О двухточечной краевой задаче для уравнений геодезических*

Ю. Е. ГЛИКЛИХ
Воронежский государственный университет
e-mail: yeg@alg.vsu.ru

П. С. ЗЫКОВ
Курский государственный университет
e-mail: petya39b@mail.ru

УДК 514.8

Ключевые слова: двухточечная краевая задача, геодезическая струя, риманово многообразие.

Аннотация

Для уравнения типа «геодезической струи» с непрерывными коэффициентами на полном римановом многообразии найдены соотношения между некоторыми геометрическими характеристиками, расстоянием между точками многообразия и нормой правой части уравнения, выполнение которых гарантирует разрешимость двухточечной краевой задачи.

Abstract

Yu. E. Gliklikh, P. S. Zykov, On the two-point boundary-value problem for equations of geodesics, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 4, pp. 65—70.

For equations of "geodesic spray" type with continuous coefficients on a complete Riemannian manifold, some interrelations between certain geometric characteristics, the distance between points, and the norm of right-hand side are found that guarantee solvability of the boundary-value problem.

1. Обсуждение задачи

Хорошо известна классическая задача о возможности соединить две заданные точки многообразия геодезической некоторой связности (см., например, [4]). Для связности Леви-Чивита полного риманова многообразия её разрешимость следует из теоремы Хопфа—Ринова (см., например, [1, 4]). Однако уже для римановой связности с ненулевым кручением это не так: в [3, 5, 6] предъявлены

*Исследование частично поддержано грантами РФФИ 03-01-00112 и 04-01-00081, грантом УР.04.01.003 программы «Университеты России», грантом VZ-010-0 Министерства образования РФ и Американского фонда гражданских исследований и развития.

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 4, с. 65—70.

примеры римановых связностей (в том числе на компактном многообразии — двумерном торе), для которых эта задача не всегда разрешима.

Напомним, что если ∇ и $\bar{\nabla}$ — ковариантные производные двух разных связностей на многообразии M, то существует $(1,2)$-тензорное поле $S(\cdot,\cdot)$ на M, такое что для любых двух векторных полей X и Y на M выполняется соотношение

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + S(X,Y)$$

(см., например, [4, предложение 7.10]). Отсюда следует, что в терминах ковариантной производной ∇ геодезические некоторой другой связности $\bar{\nabla}$ всегда описываются уравнением вида

$$\frac{D}{dt}\dot{m}(t) = \alpha(m(t), \dot{m}(t)), \tag{1}$$

где $\frac{D}{dt}\dot{m} = \nabla_{\dot{m}}\dot{m}$, $\alpha(m,X)$ — векторное поле на M, которое в каждой точке $m \in M$ квадратично зависит от $X \in T_m M$. Всюду ниже в качестве ∇ мы рассматриваем ковариантную производную связности Леви-Чивита некоторой полной римановой метрики на M.

Приведём два элементарных и характерных примера, в которых для решения (1) двухточечная краевая задача не всегда разрешима несмотря на то, что уравнение (1) задано в терминах связности Леви-Чивита полной римановой метрики.

Пример 1. Рассмотрим механическую систему на единичной сфере S^2, вложенной в $\mathbb{R}^3$, с силовым полем

$$\alpha(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) = [\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}]\,\|\dot{\mathbf{r}}\|,$$

где квадратными скобками обозначено векторное произведение. Используя тот факт, что S^2 вложено в $\mathbb{R}^3$, по принципу Даламбера сведём уравнение (1) к уравнению движения со связью вида

$$\ddot{\mathbf{r}} = [\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}]\,\|\dot{\mathbf{r}}\| - 2T\mathbf{r},$$

где $T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2$ — кинетическая энергия. Так как ускорение всюду перпендикулярно скорости, очевидно, что $\dot{T} = 0$. Рассмотрим вектор $\mathbf{b} = [\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}}]$. Непосредственные вычисления показывают, что $\dot{\mathbf{b}} = 0$. Это означает, что любая траектория удовлетворяет условию $(\mathbf{b},\mathbf{r}) = \mathrm{const}$ (круглыми скобками обозначено скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$), т. е. является окружностью на сфере, лежащей в плоскости, перпендикулярной постоянному вектору $\mathbf{b}$. Диаметрально противоположные точки сферы соединяются окружностью большого круга, т. е. $(\mathbf{b},\mathbf{r}) = 0$. Отсюда вытекает равенство для смешанного произведения $(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}}) = 0$, что невозможно. Следовательно, диаметрально противоположные точки на сфере нельзя соединить траекториями. □

Пример 2. Пусть X — вектор из $\mathbb{R}^2$ с координатами (x,y), $a > 0$ — вещественное число, через $\|\cdot\|$ обозначим норму в $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ систему уравнений типа (1)

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -a\|\dot{X}\|\dot{y}, \\ \ddot{y}(t) = a\|\dot{X}\|\dot{x} \end{cases}$$

с начальным условием $X(0) = 0$, $X(0) = X_0$. Поскольку в данном случае вдоль решения $X(t)$ векторы $\dot{X}$ и $\ddot{X}$ ортогональны друг другу, то $\|\dot{X}\|$ постоянно. Пусть $\|X_0\| = C$, представим вектор X_0 в виде $X_0 = C(-\sin\varphi_0, \cos\varphi_0)$. Тогда решение указанной задачи Коши имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{a}\cos(Cat + \varphi_0) - \frac{1}{a}\cos\varphi_0, \quad y(t) = \frac{1}{a}\sin(Cat + \varphi_0) - \frac{1}{a}\sin\varphi_0.$$

Таким образом, любое решение является окружностью радиуса $\frac{1}{a}$ и не выходит из круга радиуса $\frac{2}{a}$ с центром в начальной точке. Подчеркнём, что при увеличении a этот радиус уменьшается. $\square$

Если точки сопряжены вдоль любой геодезической связности Леви-Чивита, их соединяющей, как диаметрально противоположные точки в примере 1, то задача может быть не разрешима даже для равномерно ограниченных $\alpha(m, X)$ (см. [2, 7]). Пример 2 характерен именно для квадратичных правых частей.

Мы исследуем случай, когда m_0 и m_1 не сопряжены вдоль хотя бы одной геодезической связности Леви-Чивита. Рассматривается обобщённая задача, когда $\alpha(m, X)$ в (1) непрерывно по совокупности переменных (в классической задаче $\alpha(m, X)$ гладко). Получено соотношение, связывающее геометрические свойства M, риманово расстояние между m_0 и m_1 и норму оператора α из (1), при выполнении которого гарантируется разрешимость указанной задачи.

Отметим, что для пары точек m_0 и m_1 достаточно доказать существование решения $m(t)$ уравнения (1) со свойством $m(0) = m_0$ и $m(1) = m_1$. Поскольку $\alpha(m, X)$ квадратично по X, линейная замена времени переводит решение в решение. Значит, для любого $t_1 > 0$ с помощью замены времени из $m(t)$ можно построить решение $m_1(t)$, такое что $m_1(0) = m_0$ и $m_1(t_1) = m_1$. Поэтому ниже для простоты изложения мы исследуем разрешимость двухточечной краевой задачи для (1) на отрезке $[0, 1]$.

2. Математический аппарат

В этом разделе мы модифицируем некоторые конструкции из [2, 7] применительно к рассматриваемой задаче.

Пусть M — полное риманово многообразие. Рассмотрим $m_0 \in M$, $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, и пусть $v\colon [0, 1] \to T_{m_0}M$ — непрерывная кривая. Показано, что существует и единственна такая C^1-кривая $m\colon [0, 1] \to M$, что $m(0) = m_0$ и вектор $\dot{m}(t)$ параллелен вдоль $m(\cdot)$ вектору $v(t) \in T_{m_0}M$ при любом $t \in [0, 1]$.

Обозначим кривую $m(t)$, построенную выше по кривой $v(t)$, через $\mathcal{S}v(t)$. Таким образом, корректно определён непрерывный оператор

$$\mathcal{S}\colon C^0([0, 1], T_{m_0}M) \to C^1([0, 1], M),$$

действующий из банахова пространства $C^0([0,1],T_{m_0}M)$ непрерывных отображений (кривых) из $[0,1]$ в $T_{m_0}M$ в банахово многообразие $C^1([0,1],M)$ C^1-отображений из $[0,1]$ в M.

Через $U_k \subset C^0([0,1],T_{m_0}M)$ будем обозначать шар радиуса k с центром в нуле в $C^0([0,1],T_{m_0}M)$.

Пусть точка $m_1 \in M$ не сопряжена с точкой $m_0 \in M$ вдоль геодезической $\gamma(t)$ связности Леви-Чивита. Без ограничения общности мы считаем, что параметр t на $\gamma(t)$ выбран таким образом, что $\gamma(0) = m_0$ и $\gamma(1) = m_1$. Следующее техническое утверждение является модификацией теоремы 3.3 из [2].

Лемма 1. *Существует шар $U_\varepsilon \subset C^0([0,1],T_{m_0}M)$, такой что для любой кривой $\hat{u}(t) \in U_\varepsilon \subset C^0([0,1],T_{m_0}M)$ в некоторой ограниченной окрестности V вектора $\dot\gamma(0)$ в $T_{m_0}M$ с $\sup\limits_{\mathbf{C}\in V}\|\mathbf{C}\| = C > \varepsilon$ существует единственный вектор $\mathbf{C}_{\hat u}$, непрерывно зависящий от $\hat u$, такой что $\mathcal{S}(\hat u + \mathbf{C}_{\hat u})(1) = m_1$.*

Доказательство. По построению оператора $\mathcal{S}$ на постоянной кривой $v_\gamma(t) = \dot\gamma(0)$ значение $\mathcal{S}v_\gamma(1)$ совпадает с $\exp_{m_0}\dot\gamma(0) = m_1$. Так как m_0 и m_1 не сопряжены вдоль γ, $\exp_{m_0}$ является диффеоморфизмом некоторой окрестности вектора $\dot\gamma(0) \in T_{m_0}M$ на окрестность точки m_1 в M. Используя теорему о неявной функции, нетрудно показать, что возмущение экспоненциального отображения, переводящее $X \in T_{m_0}M$ в $\mathcal{S}(X + \hat u)(1)$, также является диффеоморфизмом некоторой окрестности V вектора $\dot\gamma(0)$ на окрестность точки m_1 в M при любой кривой $\hat u(t)$ из достаточно малой ε-окрестности нуля в $C^0([0,1],T_{m_0}M)$. $\square$

Пусть $m(t)$ ($t \in [0,1]$, $m(0) = m_0$) — C^1-кривая в M и $\alpha(m,X)$ — правая часть уравнения типа (1). Обозначим через $\Gamma\alpha(m(t),\dot m(t))$ кривую в $T_{m_0}M$, полученную параллельным переносом векторов $\alpha(m(t),\dot m(t))$ вдоль $m(\cdot)$ в $T_{m_0}M$.

Выберем точку $m_0 \in M$ и вектор $\mathbf{C}$ в $T_{m_0}M$ и рассмотрим интегральное уравнение

$$m(t) = \mathcal{S}\biggl(\int_0^t \Gamma\alpha(m(\tau),\dot m(\tau))\,d\tau + \mathbf{C}\biggr) \tag{2}$$

при $t \in [0,l]$. В [2,7] показано, что кривая $m(t)$ удовлетворяет (2) тогда и только тогда, когда является решением (1) с начальным условием $m(0) = m_0$, $\dot m(0) = \mathbf{C}$.

Определим оператор $\mathcal{B}\colon U_\varepsilon \to C^0([0,1],T_{m_0}M)$, где U_ε — шар из леммы 1, равенством

$$\mathcal{B}u = \int_0^t \Gamma\alpha\left(\mathcal{S}(u(\tau) + \mathbf{C}_u), \frac{d}{d\tau}\mathcal{S}(u(\tau) + \mathbf{C}_u)\right)\,d\tau. \tag{3}$$

Из результатов [2,7] следует, что при непрерывном $\alpha(m,X)$ оператор $\mathcal{B}$ вполне непрерывен. Нетрудно видеть, что если $v(t)$ — неподвижная точка оператора $\mathcal{B}$ (т. е. $v = \mathcal{B}v$), то $m(t) = \mathcal{S}(v(t) + \mathbf{C}_v)$ удовлетворяет (2) с $\mathbf{C} = \mathbf{C}_v$, и следовательно, эта кривая является решением (1), для которого выполняются равенства $m(0) = m_0$, $m(1) = m_1$.

Ниже мы будем показывать разрешимость двухточечной краевой задачи для (1), доказывая, что оператор $\mathcal{B}$ имеет неподвижную точку.

3. Основное утверждение

Везде в этом разделе M — полное риманово многообразие, порожденная римановой метрикой норма в касательных пространствах к M обозначается через $\|\cdot\|$.

Введём норму квадратичного оператора $\alpha(m,\cdot)\colon T_mM \to T_mM$ обычной формулой

$$\|\alpha(m,\cdot)\| = \sup_{\|X\|=1} \|\alpha(m,X)\|$$

для $X \in T_mM$. По построению выполняется оценка

$$\|\alpha(m,X)\| \leqslant \|\alpha(m,\cdot)\|\,\|X\|^2.$$

Теорема. *Пусть $\alpha(m,X)$ из уравнения (1) непрерывно по совокупности переменных, норма $\|\alpha(m,\cdot)\|$ равномерно ограничена некоторым числом $a>0$, точка m_1 не сопряжена с m_0 вдоль хотя бы одной геодезической связности Леви-Чивита и для соответствующих этим точкам чисел C и ε из леммы 1 и числа a выполняется оценка $a < \frac{\varepsilon}{(\varepsilon+C)^2}$. Тогда существует решение $m(t)$ уравнения (1), такое что $m(0)=m_0$ и $m(1)=m_1$.*

Доказательство. Напомним, что $C>\varepsilon$. Тогда очевидным образом выполняется неравенство $\frac{\varepsilon}{(\varepsilon+C)^2} < \frac{1}{4C}$, и из условия теоремы вытекает, что $a < \frac{1}{4C}$.

Докажем два технических утверждения.

Лемма 2. *При $0<a<\frac{1}{4C}$ уравнение $a(K+C)^2 = K$ имеет положительные корни.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение $a(K+C)^2=K$, преобразуем его к виду $aK^2+(2Ca-1)K+C^2a=0$. Его дискриминант равен $1-4Ca$. Значит, при $a<\frac{1}{4C}$ корни вещественны и имеют вид $K_{1,2}=\frac{1-2Ca\pm\sqrt{1-4Ca}}{2a}$. Так как $1-2Ca > \sqrt{1-4Ca}$, то $K_{1,2}>0$. □

Лемма 3. *В условиях теоремы выполняется неравенство $\varepsilon > \frac{1-2Ca-\sqrt{1-4Ca}}{2a}$.*

Доказательство. Представим исследуемое неравенство в виде

$$\varepsilon - \frac{1}{2a} + C > -\frac{\sqrt{1-4Ca}}{2a}. \tag{4}$$

Предположение, что левая часть (4) больше или равна нулю, приводит к неравенству $a > \frac{1}{2(\varepsilon+C)}$, которое противоречит условию теоремы, поскольку очевидно, что $\frac{1}{2(\varepsilon+C)} > \frac{\varepsilon}{(\varepsilon+C)^2}$ при $C>\varepsilon$. В предположении, что левая часть (4) меньше нуля (т. е. $a < \frac{1}{2(\varepsilon+C)}$), после возведения в квадрат обеих частей неравенства получается неравенство $a < \frac{\varepsilon}{(\varepsilon+C)^2}$, выполняющееся по условию теоремы. Поскольку, как уже отмечалось, $\frac{1}{2(\varepsilon+C)} > \frac{\varepsilon}{(\varepsilon+C)^2}$ при $C > \varepsilon$, отсюда следует утверждение леммы. $\square$

Продолжим доказательство теоремы.

В условиях теоремы число $K = \frac{1-2Ca-\sqrt{1-4Ca}}{2a}$ по лемме 2 положительно. Из леммы 3 при этом вытекает, что $\varepsilon > K$. Тогда для $u(t)$ из шара $U_K \subset C^0([0,1], T_m M)$ выполняется лемма 1 и, следовательно, на U_K определён оператор $\mathcal{B}$, введённый в (3). Так как параллельный перенос не меняет нормы вектора, из конструкции оператора $\mathcal{S}$ для любого $u \in U_K$ получаем

$$\left\|\alpha\left(S(u(\tau)+\mathbf{C}_u), \frac{d}{d\tau}S(u(\tau)+\mathbf{C}_u)\right)\right\| \leqslant \|\alpha(Su(\tau),\cdot)\|\,\|u(\tau)+\mathbf{C}_u\|^2.$$

По построению

$$\|\alpha(Su(\tau),\cdot)\|\,\|u(\tau)+\mathbf{C}_u\|^2 \leqslant a(K+C)^2 = K.$$

Так как параллельный перенос не меняет нормы вектора, для кривой $v(t) = \mathcal{B}u(t)$ при любом $t \in [0,1]$ выполняется $\|v(t)\| \leqslant Kt \leqslant K$. Следовательно, вполне непрерывный оператор $\mathcal{B}$ переводит в себя шар U_K и по принципу Шаудера имеет в этом шаре неподвижную точку u^*. Тогда, как сказано выше, $m(t) = \mathcal{S}(u^* + \mathbf{C}_{u^*})(t)$ — решение (1), для которого $m(0) = m_0$ и $m(t_1) = m_1$. $\square$

Замечание. Отметим, что если геодезическая, вдоль которой m_0 и m_1 не сопряжены, является кратчайшей, то число C характеризует риманово расстояние между этими точками. Числа C и ε вместе являются некоторой характеристикой римановой геометрии на M в окрестности точки m_0. Теорема устанавливает соотношение между C, ε и правой частью уравнения (1), при котором двухточечная краевая задача для (1) заведомо разрешима для несопряжённых точек m_0 и m_1. $\square$

Литература

[1] Бишоп Р., Криттенден Р. Геометрия многообразий. — М.: Мир, 1967.

[2] Гликлих Ю. Е. Анализ на римановых многообразиях и задачи математической физики. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1989.

[3] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. — М.: Мир, 1971.

[4] Кобаяси Ш., Номицзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. — М.: Наука, 1981.

[5] Bates L. You can't get there from here // Differential Geom. Appl. — 1998. — Vol. 8. — P. 273—274.

[6] Ginzburg V. L. Accessible points and closed trajectories of mechanical systems // Gliklikh Yu. E. Global Analysis in Mathematical Physics. Geometric and Stochastic Methods. — New York: Springer, 1997. — P. 192—201.

[7] Gliklikh Yu. E. Global Analysis in Mathematical Physics. Geometric and Stochastic Methods. — New York: Springer, 1997.