

О сходимости решений регуляризованной задачи для уравнений движения вязкоупругой среды Джеффриса к решениям исходной задачи*

Д. А. ВОРОТНИКОВ

Воронежский государственный университет
e-mail: mitvorot@mail.ru

В. Г. ЗВЯГИН

Воронежский государственный университет
e-mail: zvg@main.vsu.ru

УДК 517.9

Ключевые слова: начально-краевая задача, движение вязкоупругой среды, определяющее соотношение Джеффриса, регуляризованная модель, сходимость.

Аннотация

В работе рассматриваются начально-краевые задачи для уравнений движения вязкоупругой среды с определяющим соотношением Джеффриса и для уравнений движения регуляризованной модели Джеффриса. Получена теорема о сходимости слабых решений начально-краевых задач для регуляризованной модели к слабым решениям исходной задачи при стремлении параметра регуляризации к нулю.

Abstract

D. A. Vortnikov, V. G. Zvyagin, On the convergence of solutions of regularized problem for motion equations of Jeffreys viscoelastic medium to solutions of the original problem, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 4, pp. 49–63.

In this work, we consider initial-boundary-value problems for motion equations of viscoelastic medium with the Jeffreys constitutive law and for motion equations of the regularized Jeffreys model. We obtain a theorem on the convergence of weak solutions of initial-boundary-value problems for the regularized model to weak solutions of the original problem as the regularization parameter tends to zero.

Введение

Известно, что движение большого числа несжимаемых сред определяется системой дифференциальных уравнений в форме Коши (см. [1])

*Работа поддержана грантами № 04-01-00081 РФФИ и VZ-010-0 Министерства образования и науки РФ и Американского фонда гражданских исследований и развития.

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \text{grad } p = \text{Div } \sigma + \rho f, \quad (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \quad (0.1)$$

$$\text{div } u = 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \quad (0.2)$$

где $u(t, x) = (u_1(t, x), \dots, u_n(t, x))$ — скорость движения частицы среды в точке пространства x в момент времени t , $p(t, x)$ — давление между частицами среды, $f(t, x)$ — плотность внешних сил, $\rho = \text{const}$ — плотность среды и $\sigma(t, x)$ — девиатор тензора напряжений (его также называют тензором касательных напряжений). Дивергенция Div от тензора $\sigma = (\sigma_{ij})$ — это вектор с координатами $(\text{Div } \sigma)_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}$. Тип рассматриваемой среды определяется выбором соотношения между σ и тензором скоростей деформаций $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E}_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$. Это соотношение в литературе называется реологическим соотношением или уравнением формоизменения.

Наиболее известна модель с реологическим соотношением $\sigma = 2\nu\mathcal{E}$ (ньютоновская жидкость). Уравнения движения такой жидкости называют уравнениями Навье—Стокса. Эта модель описывает течения при умеренных скоростях большинства встречающихся на практике вязких жидкостей. Однако существуют вязкие несжимаемые среды, не подчиняющиеся ньютоновскому реологическому соотношению. Различные модели таких сред, учитывающие предысторию движения, были предложены в XIX веке Дж. Максвеллом, В. Кельвином и В. Фойгтом и в XX веке Х. Джеффрисом, Дж. Г. Олдройдом и многими другими авторами (см., например, [4, 5, 8]). Для построения реологических соотношений, описывающих движение таких сред, в реологии часто применяется метод механических моделей.

Поскольку это важно для обоснования рассматриваемой в этой работе модели, кратко опишем этот метод для моделей вязкоупругих сред. В этих средах основными свойствами являются упругость и вязкость. Для представления упругости используется спиральная пружина. Для неё имеет место закон Гука: удлинение пружины прямо пропорционально приложенной к её концам силе. Эту модель будем обозначать буквой H . Для представления вязкости используется модель в виде пробирки, заполненной вязким маслом, в которой свободно перемещается поршень. Скорость поршня прямо пропорциональна приложенной силе. Эта модель обозначается N .

Мы будем предполагать, что изучаемые нами среды представляют собой микрокомплексы из маленьких пружинок и пробирок с поршнями. Причём они соединены между собой либо параллельно (обозначается $|$), либо последовательно (обозначается $-$). В реологии считается, что при параллельном соединении нагрузки, воспринимаемые каждым элементом, складываются, а скорости удлинения каждого элемента одинаковы; при последовательном соединении складываются скорости удлинения элементов и каждый из них подвергается одинаковой нагрузке.

Однако для реологических соотношений нужны не силы и скорости, а напряжение и скорости деформации. Под напряжением (в пружине или в пробирке

с поршнем) мы будем понимать отношение силы сопротивления (которая равна по модулю приложенной силе) к площади поперечного сечения (пружины или поршня), а скорость деформации $\mathcal{E}$ будем понимать как половину отношения скорости (поршня в масле или изменения длины пружины) к характерной (средней) продольной длине пробирки с поршнем или пружины.

Теперь необходимо записать соотношения между напряжением и скоростью деформации для пружины и пробирки с поршнем. Для пробирки с поршнем это совсем просто: предполагая, что сила пропорциональна скорости, получим, что напряжение пропорционально скорости деформации:

$$\sigma_N = 2\eta\mathcal{E}_N. \quad (0.3)$$

Отметим, что здесь η имеет физический смысл вязкости.

Далее условимся для механических моделей обозначать производную по времени точкой. Продифференцировав по времени закон Гука для пружины, получим, что производная от силы пропорциональна скорости изменения длины пружины. Поэтому производная от напряжения пропорциональна скорости деформации:

$$\dot{\sigma}_H = 2\mu\mathcal{E}_H. \quad (0.4)$$

Наиболее простой конструкцией модели вязкоупругой жидкости является тело Максвелла (с символьной записью $M = H - N$): последовательно соединённые пружина и поршень. Таким образом, для тела Максвелла имеем

$$\sigma_M = \sigma_N = \sigma_H, \quad (0.5)$$

поскольку при последовательном соединении напряжение постоянно, и

$$\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_H + \mathcal{E}_N, \quad (0.6)$$

поскольку при последовательном соединении скорости деформаций складываются.

Из равенств (0.5), (0.6) получаем реологическое соотношение для тела Максвелла:

$$\mathcal{E}_M = \frac{\dot{\sigma}_M}{2\mu} + \frac{\sigma_M}{2\eta}.$$

Оно имеет вид линейного дифференциального уравнения относительно σ_M . Решая его, получим

$$\sigma_M = e^{-\frac{\mu}{\eta}t} \left((\sigma_M)_0 + 2\mu \int_0^t e^{\frac{\mu}{\eta}s} \mathcal{E}_M(s) ds \right).$$

Наиболее типичная модель вязкоупругих сред, модель Джеффриса J , представляет собой параллельное соединение модели Максвелла и ещё одной пробирки с поршнем, т. е. $J = M \parallel N$, причём вязкости сред в двух разных пробирках могут различаться; мы обозначим их η_1 и η_2 . Итак, имеем для максвелловской составляющей тела Джеффриса

$$\sigma_M = e^{-\frac{\mu}{\eta_1}t} \left((\sigma_M)_0 + 2\mu \int_0^t e^{\frac{\mu}{\eta_1}s} \mathcal{E}_M(s) ds \right), \quad (0.7)$$

а для ньютоновской составляющей

$$\sigma_N = 2\eta_2 \mathcal{E}_N. \quad (0.8)$$

Но при параллельном соединении получаем

$$\sigma_J = \sigma_M + \sigma_N, \quad (0.9)$$

$$\mathcal{E}_J = \mathcal{E}_M = \mathcal{E}_N. \quad (0.10)$$

Равенства (0.7)–(0.10) влекут

$$\sigma_J = e^{-\frac{\mu}{\eta_1}t} \left((\sigma_M)_0 + 2\mu \int_0^t e^{\frac{\mu}{\eta_1}s} \mathcal{E}_J(s) ds \right) + 2\eta_2 \mathcal{E}_J. \quad (0.11)$$

Обозначим напряжение и скорость деформации тела Джеффриса в нулевой момент времени через $(\sigma_J)_0$ и $(\mathcal{E}_J)_0$. Положив в (0.11) $t = 0$, получим равенство

$$(\sigma_J)_0 = (\sigma_M)_0 + 2\eta_2 (\mathcal{E}_J)_0,$$

откуда

$$\sigma_J = e^{-\frac{\mu}{\eta_1}t} \left((\sigma_J)_0 - 2\eta_2 (\mathcal{E}_J)_0 + 2\mu \int_0^t \mathcal{E}_J(s) e^{\frac{\mu}{\eta_1}s} ds \right) + 2\eta_2 \mathcal{E}_J.$$

Это реологическое соотношение для тела Джеффриса с явно выраженным напряжением.

Более традиционна другая форма определяющего соотношения для тела Джеффриса:

$$\sigma_J + \lambda_1 \dot{\sigma}_J = 2\eta_J (\mathcal{E}_J + \lambda_2 \dot{\mathcal{E}}_J), \quad (0.12)$$

которая получается из (0.11) дифференцированием по t , при этом $\lambda_1 = \frac{\eta_1}{\mu}$, $\lambda_2 = \frac{\eta_1 \eta_2}{\mu(\eta_1 + \eta_2)}$, $\eta_J = \eta_1 + \eta_2$.

Отметим, что соотношение (0.12) является реологическим соотношением и для другого вязкоупругого тела — тела Летерзиха с символической записью $(N | H) - N$, где опять же вязкости двух поршней могут различаться.

Далее для описания движения сред в реальном трёхмерном пространстве требуется некоторое понимание составляющих реологических соотношений, полученных в механических моделях.

Рассмотрим этот вопрос для соотношения (0.12). Числа λ_1 и λ_2 , а также вязкость тела Джеффриса η_J являются скалярными величинами, их можно измерить для конкретных материалов. Напряжение и скорость деформации естественно понимать как тензор касательных напряжений и тензор скоростей деформации. Остаётся лишь вопрос о том, как понимать производную по времени, обозначавшуюся точкой. Здесь возможны варианты. Для удобства ниже мы опускаем индекс J в реологических соотношениях.

Наиболее простая ситуация с математической точки зрения возникает, если под производной, обозначавшейся точкой в (0.12), понимать частную производную по времени. Получающееся в этом случае реологическое уравнение

$$\sigma + \lambda_1 \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 2\eta \left(\mathcal{E} + \lambda_2 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right)$$

связывает тензоры касательных напряжений и скоростей деформаций и их частные производные по времени, т. е. скорости их изменения в каждой конкретной геометрической точке пространства. С физической точки зрения такие модели не представляют большого интереса (см. [4]).

Более естественным с физической точки зрения представляется подход, когда реологическое соотношение связывает эти тензоры со скоростями их изменения для каждой конкретной частицы. Для его реализации необходимо заменить производную, обозначавшуюся в (0.12) точкой, на полную (или, как ещё говорят, субстанциональную) производную

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

в этом случае реологическое соотношение принимает вид

$$\sigma + \lambda_1 \frac{d\sigma}{dt} = 2\eta \left(\mathcal{E} + \lambda_2 \frac{d}{dt} \mathcal{E} \right). \quad (0.13)$$

Выражение σ из данного соотношения и подстановка его в уравнение (0.1) приводят к системе уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_i} \right) - \eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \Delta u(t, x) - \\ & - 2\eta \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1^2} \int_0^t e^{\frac{s-t}{\lambda_1}} \operatorname{Div}[\mathcal{E}(s, z(s; t, x))] ds + \operatorname{grad} p = \\ & = \rho f(t, x) + e^{-\frac{t}{\lambda_1}} \operatorname{Div} \left[\sigma_0(z(0; t, x)) - 2\eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathcal{E}_0(z(0; t, x)) \right], \quad (0.14) \\ & \operatorname{div} u = 0. \end{aligned}$$

Уравнения системы содержат не только неизвестные скорости движения v и давление p , но и неизвестные траектории движения частиц среды $z = z(\tau; t, x)$, определяемые полем скоростей.

Исследование как слабых, так и сильных L_2 -решений начально-краевой задачи для уравнений движения (0.14) наталкивается на ту трудность, что поле скоростей, определяемое решением задачи, не позволяет восстановить траектории движения частиц или же траектории не обладают свойствами регулярности, необходимыми для корректности модели.

Выходом из возникшей ситуации, как отмечено в [9, с. 30], является сглаживание (регуляризация) поля скоростей и определение траекторий $z = Z_\delta(u)$ для

сглаженного поля скоростей $S_\delta(u)$. При этом уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - \eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \Delta u - \\ & - 2\eta \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1^2} \int_0^t e^{\frac{s-t}{\lambda_1}} \operatorname{Div}[\mathcal{E}(s, Z_\delta(u)(s; t, x))] ds + \operatorname{grad} p = \\ & = \rho f + e^{-\frac{t}{\lambda_1}} \operatorname{Div} \left[\sigma_0(Z_\delta(u)(0; t, x)) - 2\eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathcal{E}_0(Z_\delta(u)(0; t, x)) \right], \quad (0.15) \\ & \operatorname{div} u = 0. \end{aligned}$$

На этом пути в [3] показано существование слабого решения начально-краевой задачи для системы уравнений (0.15).

С другой стороны, можно не выражать явно σ из соотношения (0.13), а рассматривать начально-краевую задачу для системы (0.1), (0.2), (0.13). Существование слабого решения для этой задачи было показано в [10]. Ниже обсуждается вопрос о сходимости слабых решений начально-краевых задач для регуляризованной модели к слабым решениям начально-краевой задачи для системы (0.1), (0.2), (0.13) при стремлении δ к нулю.

1. Обозначения

Мы будем использовать следующие обозначения, большинство из которых стандартны.

Обозначим через $\mathbb{R}^{n \times n}$ пространство матриц порядка $n \times n$ со скалярным произведением

$$(A, B)_{\mathbb{R}^{n \times n}} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} B_{ij}, \quad A = (A_{ij}), \quad B = (B_{ij}),$$

а через $\mathbb{R}_S^{n \times n}$ — подпространство симметричных матриц.

Обозначим через $\mathbb{R}^{n \times n \times n}$ пространство упорядоченных наборов из n матриц порядка $n \times n$ со скалярным произведением

$$(A, B)_{\mathbb{R}^{n \times n \times n}} = \sum_{i=1}^n (A_i, B_i)_{\mathbb{R}^{n \times n}}, \quad A = (A_1, \dots, A_n), \quad B = (B_1, \dots, B_n).$$

Ниже Ω обозначает произвольную ограниченную область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с локально-липшицевой границей.

Символом ∇u будем обозначать матрицу Якоби от вектор-функции $u: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Через $\nabla \tau$ будем обозначать упорядоченный набор матриц Якоби столбцов матрицы-функции $\tau: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$.

Ниже E обозначает одно из пространств $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbb{R}_S^{n \times n}$, $\mathbb{R}^{n \times n \times n}$.

Мы будем использовать стандартные обозначения $L_p(\Omega, E)$, $W_p^m(\Omega, E)$, $H^m(\Omega, E) = W_2^m(\Omega, E)$, $H_0^m(\Omega, E) = \dot{W}_2^m(\Omega, E)$ пространств Лебега и Соболева для функций со значениями в E . Иногда для краткости будем писать просто L_p вместо $L_p(\Omega, E)$ и т. п., если из контекста ясно, о каком пространстве E идёт речь.

Скалярные произведения в $L_2(\Omega, E)$ и $H^1(\Omega, E)$ могут быть заданы выражениями

$$(u, v) = \int_{\Omega} (u(x), v(x))_E dx, \quad (u, v)_1 = (u, v) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right).$$

Евклидову норму в E будем обозначать $|\cdot|$, в L_2 — $\|\cdot\|$, в W_2^1 — $\|\cdot\|_1$.

Через $C_0^\infty(\Omega, E)$ будем обозначать пространство гладких функций с компактным носителем в Ω и со значениями в E . Для краткости обозначим символом C_0^∞ пространство $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}_S^{n \times n})$. Пусть

$$\mathcal{V} = \{u \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n), \operatorname{div} u = 0\}.$$

Символами H и V обозначаются замыкания $\mathcal{V}$ соответственно в $L_2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ и $W_2^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Следуя [6], будем отождествлять пространство H и его сопряжённое пространство H^* . Поэтому имеем вложение

$$V \subset H \equiv H^* \subset V^*.$$

Символами $C([0, T]; X)$, $C_w([0, T]; X)$, $L_2(0, T; X)$ и т. п. обозначаются банаховы пространства непрерывных, слабо непрерывных, суммируемых с квадратом и т. п. функций на промежутке $[0, T]$ со значениями в некотором банаховом пространстве X .

Обозначим через $C^1 D(\bar{\Omega})$ множество взаимно-однозначных отображений $z: \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$, совпадающих с тождественным отображением на $\partial\Omega$ и имеющих непрерывные частные производные первого порядка, такие что $\det\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 1$ в каждой точке области $\bar{\Omega}$. Будем предполагать, что в этом множестве используется метрика пространства непрерывных функций $C(\bar{\Omega})^n$.

Положим также $CG = C([0, T] \times [0, T], C^1 D(\bar{\Omega}))$.

Через $K(\cdot, \dots, \cdot)$ будем обозначать положительные константы, непрерывно зависящие от перечисленных в скобках аргументов.

2. Различные постановки начально-краевых задач для модели Джеффриса

2.1. Нерегуляризованная задача

Начально-краевая задача, описывающая движение несжимаемой вязкоупругой среды, в модели Джеффриса без регуляризации имеет следующий вид [10]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \operatorname{grad} p = \operatorname{Div} \sigma + f, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma + \lambda_1 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \right) = \\ = 2\eta \left(\mathcal{E} + \lambda_2 \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_i} \right) \right), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \quad (2.3)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0, T), \quad (2.4)$$

$$u|_{t=0} = a, \quad \sigma|_{t=0} = \sigma_0. \quad (2.5)$$

Здесь η — вязкость среды, λ_1 — время релаксации, $\lambda_2 < \lambda_1$ — время запаздывания и $T > 0$. Дивергенция div и градиент grad берутся по переменной x . Плотность ρ здесь и ниже считается равной единице.

Пусть $f \in L_2(0, T; V^*)$. Слабым решением задачи (2.1)–(2.5) называется пара функций (u, σ) ,

$$u \in L_2(0, T; V) \cap C_w([0, T]; H), \quad \frac{du}{dt} \in L_1(0, T; V^*), \quad (2.6)$$

$$\sigma \in L_2(0, T; L_2(\Omega, \mathbb{R}_S^{N \times N})) \cap C_w([0, T]; H^{-1}(\Omega, \mathbb{R}_S^{N \times N})), \quad (2.7)$$

удовлетворяющая условию (2.5) и тождествам

$$\frac{d}{dt}(u, \varphi) + (\sigma, \nabla \varphi) - \sum_{i=1}^n \left(u_i u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = \langle f, \varphi \rangle, \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} (\sigma, \Phi) + \lambda_1 \frac{d}{dt}(\sigma, \Phi) - \lambda_1 \sum_{i=1}^n \left(u_i \sigma, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) = \\ = 2\eta(\mathcal{E}(u), \Phi) + 2\eta\lambda_2 \left(\frac{d}{dt}(\mathcal{E}(u), \Phi) + \sum_{i=1}^n \left(u_i \mathcal{E}(u), \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

для всех $\varphi \in \mathcal{V}$ и $\Phi \in C_0^\infty$ в смысле распределений на $(0, T)$.

В [10] была доказана разрешимость этой задачи при $a \in H$, $\sigma_0 \in W_2^{-1}(\Omega, \mathbb{R}_S^{n \times n})$, $f \in L_2(0, T; V^*)$, $\sigma_0 - 2\eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathcal{E}(a) \in L_2(\Omega, \mathbb{R}_S^{n \times n})$.

2.2. Регуляризованная задача

Траектории движения частиц среды определяются полем скоростей u как решение интегрального уравнения

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau u(s, z(\tau; t, x)) ds. \quad (2.10)$$

Через $z(\tau; t, x)$ обозначим решение этого уравнения. Функция $z(\tau; t, x)$ показывает положение в момент времени τ , занимаемое частицей, находящейся в момент времени t в точке $x \in \Omega$.

Выберем некоторый линейный оператор регуляризации $S_\delta: H \rightarrow C^1(\bar{\Omega})^n \cap V$ для $\delta > 0$, такой что порождаемое им отображение

$$S_\delta: L_2(0, T; H) \rightarrow L_2(0, T; C^1(\bar{\Omega})^n \cap V)$$

непрерывно, а операторы $S_\delta: L_2(0, T; H) \rightarrow L_2(0, T; H)$ сходятся сильно к тождественному оператору I при $\delta \rightarrow 0$. Конструкция такого оператора приведена в [7].

Рассмотрим уравнение

$$Z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau S_\delta u(s, Z(s; t, x)) ds, \quad \tau, t \in (0, T), \quad x \in \Omega. \quad (2.11)$$

Для каждого $u \in L_2(0, T; V)$ это уравнение имеет единственное решение $Z(\tau; t, x)$ в классе CG (см. [3]). Обозначим его через $Z_\delta(u)(\tau; t, x)$.

Рассмотрим начально-краевую задачу для системы (0.15) с граничным условием (2.4) и начальным условием

$$u|_{t=0} = a \quad (2.12)$$

и предположим для простоты, что

$$\sigma_0 - 2\eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathcal{E}(a) = 0. \quad (2.13)$$

Слабым решением этой регуляризованной задачи (см. [3]) называется функция u из класса (2.6), удовлетворяющая условию (2.12) и тождеству

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(t), \varphi) - \sum_{i=1}^n \left(u_i(t) u(t), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + \mu_1 (\nabla u(t), \nabla \varphi) + \\ + 2\mu_2 \left(\int_0^t e^{\frac{s-t}{\lambda_1}} \mathcal{E}(s, Z_\delta(u)(s; t, \cdot)) ds, \mathcal{E}(\varphi) \right) = (f(t), \varphi) \end{aligned} \quad (2.14)$$

для всех $\varphi \in V$ на $(0, T)$. Здесь и ниже

$$\mu_1 = \eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \mu_2 = \frac{\eta - \mu_1}{\lambda_1}.$$

Замечание. Это тождество получается из следующих соображений. Пусть (u, p) — классическое решение задачи (0.15), (2.4), (2.12). В силу условия (2.13) второе слагаемое в правой части (0.15) равно нулю. Умножив скалярно в L_2 равенство (0.15) на $\varphi \in V$ и проинтегрировав полученное равенство по частям, получим тождество (2.14).

Разрешимость этой задачи при $f \in L_1(0, T; H) + L_2(0, T; V^*)$ и $a \in H$ показана в [3].

2.3. Второй вариант регуляризованной задачи

Рассмотрим также следующую задачу, которая получается непосредственной регуляризацией задачи (2.1)–(2.5). Под слабым решением этой задачи будем понимать пару функций (u, σ) , удовлетворяющую условиям (2.5)–(2.8) и условию

$$\begin{aligned} (\sigma, \Phi) + \lambda_1 \frac{d}{dt}(\sigma, \Phi) - \lambda_1 \sum_{i=1}^n \left((S_\delta u)_i \sigma, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) = \\ = 2\eta(\mathcal{E}(u), \Phi) + 2\eta\lambda_2 \left(\frac{d}{dt}(\mathcal{E}(u), \Phi) + \sum_{i=1}^n \left((S_\delta u)_i \mathcal{E}(u), \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

для всех $\varphi \in \mathcal{V}$ и $\Phi \in C_0^\infty$ в смысле распределений на $(0, T)$.

Оказывается, что задачи (2.12), (2.14) и (2.5), (2.8), (2.15) очень тесно связаны.

Теорема 2.1. Пусть функция u из класса (2.6) является решением задачи (2.12), (2.14). Тогда пара (u, σ) , где

$$\sigma(t) = 2\mu_1 \mathcal{E}(u)(t) + 2\mu_2 \int_0^t e^{-\frac{t-s}{\lambda_1}} \mathcal{E}(u)(s, Z_\delta(u)(s; t, \cdot)) ds, \quad (2.16)$$

является решением задачи (2.5), (2.8), (2.15) в классе (2.6), (2.7).

Для доказательства теоремы 2.1 нам потребуются две технические леммы. Обозначим через I_1 второе слагаемое в правой части (2.16).

Лемма 2.1. Имеет место оценка

$$\|I_1\|_{L_\infty(0, T; L_2)} \leq K(\|u\|_{L_2(0, T; V)}), \quad (2.17)$$

где K не зависит от δ .

Доказательство. Заметим, что выражение I_1 может быть записано в виде $B(u, Z_\delta(u))$, где $Z_\delta: L_2(0, T; V) \rightarrow CG$ — разрешающий оператор для уравнения (2.11), а оператор B задан формулой

$$B(u, z)(t) = 2\mu_2 \int_0^t e^{-\frac{t-s}{\lambda_1}} \mathcal{E}(u)(s, z(s; t, \cdot)) ds, \quad u \in L_2(0, T; V), \quad z \in CG.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|B(u, z)\|_{L_\infty(0, T; L_2)}^2 &= 4\mu_2^2 \sup_{t \in (0, T)} \int_\Omega \int_0^t [e^{-\frac{t-s}{\lambda_1}} |\mathcal{E}(u)(s, z(s; t, x))| ds]^2 dx \leq \\ &\leq 4\mu_2^2 \sup_{t \in (0, T)} \int_0^T \int_\Omega |\mathcal{E}(u)(s, z(s; t, x))|^2 dx ds = 4\mu_2^2 \int_0^T \int_\Omega |\mathcal{E}(u)(s, z)|^2 dz ds = \\ &= 4\mu_2^2 \int_0^T \|\mathcal{E}(u)(s, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 ds \leq K\|u\|_{L_2(0, T; V)}^2. \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что $\det \frac{\partial z}{\partial x} = 1$. Из полученной цепочки равенств и неравенств немедленно следует оценка (2.17).

Лемма 2.2. Пусть $v \in C^1(\bar{\Omega})^n \cap V$ и z_v — решение уравнения (2.10), в котором u заменено на v . Тогда для любой функции $\zeta \in L_2(0, T; L_2(\Omega, \mathbb{R}))$ интеграл

$$\xi(t) = \int_0^t \zeta(s, z_v(s; t, \cdot)) ds$$

принадлежит $L_2(0, T; L_2)$ и имеет место тождество

$$\frac{d}{dt}(\xi, \psi) - \sum_{i=1}^n \left(v_i \xi, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) = (\zeta, \psi) \quad (2.18)$$

для всех $\psi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ в смысле распределений на $(0, T)$. Кроме того, $\frac{d\xi}{dt} \in L_1(0, T; H^{-2})$.

Доказательство. Возьмём некоторую последовательность достаточно гладких функций $\{\zeta_m\}$, сходящуюся к ζ в $L_2(0, T; L_2)$. Тогда соответствующие ξ_m сходятся к ξ в $L_2(0, T; L_2)$ (см. [3]). Но гладкие функции ξ_m и ζ_m связаны известной формулой (см., например, [2, (3.3.7)])

$$\frac{d}{dt} \xi_m = \zeta_m,$$

откуда

$$\frac{\partial \xi_m(t)(x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \xi_m(t)(x)}{\partial x_i} = \zeta_m(t)(x).$$

Умножим обе части этого равенства скалярно в $L_2(\Omega, \mathbb{R})$ на произвольную функцию ψ , принадлежащую классу $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ при почти всех $t \in (0, T)$. Проинтегрировав по частям во втором слагаемом в левой части, получим

$$\frac{d}{dt}(\xi_m, \psi) - \sum_{i=1}^n \left(v_i \xi_m, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) = (\zeta_m, \psi).$$

Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$ в смысле распределений на $(0, T)$, приходим к формуле (2.18).

Из (2.18), пользуясь неравенством Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt}(\xi, \psi) \right| &\leq \sum_{i=1}^n \left| \left(v_i \xi, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \right| + |(\zeta, \psi)| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|v_i\|_{L_2(0, T; L_4)} \|\xi\|_{L_2(0, T; L_2)} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\|_{L_4} + \|\zeta\|_{L_2(0, T; L_2)} \|\psi\|_{L_2} \leq \\ &\leq \|v\|_{L_2(0, T; V)} \|\xi\|_{L_2(0, T; L_2)} \|\psi\|_{H_0^2} + \|\zeta\|_{L_2(0, T; L_2)} \|\psi\|_{L_2}. \end{aligned}$$

Здесь использовано известное непрерывное вложение $H_0^1(\Omega)$ и V в L_4 . По [6, глава III, лемма 1.1] получаем $\frac{d\xi}{dt} \in L_1(0, T; H^{-2})$.

Доказательство теоремы 2.1. Покажем сначала, что определённое формулой (2.16) σ принадлежит классу (2.7). Действительно, так как

$$u \in L_2(0, T; V) \cap C_w([0, T]; H),$$

то первое слагаемое $2\mu_1\mathcal{E}(u)$ в (2.16) лежит в

$$L_2(0, T; L_2) \cap C_w([0, T]; H^{-1}).$$

По лемме 2.1 второе слагаемое I_1 в (2.16) лежит в $L_\infty(0, T; H)$. Из леммы 2.2 следует, что $\frac{d}{dt}I_1 \in L_1(0, T; H^{-2})$. Поэтому $I_1 \in C_w([0, T]; H)$ [6, глава III, лемма 1.4]. Следовательно, σ принадлежит классу (2.7).

Из (2.14) и (2.16) сразу следует, что выполнено (2.8). А из (2.16) и (2.13) следует

$$\sigma|_{t=0} = 2\mu_1\mathcal{E}(u)|_{t=0} = 2\mu_1\mathcal{E}(a) = \sigma_0.$$

Итак, начальные условия (2.5) выполнены.

Остаётся показать справедливость (2.15). Возьмём произвольную функцию $\Phi \in C_0^\infty$. Из (2.16) имеем

$$e^{\frac{t}{\lambda_1}}(\sigma - 2\mu_1\mathcal{E}(u)) = 2\mu_2 \int_0^t e^{\frac{s}{\lambda_1}} \mathcal{E}(u)(s, Z_\delta(u)(s; t, \cdot)) ds.$$

По лемме 2.2 тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{\frac{t}{\lambda_1}}(\sigma - 2\mu_1\mathcal{E}(u)), \Phi) - e^{\frac{t}{\lambda_1}} \sum_{i=1}^n \left((S_\delta(u))_i (\sigma - 2\mu_1\mathcal{E}(u)), \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) = \\ = 2\mu_2 e^{\frac{t}{\lambda_1}} (\mathcal{E}(u), \Phi), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_1} e^{\frac{t}{\lambda_1}} (\sigma - 2\mu_1\mathcal{E}(u), \Phi) + e^{\frac{t}{\lambda_1}} \frac{d}{dt} (\sigma - 2\mu_1\mathcal{E}(u), \Phi) - \\ - e^{\frac{t}{\lambda_1}} \sum_{i=1}^n \left((S_\delta(u))_i (\sigma - 2\mu_1\mathcal{E}(u)), \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) = 2\mu_2 e^{\frac{t}{\lambda_1}} (\mathcal{E}(u), \Phi). \end{aligned}$$

Поделив на $\frac{1}{\lambda_1} e^{\frac{t}{\lambda_1}}$ и перегруппировав члены, получим

$$\begin{aligned} (\sigma, \Phi) + \lambda_1 \frac{d}{dt} (\sigma, \Phi) - \lambda_1 \sum_{i=1}^n \left((S_\delta u)_i \sigma, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) = \\ = 2(\mu_1 + \mu_2 \lambda_1) (\mathcal{E}(u), \Phi) + 2\mu_1 \lambda_1 \frac{d}{dt} (\mathcal{E}(u), \Phi) + 2\mu_1 \lambda_1 \sum_{i=1}^n \left((S_\delta u)_i \mathcal{E}(u), \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right). \end{aligned}$$

Это немедленно влечёт (2.15).

3. Поведение решений регуляризованных задач при $\delta \rightarrow 0$

В этом разделе мы будем предполагать, что $a \in H$, $\sigma_0 \in W_2^{-1}(\Omega, \mathbb{R}_S^{n \times n})$, $f \in L_2(0, T; V^*)$ и выполнено условие (2.13). В [3] было показано существование решений задачи (2.12), (2.14), которые удовлетворяют оценке

$$\|u\|_{L_2(0, T; V)} + \|u\|_{L_\infty(0, T; H)} + \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L_1(0, T; V^*)} \leq K(\|a\|_H, \|f\|_{L_2(0, T; V^*)}), \quad (3.1)$$

где K не зависит от δ . Эти решения по теореме 2.1 порождают пары решений задачи (2.5), (2.8), (2.15). В этой работе нас интересует поведение этих решений при $\delta \rightarrow 0$. Следующая теорема даёт ответ на этот вопрос.

Теорема 3.1. Пусть $\delta_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ — некоторая последовательность чисел, u_k — некоторые решения задачи (2.12), (2.14) при соответствующих δ_k , удовлетворяющие оценке (3.1), и σ_k — соответствующие тензоры касательных напряжений, найденные по формуле (2.16). Тогда из этой последовательности можно выделить подпоследовательность $\delta_{k_m} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$ и найдётся пара (u_*, σ_*) , такая что

пара (u_*, σ_*) является слабым решением задачи (2.1)–(2.5);

$u_{k_m} \rightarrow u_*$ *-слабо в $L_\infty(0, T; H)$, слабо в $L_2(0, T; V)$, сильно в $L_2(0, T; H)$;

$\sigma_{k_m} \rightarrow \sigma_*$ *-слабо в $L_\infty(0, T; H^{-1})$, слабо в $L_2(0, T; L_2)$.

Доказательство. Из оценки (3.1) следует, что существуют подпоследовательность δ_{k_m} последовательности δ_k и функция u_* , такие что

$$u_{k_m} \rightarrow u_* \text{ слабо в } L_2(0, T; V),$$

$$u_{k_m} \rightarrow u_* \text{ *-слабо в } L_\infty(0, T; H),$$

а последовательность $\left\| \frac{du_{k_m}}{dt} \right\|_{L_1(0, T; V^*)}$ является ограниченной. Тогда по теореме о компактности [6, глава III, теорема 2.3] без ограничения общности можно считать, что

$$u_{k_m} \rightarrow u_* \text{ сильно в } L_2(0, T; H).$$

Далее, имеем

$$\mathcal{E}(u_{k_m}) \rightarrow \mathcal{E}(u_*) \text{ слабо в } L_2(0, T; L_2),$$

$$\mathcal{E}(u_{k_m}) \rightarrow \mathcal{E}(u_*) \text{ *-слабо в } L_\infty(0, T; H^{-1}).$$

По лемме 2.1 выражения

$$2\mu_2 \int_0^t e^{-\frac{t-s}{\lambda_1}} \mathcal{E}(u_{k_m})(s, Z_{\delta_{k_m}}(u_{k_m})(s; t, x)) ds$$

ограничены в $L_\infty(0, T; L_2)$ и, следовательно, в $L_\infty(0, T; H^{-1})$ и $L_2(0, T; L_2)$. Тогда из (2.16) следует, что без ограничения общности

$$\begin{aligned}\sigma_{k_m} &\rightarrow \sigma_* \text{ слабо в } L_2(0, T; L_2), \\ \sigma_{k_m} &\rightarrow \sigma_* \text{ *-слабо в } L_\infty(0, T; H^{-1}).\end{aligned}$$

Операторы S_δ сходятся сильно к тождественному оператору в $L_2(0, T; H)$ при $\delta \rightarrow 0$, поэтому $\|S_\delta\| \leq K$, где K не зависит от δ . Имеем

$$\begin{aligned}\|S_{\delta_{k_m}} u_{k_m} - u_*\|_{L_2(0, T; H)} &\leq \\ &\leq \|S_{\delta_{k_m}}\| \|u_{k_m} - u_*\|_{L_2(0, T; H)} + \|(S_{\delta_{k_m}} - I)u_*\|_{L_2(0, T; H)}.\end{aligned}$$

Оба слагаемых стремятся к нулю при $m \rightarrow \infty$. Итак,

$$S_{\delta_{k_m}} u_{k_m} \rightarrow u_* \text{ сильно в } L_2(0, T; H).$$

Зафиксируем произвольные $\varphi \in \mathcal{V}$ и $\Phi \in C_0^\infty$. Имеем

$$\begin{aligned}&\int_0^T \left| \sum_{i=1}^n \left[\left((S_{\delta_{k_m}} u_{k_m})_i \sigma_{k_m}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) - \left(u_{*i} \sigma_*, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) \right] \right| dt \leq \\ &\leq \int_0^T \sum_{i=1}^n \left[\left| \left([(S_{\delta_{k_m}} u_{k_m})_i - u_{*i}] \sigma_{k_m}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) \right| + \left| \left(u_{*i} [\sigma_{k_m} - \sigma_*], \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) \right| \right] dt \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left[\|S_{\delta_{k_m}} u_{k_m} - u_*\|_{L_2(0, T; H)} \|\sigma_{k_m}\|_{L_2(0, T; L_2)} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right\|_{L_\infty} + \left\langle \sigma_{k_m} - \sigma_*, u_{*i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right\rangle \right].\end{aligned}$$

Здесь скобки $\langle, \rangle$ означают действие функционала из $L_1(0, T; L_2)^* = L_\infty(0, T; L_2)$ на элемент из $L_1(0, T; L_2)$. Все слагаемые стремятся к нулю. Поэтому

$$\sum_{i=1}^n \left((S_{\delta_{k_m}} u_{k_m})_i \sigma_{k_m}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) \rightarrow \sum_{i=1}^n \left(u_{*i} \sigma_*, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) \text{ в } L_1(0, T).$$

Аналогично,

$$\sum_{i=1}^n \left((S_{\delta_{k_m}} u_{k_m})_i \mathcal{E}(u_{k_m}), \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) \rightarrow \sum_{i=1}^n \left(u_{*i} \mathcal{E}(u_*), \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) \text{ в } L_1(0, T).$$

Легко видеть, что и остальные слагаемые (2.8) и (2.15) с подставленными туда u_{k_m} , σ_{k_m} , δ_{k_m} сходятся к соответствующим слагаемым (2.8) и (2.9) с u_* , σ_* в смысле распределений на $(0, T)$. Поэтому пара (u_*, σ_*) удовлетворяет (2.8), (2.9). Стандартным образом (см., например, [10]) проверяется, что выполнено начальное условие (2.5). Кроме того, аналогично доказательству оценок (3.14) и (5.2) в [10] устанавливается, что

$$\frac{du_*}{dt} \in L_1(0, T; V^*), \quad \frac{d}{dt}(\sigma_* - 2\mu_1 \mathcal{E}(u_*)) \in L_2(0, T; H^{-2}).$$

По [6, глава III, лемма 1.1] $u_* \in C([0, T]; V^*)$, $\sigma_* - 2\mu_1 \mathcal{E}(u_*) \in C([0, T]; H^{-2})$. А так как $u_* \in L_\infty(0, T; H)$, $\sigma_* - 2\mu_1 \mathcal{E}(u_*) \in L_\infty(0, T; H^{-1})$, то из [6, глава III, лемма 1.4] следует, что $u_* \in C_w([0, T]; H)$, $\sigma_* - 2\mu_1 \mathcal{E}(u_*) \in C_w([0, T]; H^{-1})$. Это влечёт $\mathcal{E}(u_*) \in C_w([0, T]; H^{-1})$ и $\sigma_* \in C_w([0, T]; H^{-1})$. Теорема полностью доказана.

Литература

- [1] Гольдштейн Р. В., Городцов В. А. Механика сплошных сред. Часть I. — Наука, Физматлит, 2000.
- [2] Звягин В. Г., Воротников Д. А. Математические модели неньютоновских жидкостей. — Воронеж: ВГУ, 2004.
- [3] Звягин В. Г., Дмитриенко В. Т. О слабых решениях регуляризованной модели вязкоупругой жидкости // Дифференц. уравн. — 2002. — Т. 38, № 12. — С. 1633—1645.
- [4] Олдройд Дж. Г. Неньютоновские течения жидкостей и твёрдых тел // Реология: Теория и приложения. — М.: ИЛ, 1962. — С. 757—793.
- [5] Рейнер М. Реология. — М.: Физматгиз, 1965.
- [6] Темам Р. Уравнения Навье—Стокса. — М.: Мир, 1981.
- [7] Dmitrienko V. T., Zvyagin V. G. Investigation of a regularized model of motion of a viscoelastic medium // Analytical Approaches to Multidimensional Balance Laws / ed. O. Rozanova. — New York: Nova Science, 2004.
- [8] Guillopé C., Saut J. C. Mathematical problems arising in differential models for viscoelastic fluids // Mathematical Topics in Fluid Mechanics. — Longman, Harlow, 1993. — P. 64—92.
- [9] Litvinov W. G. A model and general problem on plastic flow under deformations. — Bericht. — Universität Stuttgart, 1999.
- [10] Vortnikov D. A., Zvyagin V. G. On the existence of weak solutions for the initial-boundary value problem in the Jeffreys model of motion of a viscoelastic medium // Abstr. Appl. Anal. — 2004. — Issue 10. — P. 815—829.

