительности справедливы следующие более общие соотношения:

$$\mathrm{jhom}(S,T*T')_{K*K'} = \mathrm{jhom}(S,T)_K * \mathrm{jhom}(S,T')_{K'},$$
$$\mathrm{JHom}(S,T*T')_{K*K'} = \mathrm{JHom}(S,T)_K * \mathrm{JHom}(S,T')_{K'},$$

где K и K' — симплициальные подкомплексы в $\Delta^{|V(T)|-1}$ и в $\Delta^{|V(T')|-1}$ соответственно. Это — обобщение соотношений $J^q(K*L) = J^q(K)*J^q(L)$ и $J_2^q(K*L) = J_2^q(K) * J_2^q(L)$ для симплициальных комплексов K, L.

Доказательство. Пусть $\gamma \subset \mathrm{JHom}(S,T)$, $\gamma = *_{v\in V(S)}\sigma_v$. Положим

$$N_\gamma := \{v \in V(S) \mid \sigma_v \neq \varnothing\}, \quad S_\gamma := \Delta(N_\gamma) \cap S,$$

где $\Delta(N_\gamma)$ — грань симплекса $\Delta^{|V(S)|-1} = \Delta(V(S))$ с множеством вершин N_γ (таким образом, $V(\Delta(N_\gamma)) = N_\gamma$). Пусть $\varnothing \neq N \subset N_\gamma$. Обозначим через $\gamma|_N$ симплекс $*_{v\in V(S)}\xi_v$, где $\xi_v = \sigma_v$ для $v \in N$ и $\xi_v = \varnothing$ для $v \notin N$. Из определений следует, что если $\gamma \subset \mathrm{JHom}(S,T)$, то $\gamma|_N \subset \mathrm{JHom}(S,T)$ для любого $\varnothing \neq N \subset N_\gamma$.

Пусть $\delta = *_{v\in V(S)}(\sigma_v * \sigma'_v) \subset \mathrm{JHom}(S,T*T')$, где $\sigma_v \subset \Delta(V(T))$ и $\sigma'_v \subset \Delta(V(T'))$. Положим $\gamma = *_{v\in V(S)}\sigma_v$ и $\gamma' = *_{v\in V(S)}\sigma'_v$. Тогда $\delta = \gamma * \gamma'$ (с очевидным отождествлением рассматриваемых джойнов). Имеем $N_\delta = N_\gamma \cup N_{\gamma'}$. Рассмотрим симплекс $\delta|N_\gamma$. Он содержит в качестве грани симплекс $*_{v\in V(S)}(\sigma_v{*}\varnothing)$ (который фактически можно отождествить с γ). Поскольку $\delta|N_\gamma \subset \mathrm{JHom}(S,T*T')$, имеем $*_{v\in V(S)}(\sigma_v * \varnothing) \subset \mathrm{JHom}(S*T')$ и, поскольку все вершины в $*_{v\in V(S)}(\sigma_v * \varnothing)$ принадлежат $V(T) \subset V(T*T') = V(T)\coprod V(T')$, получаем $\gamma \subset \mathrm{JHom}(S,T)$. Аналогично, $\gamma' \subset \mathrm{JHom}(S,T')$.

Теперь предположим, что $\gamma \subset \mathrm{JHom}(S,T)$ и $\gamma' \subset \mathrm{JHom}(S,T')$. Отождествим $\gamma * \gamma' = (*_{v\in V(S)}\sigma_v) * (*_{v\in V(S)}\sigma'_v)$ с $\delta = *_{v\in V(S)}(\sigma_v * \sigma'_v)$. Имеем $N_\delta = N_\gamma \cup N_{\gamma'}$. Рассмотрим отображение $\varphi\colon N_\delta \to V(T*T')$, такое что $\varphi(v) \in V(\sigma_v * \sigma'_v) = V(\sigma_v)\coprod V(\sigma'_v)$, $v \in N_\delta$. Тогда $N_\delta = N_1 \coprod N_2$, где $N_1 \subset N_\gamma$ и $N_2 \subset N_{\gamma'}$.

Имеем $S_\delta := S \cap \Delta(N_\delta) = S \cap \Delta(N_1) * \Delta(N_2)$ и $S_i := S \cap \Delta(N_i) = S_{\gamma|_{N_i}}$, $i = 1, 2$. Тогда $\varphi\colon N_1 \to V(T)$ ($\varphi\colon N_2 \to V(T')$) — невырожденное симплициальное отображение $S_1 \to T$ (соответственно $S_2 \to T'$). Поэтому

$$\varphi\colon N_\delta = N_1 \coprod N_2 \to V(T) \coprod V(T') = V(T*T')$$

определяет невырожденное симплициальное отображение $S_1 * S_2 \to T * T'$. Поскольку $S_\delta \subset S_1 * S_2$, отображение φ даёт невырожденное симплициальное отображение $S_\delta \to T * T'$, следовательно, $\delta \subset \mathrm{JHom}(S,T*T')$. $\square$

В заключение отметим следующие легко проверяемые функториальные свойства Hom-комплексов.

Пусть $S' \to S$ и $T \to T'$ — невырожденные симплициальные отображения. Тогда они индуцируют отображения $\mathrm{Hom}(S,T) \to \mathrm{Hom}(S',T)$ и $\mathrm{Hom}(S,T) \to \mathrm{Hom}(S,T')$ соответственно (для hom-комплексов только второе отображение индуцирует $\mathrm{hom}(S,T) \to \mathrm{hom}(S',T)$). Второе отображение также индуцирует $\mathrm{JHom}(S,T) \to \mathrm{JHom}(S,T')$, и если $S' \approx S$ — симплициальный гомеоморфизм, то он индуцирует гомеоморфизм $\mathrm{JHom}(S,T) \approx \mathrm{JHom}(S',T)$. Более того, если $S' \subset S$ — подкомплекс, то имеется очевидное включение $\mathrm{JHom}(S',T) \subset \mathrm{JHom}(S,T)$.

Литература

[1] Богатый С. А. Гипотеза Борсука, препятствие Рышкова, интерполяция, чебышёвские приближения, трансверсальная теорема Тверберга, проблемы // Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 2002. — Т. 239. — С. 63—82.

[2] Воловиков А. Ю. К теореме ван Кампена—Флореса // Мат. заметки. — 1996. — Т. 59, № 5. — С. 663—670.

[3] Воловиков А. Ю. Об индексе G-пространств // Мат. сб. — 2000. — Т. 191, № 9. — С. 3—22.

[4] Воловиков А. Ю. Род G-пространств и топологические оценки хроматических чисел // Материалы VIII Международного семинара «Дискретная математика и её приложения». — Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 2004. — С. 384—387.

[5] Воловиков А. Ю. Точки совпадения отображений $\mathbb{Z}_p^k$-пространств // Изв. РАН. Сер. мат. — 2005. — Т. 69, № 5. — С. 53—106.

[6] Шварц А. С. Род расслоённого пространства. — Тр. ММО. — 1961. — Т. 10. — С. 217—272.

[7] Шварц А. С. Род расслоённого пространства. — Тр. ММО. — 1962. — Т. 11. — С. 99—126.

[8] Bárány I., Shlosman S. B., Szücs A. On a topological generalization of a theorem of Tverberg // J. London Math. Soc. — 1981. — Vol. 23. — P. 158—164.

[9] Clapp M., Puppe D. Critical point theory with symmetries // J. Reine Angew. Math. — 1991. — Vol. 418. — P. 1—29.

[10] Conner P. E., Floyd E. E. Fixed point free involutions and equivariant maps // Bull. Amer. Math. Soc. — 1960. — Vol. 66. — P. 416—441.

[11] Fadell E., Husseini S. An ideal-valued cohomological index theory with applications to Borsuk—Ulam and Bourgin—Yang theorems // Ergodic Theory Dynam. Systems. — 1988. — Vol. 8, Spec. Issue. — P. 259—268.

[12] Kříž I. Equivariant cohomology and lower bounds for chromatic numbers // Trans. Amer. Math. Soc. — 1992. — Vol. 333, no. 3. — P. 567—577.

[13] Lange C. On generalised Kneser colourings. — 2003. — `arXiv:math.CO/0312067`.

[14] Matousek J. Using the Borsuk—Ulam Theorem. Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry. — Berlin: Springer, 2003.

[15] Lovász L. Kneser's conjecture, chromatic number and homotopy // J. Combin. Theory Ser. A. — 1978. — Vol. 25. — P. 319—324.

[16] Özadyn M. Equivariant maps for the symmetric group. — Preprint. — Univ. of Wisconsin—Madison, 1987.

[17] Sarkaria K. S. A generalized Kneser conjecture // J. Combin. Theory Ser. B. — 1990. — Vol. 49. — P. 236—240.

[18] Sarkaria K. S. A generalized van Kampen—Flores theorem // Proc. Amer. Math. Soc. — 1991. — Vol. 111, no. 2. — P. 559—565.

[19] Yang C. T. On theorems of Borsuk—Ulam, Kakutani—Yamabe—Yujobô and Dyson. I // Ann. of Math. — 1954. — Vol. 60. — P. 262—282.

[20] Yang C. T. On theorems of Borsuk—Ulam, Kakutani—Yamabe—Yujobô and Dyson. II // Ann. of Math. — 1955. — Vol. 62, no. 2. — P. 271—283.

[21] Živaljević R. T. User's guide to equivariant methods in combinatorics // Publications of the Institute of Mathematics, Belgrade. Vol. 59 (73). — 1996. — P. 114—130.

[22] Živaljević R. T. User's guide to equivariant methods in combinatorics. II // Publications de l'Institute de Mathematique. Nouvelle série. Vol. 64 (78). — 1998. — P. 107—132.