

Геометрическая топология обобщённых 3-многообразий

А. КАВИЧЧОЛИ

Университет Модены и Реджо-нель-Эмилия,
Модена, Италия
e-mail: cavicchioli.alberto@unimo.it

Д. РЕПОВШ

Университет Любляны,
Любляна, Словения
dusan.repovs@fmf.uni-lj.si

Т. ТИКСТУН

Юго-западный университет штата Техас,
Сан-Маркос, США
e-mail: tt04@swt.edu

УДК 515.162.3+515.163

Ключевые слова: обобщённые 3-многообразия, клеточноподобное разрешение, топологическое 3-многообразие, гипотеза Пуанкаре.

Аннотация

Цель статьи — описать историю и современное состояние одной из главных классических проблем маломерной топологии, распознавания топологических 3-многообразий в классе всех обобщённых 3-многообразий (т. е. гомологических 3-многообразий, являющихся ANR). Эта проблема естественно расщепляется на проблему клеточноподобного разрешения для 3-многообразий посредством гомологических многообразий и проблему общего положения для топологических 3-многообразий. Мы приводим также некоторые открытые проблемы.

Abstract

A. Cavicchioli, D. Repovš, T. L. Thickstun, Geometric topology of generalized 3-manifolds, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 4, pp. 71–84.

In this paper, we describe the history and the present status of one of the main classical problems in low-dimensional geometric topology—the recognition of topological 3-manifolds in the class of all generalized 3-manifolds (i.e., ANR homology 3-manifolds). This problem naturally splits into the cell-like resolution problem for 3-manifolds by means of homology 3-manifolds and the general-position problem for topological 3-manifolds. We have also included some open problems.

1. Введение

Мы будем изучать задачу поиска геометрических свойств, которые относительно легко проверяются и позволяют различать 3-многообразия в классе

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 4, с. 71–84.

© 2005 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

топологических пространств. Более общим образом, Кэннон [9] высказал гипотезу, что многообразия могут быть охарактеризованы как обобщённые многообразия, удовлетворяющие минимальным образом свойству общего положения. Необходимость такого критерия возникает, например, в теории непрерывных разбиений, когда нужно решить, будет ли клеточное разбиение данного топологического многообразия снова давать топологическое многообразие (необходимо той же размерности). Уже известны некоторые результаты, среди них совместные работы Реповша и Лехера [24] и Давермана и Реповша [14, 15]. Хотя основное внимание будет уделено размерности 3, сопоставление с результатами, полученными для размерностей 5 и выше, даст как полезное понимание, так и мотивацию. Это имеет смысл объяснить теперь в терминах *обобщённых n -многообразий* X^n , а именно локально компактных, локально стягиваемых, конечномерных метрических пространств с локальными относительными гомологиями $\mathbb{R}^n$, т. е. группа $H_*(X^n, X^n \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$ изоморфна $H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{Z})$ для всех $x \in X^n$.

В этой статье будет предполагаться, если противное не оговорено, что многообразия и обобщённые многообразия не имеют края. Для $n \leq 2$ n -многообразия совпадают с обобщёнными n -многообразиями, но для $n > 2$ ситуация гораздо сложнее. Сделав очевидные замечания, что n -многообразия являются обобщёнными n -многообразиями и что последние определены через элементарные свойства, мы видим, почему кэнноновская гипотеза ставит своей целью распознавание истинных многообразий среди обобщённых.

Если $f: M \rightarrow X$ есть собственное клеточноподобное сюръективное отображение, определённое на n -многообразии, и $\dim X < \infty$, то X есть обобщённое n -многообразие, но примеры, подобные бинговскому пространству собачьей кости [1], показывают, что X не обязательно должно быть топологическим многообразием. Клеточноподобные отображения образуют первичный источник примеров с многообразиями (о топологии клеточноподобных отображений и гомологических многообразий можно прочесть в [12]). Так, обобщённое n -многообразие X называется *разрешимым*, если существует собственное клеточноподобное сюръективное отображение $f: M \rightarrow X$, определённое на некотором n -многообразии M , в этом случае f называется (клеточноподобным) *разрешением* для X .

За исключением некоторых трёхмерных примеров, существование которых зависит от гипотетического опровержения трёхмерной гипотезы Пуанкаре, обобщённые многообразия, построение которых явно описано в литературе, все оказываются разрешимыми. Согласно Квинну [22], существование разрешения данного обобщённого n -многообразия X ($n \geq 5$), сводится к некоторому целочисленному алгебраическому препятствию $i(X)$ к некоторой локальной проблеме перестроек. Это препятствие имеет интригующее свойство быть локально определённым и локально постоянным. Следовательно, если X связно и препятствие исчезает на некотором открытом подмножестве X (например, если некоторое открытое подмножество есть многообразие), тогда X разрешимо.

Как известно, примеры обобщённых n -многообразий X ($n \geq 6$) с неисчезающим препятствием Квинна $i(X) \neq 1$ существуют: они были построены Брайантом, Ферри, Мио и Вайнбергером [7]. Заметим, что ни одно такое связное обобщённое многообразие не может иметь многообразия в качестве окрестности ни одной своей точки. Другие конструкции $4k$ -мерных обобщённых многообразий ($k > 1$), которые не имеют разрешений, можно найти в [11]. Но если трёхмерная гипотеза Пуанкаре неверна, то имеется и неразрешимое обобщённое трёхмерное многообразие X^3 . Более того, X^3 содержит такую точку x_0 , что $X^3 \setminus \{x_0\}$ есть трёхмерное многообразие (см. [23]).

Центральная трёхмерная проблема разрешения состоит в следующем: *при условии, что гипотеза Пуанкаре верна, будут ли все трёхмерные многообразия иметь разрешения?* Тикстун дал утвердительный ответ для обобщённых 3-многообразий, сингулярное множество которых имеет «свойство общего положения в размерности 1» (ранее он рассмотрел случай нульмерного сингулярного множества в [26]).

2. Свойства общего положения

В размерностях больше четырёх работа Эдвардса [18] даёт средство детектирования истинных многообразий среди обобщённых разрешимых в терминах следующего простого свойства общего положения. Говорят, что метрическое пространство X имеет *свойство разделения дисков*, если каждая пара отображений стандартного 2-диска I^2 ($I = [0, 1]$) в X может быть аппроксимирована произвольно близко парой отображений с дизъюнктивными образами. Напомним, что *почти-гомеоморфизм* есть отображение $X \rightarrow Y$ на метрическое пространство, являющееся равномерным пределом сюръективных гомеоморфизмов.

Теорема 2.1 ([18]). Пусть $p: M \rightarrow X$ клеточноподобное разрешение обобщённого n -многообразия X ($n \geq 5$). Тогда отображение p есть почти-гомеоморфизм, если и только если X имеет свойство разделения дисков.

Первую теорему распознавания установил Бинг: он рассмотрел специальное клеточное непрерывное разбиение пространства $\mathbb{R}^3$, пространство которого X получило название пространства собачьей кости. Для того чтобы доказать, что X не есть 3-многообразие, он показал, что X не обладает некоторым свойством разделения дисков, которое выполнено в $\mathbb{R}^3$. Его пример особенно интригует тем, что, как оказывается, он даёт делитель 4-многообразия.

Теорема 2.2 ([1]).

1. X не является топологическим многообразием.
2. Произведение $X \times \mathbb{R}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^4$.

Первые результаты в размерности 3, близкие к эдвардсовским, получили Ламберт и Шер [20] и, десятилетием позже, Реповш и Лехер [24]. Наконец, Даверман и Реповш доказали в [14, 15] трёхмерный вариант теоремы Эдвардса.

Одна из трудностей состояла в формулировке подходящего общего свойства. Свойство разделение дисков, очевидно, не годится, поскольку ни трёх-, ни четырёхмерные многообразия им не обладают, так что требовалось найти какое-то альтернативное свойство. Они изучили несколько подходов, в основном описываемых в терминах свойств, которые мы называем свойствами симплициальной аппроксимации.

Определение 2.3.

Пространство X обладает *свойством слабой симплициальной аппроксимации*, если для каждого отображения $\mu: I^2 \rightarrow X$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует отображение $\psi: I^2 \rightarrow X$, для которого $\text{dist}_X(\mu, \psi) < \varepsilon$, причём $\psi(I^2)$ содержится в конечном объединении 2-клеток $B_i \subset X$, каждая из которых вложена со свойством 1-LCC в X .

Более того, X обладает *свойством симплициальной аппроксимации*, если для каждого $\mu: I^2 \rightarrow X$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует отображение $\psi: I^2 \rightarrow X$ и конечный топологический 2-комплекс $K_\psi \subset X$, такие что

- 1) $\text{dist}_X(\psi, \mu) < \varepsilon$;
- 2) $\psi(I^2) \subset K_\psi$;
- 3) $X \setminus K_\psi$ обладает свойством 1-FLG в X .

Наконец, X обладает *свойством сферической симплициальной аппроксимации*, если это же верно с заменой всюду I^2 на S^2 .

Условие 1-FLG есть известная характеристика ручного вложения 2-комплекса K_ψ в 3-многообразие M^3 (о многих понятиях, связанных с периферической ациклическостью и локальными гомотопическими свойствами, можно прочесть в [10, 13]).

Нужно отметить три элементарных, но имеющих важное значение наблюдения. Первое, что для 2-комплекса $K_\psi \subset X$ без локально разбивающих точек $X \setminus K_\psi$ имеет свойство 1-FLG в X , если и только если каждый 2-симплекс в K_ψ вложен со свойством 1-LCC в X . Второе, что свойство сферической симплициальной аппроксимации влечёт свойство симплициальной аппроксимации, а свойство симплициальной аппроксимации, в свою очередь, влечёт свойство слабой симплициальной аппроксимации. Третье, что многообразия размерности $n \geq 3$ обладают всеми этими свойствами аппроксимации.

Определение 2.4. Метрическое пространство (X, ρ) обладает *свойством разделения для нульмерного отображения*, если для каждого $\varepsilon > 0$, каждого $k \in \mathbb{N}$ и каждого отображения $f: B \rightarrow X$ набора k стандартных 2-клеток

$B = \coprod_{i=1}^k B_i^2$ в X , такого что

- 1) $N_f \subset \text{Int } B$, где $N_f = \{y \in B \mid f^{-1}(f(y)) \neq y\}$;
- 2) $\dim N_f \leq 0$;
- 3) $\dim Z_f \leq 0$, где $Z_f = \{x \in X \mid x \in f(B_i^2) \cap f(B_j^2) \text{ для некоторого } i \neq j\}$.

существует отображение $F: B \rightarrow X$, такое что

- 1) $\rho(F, f) < \varepsilon$;

- 2) $F|\partial B = f|\partial B$;
- 3) $F(B_i^2) \cap F(B_j^2) = \emptyset$ при $i \neq j$.

Об усилении свойства разделения для нульмерного отображения см. [2].

В [14, 15] главными результатами были две теоремы распознавания 3-многообразий, формулируемые в этой терминологии.

Теорема 2.5 ([14]). *Разрешимое обобщённое 3-многообразие X есть топологическое 3-многообразие, если и только если X обладает как свойством слабой симплициальной аппроксимации, так и свойством разделения для нульмерного отображения.*

Теорема 2.6 ([15]). *Разрешимое обобщённое 3-многообразие есть топологическое 3-многообразие, если и только если оно обладает свойством сферической симплициальной аппроксимации.*

Из этого следует, что разрешимое обобщённое 3-многообразие, являющееся многообразием вне нигде не плотного множества точек, будет 3-многообразием, если и только если оно имеет свойство симплициальной аппроксимации.

Проблема 2.7. Будет ли 3-многообразием разрешимое обобщённое 3-многообразие со свойством слабой симплициальной аппроксимации (свойством симплициальной аппроксимации, свойством разделения для нульмерного отображения)?

Приведём два естественных свойства для сингулярных дисков в разрешимом обобщённом 3-многообразии X , которые зависят от явного вида разрешения $f: M \rightarrow X$ для X .

Определение 2.8. Пространство X обладает *свойством разделения дисков для разрешения*, если для каждого $\varepsilon > 0$, каждого $k \in \mathbb{N}$ и каждого набора из k попарно дизъюнктивных ручных вложений $f_i: B^2 \rightarrow M$ существуют отображения $g_i: B^2 \rightarrow X$, для которых

- 1) $\rho(g_i, \pi f_i) < \varepsilon$;
- 2) $g_i(B^2) \cap g_j(B^2) = \emptyset$ при $i \neq j$.

Пространство X обладает *свойством разделения дисков для вложения*, если для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого ручного вложения $f: B^2 \rightarrow M$ существует вложение $g: B^2 \rightarrow X$, для которого $\rho(g, \pi f) < \varepsilon$.

Довольно удивительно, что ещё не разрешена следующая проблема.

Проблема 2.9. Будет ли каждое клеточное разрешение обобщённого 3-многообразия со свойством разделения дисков для разрешения (свойством разделения дисков для вложения) почти-гомеоморфизмом?

Проблема 2.10. Будет ли каждое обобщённое 3-многообразие со свойством сферической симплициальной аппроксимации разрешимым (и значит, 3-многообразием)?

3. Клеточноподобные разрешения

Гипотеза разрешения в размерности три влечёт гипотезу Пуанкаре. Доказательство этого (только намеченное здесь) опирается на следующее построение: «замену» каждого полиэдрального 3-шара в данной дизъюнктивной нуль-последовательности в произвольном замкнутом 3-многообразии M на компактное стягиваемое 3-многообразие. (Мы назовём полученное таким образом пространство *3-почти-многообразием*.) Конечно, если классическая гипотеза Пуанкаре верна, каждое компактное стягиваемое 3-многообразие гомеоморфно стандартному 3-шару и, значит, такое построение даст только M . Однако если гипотеза Пуанкаре неверна (и проделано бесконечно много замещений фальшивыми 3-шарами), то результирующее пространство будет неразрешимым обобщённым 3-многообразием. Более тонкие примеры неразрешимых обобщённых 3-многообразий (при нарушении гипотезы Пуанкаре) были построены в [4,5]. Эти примеры не содержат фальшивых 3-шаров, но допускают так называемые «почти-разрешения» (определённые ниже). В свете указанных примеров следующая гипотеза является более разумной переформулировкой гипотезы разрешения (в том смысле, что при выполнении гипотезы Пуанкаре она ей эквивалентна, но гипотеза Пуанкаре из неё не следует).

Гипотеза почти-разрешения 3.1. Любое обобщённое 3-многообразие является клеточноподобным образом 3-почти-многообразия.

Определение 3.2. Мы назовём такое отображение *почти-разрешением* обобщённого 3-многообразия. Далее, если X есть обобщённое 3-многообразие, то *сингулярное множество* в X определено как $S(X) = \{p \in X \mid p \text{ не имеет евклидовой окрестности}\}$. *Многообразная часть* X есть $M(X) = X \setminus S(X)$.

Замечания. Построение 3-почти-многообразия обобщено Джакобшеном, который получил при условии нарушения гипотезы Пуанкаре контрпример к гипотезе Бинга—Борсука (она утверждает, что любой трёхмерный однородный ANR есть 3-многообразие). Этот пример представляет собой (аккуратно проверяемый) обратный предел 3-многообразий, содержащих последовательно увеличивающееся число фальшивых 3-шаров. Эти пространства являются всюду сингулярными обобщёнными 3-многообразиями, но клеточноподобными образами 3-почти-многообразий [Тикстун, не опубликовано] и, значит, совместимыми с гипотезой почти-разрешения.

Упор, делавшийся в основном на гипотезу разрешения (и также почти-разрешения), привел к ряду теорем разрешения, в каждой из которых делается какое-нибудь дополнительное предположение (помимо самой гипотезы разрешения), некоторое ограничение на «размер» (или в иных случаях «сложность») сингулярного множества рассматриваемого обобщённого 3-многообразия. Мы формулируем эти теоремы в порядке их появления (что примерно соответствует порядку возрастания их общности, см. замечания ниже). В каждом из этих утверждений X есть замкнутое обобщённое 3-многообразие, и мы приводим нужные дополнительные определения.

Теорема 3.3 ([8]). Если $S(X)$ нульмерно и имеет свойство 1-LCC, то X есть замкнутое 3-почти-многообразие (и значит, тождественное отображение является почти-разрешением).

Замечание. Утверждение в [8] предполагает, что $M(X)$ содержит не более конечного числа фальшивых 3-шаров, и заключает, что X есть 3-многообразие. Приведённая формулировка является лёгким обобщением.

Теорема 3.4 ([4]). Если $S(X)$ нульмерно и торально, то, по модулю гипотезы Пуанкаре, X имеет разрешение.

Определение 3.5. Сингулярное множество $S(X)$ *торально*, если для данной окрестности U множества $S(X)$ в X найдётся его компактная окрестность V , $V \subset U$, такая что граница V есть дизъюнктное объединение конечного числа торов.

Теорема 3.6 ([5]). Если $S(X)$ нульмерно и имеет произвольно тесные окрестности с фундаментальными группами без кручения, то, по модулю гипотезы Пуанкаре, X имеет разрешение.

Определение 3.7. Сингулярное множество $S(X)$ имеет *произвольно тесные окрестности с фундаментальной группой без кручения*, если для данной окрестности U для $S(X)$ имеется окрестность V , $V \subset U$, такая что каждая компонента V имеет фундаментальную группу без кручения.

Теорема 3.8 ([25]). Если $S(X)$ нульмерно, X имеет почти-разрешение.

Теорема 3.9 ([27]). Если $S(X)$ имеет свойство общего положения в размерности 1 в X , то X имеет почти-разрешение.

Определение 3.10. Если X — обобщённое 3-многообразие и A — компактное подпространство X , мы скажем, что A имеет *общее положение в размерности 1* в X , если любое отображение $f: B^2 \rightarrow X$ может быть аппроксимировано (с точностью до любого данного $\varepsilon > 0$) отображением $g: B^2 \rightarrow X$, таким что $g(B^2) \cap A$ нульмерно. (Предупреждение: в первой версии [27] это свойство называлось «размерность вложения 1».)

Замечания. Очевидно, теорема 3.9 влечёт теорему 3.8 и теорема 3.8 сильнее, чем каждая из теорем 3.3, 3.4 и 3.6. Соотношения между теоремами 3.3, 3.4 и 3.6 менее ясны. Конечно, из заключения теоремы 3.3 следует, что любое обобщённое 3-многообразие (как в условии) имеет «сферическое» сингулярное множество и поэтому теорема 3.4 применима a posteriori к более широкому классу обобщённых 3-многообразий. Неясно (и неизвестно авторам), будут ли условия теоремы 3.4 гарантировать отсутствие кручения для окрестностей $S(X)$ и, значит, будет или не будет теорема 3.6 сильнее теоремы 3.4. С другой стороны, кажется, что не существует примера X обобщённого 3-многообразия, для которого $\dim S(X) = 0$ и выполнено условие отсутствия кручения теоремы 3.6.

Обобщённое 3-многообразие, удовлетворяющее условиям теоремы 3.9, но не теоремы 3.8, построить легко. Для построения одного особенно прозрачного класса таких примеров нужно действовать следующим образом. Пусть K —

ручной 1-полиэдр в замкнутом 3-многообразии M , и пусть $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — нуль-последовательность попарно дизъюнктивных клеточноподобных, но не клеточных компактов в M , такая что $C_i \cap K$ — одна точка для каждого i и $\bigcup_{i=1}^{\infty} (C_i \cap K)$ плотно в K . Пространство разбиения M , состоящего из $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ и отдельных точек, даёт желаемый пример X .

4. Виртуальная теорема о петле

Главная составляющая в доказательстве каждой из этих теорем есть либо теорема о петле классической топологии 3-многообразий [19], либо некоторое её расширение или вариант (хотя доказательство теоремы 3.4, по сравнению с тем, как оно представлено в [4], должно быть значительно изменено, чтобы подходить под этот шаблон). Намёк на значение расширений теоремы о петле и её роли в доказательстве гипотезы разрешения (или во всяком случае специальных случаев этой теоремы) имелся в диссертации Брина [3]. В дальнейшем Брин доказал некоторую форму теоремы о петле (мы её не приводим), беря в её условиях некоторое компактное множество (вместо диска). То, что теорема о петле прямо вела к теореме 3.6 и её предположению об отсутствии кручения, вытекает из теоремы о петле Брина. Следующая теорема о петле (виртуальная теорема о петле) лежит в основе доказательства теоремы 3.9. Мы введём для начала один термин и некоторое обозначение. Для данного $\alpha: S^1 \rightarrow Y$ (где Y связно) обозначим через $[\alpha]$ объединение двух сопряжённых классов в $\pi_1(Y)$, которые α представляет. Отображение $g: B^2 \rightarrow X$, где X есть обобщённое 3-многообразие, будет называться *псевдовложением*, если $\dim[g(B^2) \cap S(X)] \leq 0$ и множество $\{x \in X \mid x \in g(B^2) \text{ и } g^{-1}(x) \text{ не одноточечно}\}$ содержится в $S(X)$ (так что, грубо говоря, g есть вложение «вне» $S(X)$).

Виртуальная теорема о петле 4.1. Допустим, что X есть обобщённое 3-многообразие с краем, R — связная поверхность в ∂X , G — нормальная подгруппа в $\pi_1(R)$ и $f: (B^2, \partial B^2) \rightarrow (X, R)$ — такое отображение, что $[f|_{\partial B^2}] \notin G$. Если $S(X)$ имеет свойство общего положения в размерности 1 в X , то существует псевдовложение $g: (B^2, \partial B^2) \rightarrow (X, R)$, для которого $[g|_{\partial B^2}] \notin G$.

Замечания. Для удобства объяснений мы представили эту теорему в меньшей общности, чем она дана в [27]. Слегка изменённая виртуальная теорема о петле, имеющаяся в [25], давала бы то же утверждение, но с дополнительным условием, что $\dim S(X) \leq 0$.

Далее приводится очень краткий и сверхупрощённый набросок вывода теоремы 3.9 (из виртуальной теоремы о петле), имеющий целью показать лишь характер доказательства. Допустим, $f: B^2 \rightarrow X$ — «нетривиальный» сингулярный диск «в общем положении» в X (т. е. $\dim[f(B^2) \cap S(X)] = 0$ и f не может быть ϵ -прогомотопировано от $S(X)$). Последовательно применяя виртуальную теорему о петле, мы получим семейство $\{g_i: B^2 \rightarrow X\}_{i=1}^n$ псевдовложений с попарно

дизъюнктными образами, такое что $[f|\partial B^2]$ принадлежит к нормальному замыканию объединения классов сопряжённости в $\pi_1(U)$, определённых $\{g_i|\partial B^2\}_{i=1}^n$, где U есть некоторая «малая» окрестность $f(B^2)$ минус $S(X)$. Теперь для каждого i пусть N_i — регулярная окрестность $g_i(B^2) \setminus S(X)$ в $M(X)$. Заметим, что $\tilde{N}_i$ для каждого i гомеоморфно произведению открытого единичного интервала $(0, 1)$ с $\dot{B}^2 \setminus Z_i$, где Z_i есть некоторое компактное нульмерное подпространство в $\dot{B}^2$. Прикрепим $B^2 \times (0, 1)$ к $X \setminus [g_i(B^2) \cap S(X)]$ с помощью этого гомеоморфизма. Повторим эту процедуру для каждого i , чтобы получить некомпактное пространство, для которого $f|\partial B^2$ гомотопно нулю в $M(V) = V \setminus S(V)$. Одноточечная компактификация V (обозначаемая X_2) снова есть обобщённое 3-многообразие, сингулярное множество которого имеет свойство общего положения в размерности 1. Более того, если обозначить $X = X_1$, найдётся легко определяемая «проекция» $p_1: X_2 \rightarrow X_1$, которая будет клеточной. Итерируя это построение (и используя подходящие нетривиальные сингулярные диски в общем положении), мы получим обратную последовательность клеточноподобных отображений на обобщённые 3-многообразия:

$$X_1 \xleftarrow{p_1} X_2 \xleftarrow{p_2} X_3 \xleftarrow{p_3} \dots$$

Проекция из $X_\infty = \lim X_i$ в X_1 есть клеточноподобное отображение, определённое на обобщённом 3-многообразии, и при этом любой сингулярный диск в X_∞ может быть аппроксимирован диском с образом в $M(X_\infty)$ (значит, $S(X_\infty)$ 1-LCC). По теореме 3.3 X_∞ есть 3-почти-многообразие, и доказательство закончено.

Длинное (почти на 50 страниц) доказательство виртуальной теоремы о петле невозможно даже эскизно описать здесь сколько-нибудь адекватно, но мы укажем некоторые из главных идей (отметим, однако, что отличия между доказательством виртуальной теоремы о петле, приведённой выше, и менее общей её версии в [25] имеют слишком технический характер, чтобы их здесь затрагивать). Напомним сначала доказательство классической теоремы о петле [19] (условия этой теоремы те же, что и в приведённой виртуальной теореме о петле, за исключением того, что объемлющее пространство X есть 3-многообразие, а заключение такое же, но требуется, чтобы g было вложением). Строится коммутативная диаграмма (называемая «башней»).

$$\begin{array}{ccccccc}
 X \supset N_1 & \longleftarrow & \tilde{N}_1 \supset N_2 & \longleftarrow & \tilde{N}_2 \supset N_3 & \longleftarrow & \dots \longleftarrow \tilde{N}_{n-1} \supset N_n \\
 f_1 \uparrow & & f_2 \uparrow & & f_3 \uparrow & & f_n \uparrow \\
 B^2 & \xlongequal{\quad} & B^2 & \xlongequal{\quad} & B^2 & \xlongequal{\quad} & \dots \xlongequal{\quad} B^2
 \end{array}$$

Здесь $f_1 = f$ и N_1 — регулярная окрестность $f(B^2)$. N_i есть регулярная окрестность $f_i(B^2)$ в $\tilde{N}_{i-1}$ для всех i , где $\tilde{N}_i$ — связное двулистное накрытие N_{i-1} и f_i — поднятие f_{i-1} в $\tilde{N}_{i-1}$. Можно показать, что «башня» должна «закончиться» (т. е. N_n не имеет связного двулистного накрытия), откуда выводится (через двойственность), что род ∂N_n есть нуль. Тогда из $f_n(\partial B^2)$ легко извлекается вложенная «подпетля», которая (будучи спроектирована в X) «избегает»

нормальную подгруппу G . Конечно, эта подпетля ограничивает диск в ∂N_n . Этот диск проектируется шаг за шагом к низу башни («вниз» значит влево по диаграмме). Однако если на данном уровне были введены самопересечения, немедленно производятся разрезы Дена, чтобы восстановить инъективность (поскольку проекции двукратны, такие разрезы легко выполняются). Наконец, в нижней части башни (в X) мы получаем желаемое вложение.

В более общих условиях виртуальной теоремы о петле разрезы Дена становятся проблематичными (даже для отображений, самопересечения которых в $M(X)$ являются простыми двойными линиями) и был придуман альтернативный подход. Мы сперва проиллюстрируем его использование в контексте классической теоремы о петле, но только чтобы вывести существование такого отображения g , что $g|_{\partial B^2}$ инъективно. Построим башню как раньше, но с такими изменениями: отображения f_i определены вместо B^2 на пространстве Z , полученном идентификацией двух точек x и y в ∂B^2 , для которых $f(x) = f(y)$ (и f , ограниченное на одну из дуг $\partial B^2 \setminus \{x, y\}$, инъективно). За отображение f_1 принимается очевидный фактор f , определённый на Z . Каждое накрытие $\tilde{N}_i$ есть «наибольшее» накрытие, куда поднимается f_1 (т. е. $\pi_1(\tilde{N}_i) = (f_i)_\#(\pi_1(Z))$). Снова башня заканчивается, но теперь получается, поскольку $(f_n)_\#$ сюръективно (благодаря двойственности), что род ∂N_n не больше, чем 1. Обозначив через $e: \partial B^2 \rightarrow Z$ отображение отождествления, ограниченное на ∂B^2 , и приняв во внимание «гомологические» условия на $f_n \circ e: \partial B^2 \rightarrow \partial N_n$ (где мы считаем, что ∂N_n есть тор), можно вывести существование диска в ∂N_n . Этот вновь полученный диск проектируется вниз в X (без разрезов Дена). Это отображение либо удовлетворяет условиям теоремы о петле и имеет меньше граничных самопересечений, либо может быть использовано вместе с исходным отображением для получения такого отображения (через «разрезы и переклейки»). Итерация заканчивает доказательство.

Такой же поход используется, чтобы «устранить» сингулярности $f|_{\partial B^2}$ в доказательстве виртуальной теоремы о петле. Вместо регулярных окрестностей (которые, вообще говоря, не будут существовать), мы воспользуемся окрестностями, которые являются регулярными по отношению к некоторой «большой» компактной полиэдральной части $f(B^2) \setminus S(X)$. Этим путём получается компактная плоская поверхность в $M(X)$, продолжающаяся произвольно далеко к $f(B^2) \cap S(X)$. Эти отображения собираются вместе (с помощью комбинаторного аргумента, использованного впервые в [6] и ставшего теперь основным приёмом в изучении некомпактных 3-многообразий) и дают желаемое (т. е. отображение с меньшим числом граничных пересечений). Остаётся «превратить» так полученный «деновский» сингулярный диск (т. е. диск без граничных самопересечений) в псевдовложение. Эта «десингуляризация» проводится с помощью трансфинитной индукции. Она использует описанные идеи и даёт экзотический вариант стандартной процедуры сжатия, используемой в изучении некомпактных 3-многообразий (и обычно применяемой для исчерпания таких 3-многообразий). Здесь эта «виртуальная процедура сжатия» применяется для исчерпания регулярной окрестности N для $f(B^2) \cap M(X)$ в $M(X)$, чтобы в кон-

це концов получить новое объемлющее 3-многообразие N' , в котором граница деновского отображения (простая петля) гомотопна нулю и, значит, по классической лемме Дена ограничивает вложенный диск. Ограничивая этот вложенный диск на $N \cap N'$, мы получаем в N вложенную компактную плоскую поверхность, уходящую «произвольно далеко к бесконечности» в N (как «далеко», здесь определено окрестностью бесконечности в N , на которую виртуальная процедура сжатия была ограничена). Тот же комбинаторный аргумент, что и раньше, используется теперь, чтобы собрать вместе такие «плоские вложения» для получения требуемого псевдовложения.

Даже наиболее общая из вышеприведённых теорем разрешения требует, чтобы сингулярное множество обобщённого 3-многообразия было очень «малым», и её доказательство основывается на технике, идущей из изучения некомпактных 3-многообразий. Этот подход, возможно, исчерпал себя; дальнейший прогресс может потребовать существенно новых идей.

Однако дальнейшее уточнение техники, использованной в доказательстве теоремы 3.9, может привести к более сильной теореме разрешения, если в качестве условия взять (вместо « $S(X)$ имеет свойство общего положения в размерности 1 в X ») следующее свойство (в дальнейшем обозначаемое P): любое отображение 2-диска в X может быть аппроксимировано таким, для которого прообраз $S(X)$ при отображении нульмерен. Мы оставляем читателю проверку того, что P не более ограничительно, чем условие теоремы 3.9.

Мы выражаем признательность Р. Дж. Даверману за следующий пример, который демонстрирует, что P в действительности менее ограничительно (в примере строится обобщённое 3-многообразие X со свойством P , причём $S(X)$ не имеет свойства общего положения в размерности, меньшей или равной 1, в X). Пространство X есть пространство разбиения для клеточноподобного разбиения S^3 . Все его невырожденные элементы являются подмножествами подпространства Z в S^3 , которые строятся следующим образом. Обозначим канторово множество и компакт Уайтхеда через C и W соответственно. Пусть $C \times W \subset S^3$ будет вложением, полученным «разветвлением» определяющей последовательности для стандартного вложения W в S^3 . Выберем точку $x \in W$ и вложим («ручным образом») цилиндр отображения двукратного сюръективного отображения $f: C \times \{x\} \rightarrow L$, где L — ручная дуга в S^3 , дизъюнктная с $C \times W$. Тогда Z есть объединение $C \times W$ с этим цилиндром отображения. Обозначим через $F: Z \rightarrow L$ очевидную ретракцию, каждый невырожденный элемент разбиения есть $F^{-1}(p)$ для некоторого $p \in L$ (заметим, что для каждого $p \in L$ $F^{-1}(p)$ есть либо одноточечная компонента $C \times W$ с прикреплённой к ней концом ручной дугой, либо пара компонент, соединённых ручной дугой). Пусть теперь α — простая петля в $S^3 \setminus Z$, которая обходит T (первое полноторие в определяющей последовательности для $C \times W$). Пусть β есть образ α при фактор-отображении. Ясно, что $S(X)$ есть (гомеоморфный) образ L при фактор-отображении. Если бы нуль-гомотопия β пересекала $S(X)$ по нульмерному подпространству, то ε -поднятие дало бы существование нуль-гомотопии α вне по крайней мере некоторых невырожденных элементов разбиения. Однако α (геометрически) обходит их

всех. С другой стороны, так как любой сингулярный диск в S^3 может быть аппроксимирован диском, который пересекает Z по нульмерному подпространству, X имеет свойство P .

5. Заключение

В следующей теореме разрешения, доказанной недавно Даверманом и Тикстуном [17], условием является не «размер» сингулярного множества, а скорее обилие полиэдральных подпространств. Эта теорема была навеяна характеристикой 3-многообразий среди разрешимых обобщённых 3-многообразий, найденной в [14], и вместе с одной из теорем из [14] даёт характеристику по модулю гипотезы Пуанкаре 3-многообразий среди обобщённых 3-многообразий.

Теорема 5.1 ([17]). *Обобщённое 3-многообразие X имеет почти разрешение, если существует последовательность $\{f_i: R_i \rightarrow X\}_{i=1}^\infty$ отображений замкнутых поверхностей со следующими условиями:*

- 1) $\bigcup_{i=1}^k f_i(R_i)$ является полиэдром для всех $k \in \mathbb{N}$;
- 2) для данной пары точек p и q в X существует такое $i \in \mathbb{N}$, что f_i гомотически разделяет p и q .

Набросок доказательства. Строится обратная последовательность

$$X = X_0 \xleftarrow{\varphi_1} X_1 \xleftarrow{\varphi_2} X_2 \xleftarrow{\varphi_3} \dots$$

обобщённых 3-многообразий и консервативных клеточноподобных отображений, такая что для каждого k все f_i , для которых $i \leq k$, ε -поднимаются в $M(X_k)$ (относительно $\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k$). Из этого свойства следует, что для каждого i f_i ε -поднимается в X_∞ (обратный предел), следовательно, как легко видеть, $\dim S(X_\infty) = 0$. Далее, обратный предел обобщённых 3-многообразий при клеточноподобных отображениях есть обобщённое 3-многообразие (и проекции будут клеточноподобны). Значит, X_∞ есть обобщённое 3-многообразие с нульмерным сингулярным множеством и, согласно [25], имеет почти-разрешение. Композиция этого почти-разрешения и проекции из X_∞ в X тогда даёт требуемое почти-разрешение X .

Определение 5.2. Обобщённое 3-многообразие обладает *свойством относительной симплициальной аппроксимации*, если для данного компактного подполиэдра K в B^2 и отображения $f: B^2 \rightarrow X$, такого что $f|K$ симплициально, f может быть аппроксимировано симплициальным отображением $g: B^2 \rightarrow X$ так, что $f|K = g|K$. (Замечание: по теореме Никольсона [21] и классической теореме о симплициальной аппроксимации для отображений с полиэдральными областями определения и значений, все 3-многообразия имеют свойство относительной симплициальной аппроксимации.)

Следствие 5.3. Любое обобщённое 3-многообразие, обладающее свойством относительной симплициальной аппроксимации, почти разрешимо.

Набросок доказательства. Почти прямо доказывается, что любое обобщённое 3-многообразие со свойством относительной симплициальной аппроксимации удовлетворяет условию предыдущей теоремы.

Теорема 5.4. *Из гипотезы Пуанкаре следует, что обобщённое 3-многообразие есть 3-многообразие, если и только если оно удовлетворяет свойству относительной симплициальной аппроксимации.*

Доказательство. Скомбинируем следствие 5.3 с [15, теорема 3.1], отмечая, что свойство относительной симплициальной аппроксимации сильнее, чем свойство сферической симплициальной аппроксимации.

Замечания. Отметим, что хотя, как предполагается, каждое обобщённое 3-многообразие разрешимо, свойство относительной симплициальной аппроксимации, использованное выше для разрешимости (по модулю гипотезы Пуанкаре) а priori сильнее, чем свойство сферической симплициальной аппроксимации, требуемое для аппроксимируемости этого разрешения. Эта ситуация совершенно неудовлетворительна, поэтому неизбежно возникают следующие два вопроса. Следует ли свойство относительной симплициальной аппроксимации из свойства сферической симплициальной аппроксимации? Если положительного ответа нет, то можно ли показать, что обобщённые 3-многообразия со свойством сферической симплициальной аппроксимации почти разрешимы?

Эта работа была выполнена при поддержке Национальной группы по алгебраическим и геометрическим структурам и их приложениям Национального совета по исследованиям Италии и частично поддержана Министерством образования, университетов и науки Италии в рамках проекта «Геометрические свойства вещественных и комплексных многообразий» и программой Министерства образования, науки и спорта Республики Словения № P1-0292-0101-04, грант BI-IT/03-05-009.

Литература

- [1] Bing R. H. A decomposition of E^3 into points and tame arcs such that the decomposition space is topologically different from E^3 . — Ann. of Math. (2). — 1957. — Vol. 65. — P. 484–500.
- [2] Brahm M. V. Approximating maps of 2-manifolds with zero-dimensional nondegeneracy sets // Topology Appl. — 1992. — Vol. 45. — P. 25–38.
- [3] Brin M. G. Doctoral dissertation. — Univ. of Wisconsin, Madison, 1977.
- [4] Brin M. G. Generalized 3-manifolds whose non-manifold set has neighborhoods bounded by tori // Trans. Amer. Math. Soc. — 1981. — Vol. 264. — P. 539–555.
- [5] Brin M. G., McMillan D. R., Jr. Generalized three-manifolds with zero-dimensional non-manifold set // Pacific J. Math. — 1981. — Vol. 97. — P. 29–58.
- [6] Brown E. M., Brown M. S., Feustel C. D. On properly embedding planes in 3-manifolds // Proc. Amer. Math. Soc. — 1976. — Vol. 55. — P. 461–464.

- [7] Bryant J., Ferry S., Mio W., Weinberger S. Topology of homology manifolds // *Ann. of Math. (2)*. — 1996. — Vol. 143. — P. 435–467.
- [8] Bryant J. L., Lacher R. C. Resolving acyclic images of three-manifolds // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 1980. — Vol. 88. — P. 311–319.
- [9] Cannon J. W. The recognition problem: what is a topological manifold? // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1978. — Vol. 84. — P. 832–866.
- [10] Cavicchioli A. Imbeddings of polyhedra in 3-manifolds // *Ann. Mat. Pura Appl.* — 1992. — Vol. 162. — P. 157–177.
- [11] Cavicchioli A., Hegenbarth F., Repovš D. On the construction of $4k$ -dimensional generalized manifolds // *Proc. School ICTP «High-Dimensional Manifold Topology»* (Trieste, Italy, 21 May–8 June 2001). Vol. 2 / F. T. Farrell, W. Luck, eds. — 2003. — P. 103–124.
- [12] Cavicchioli A., Hegenbarth F., Repovš D. Topology of Cell-like Maps and Homology Manifolds. — In preparation.
- [13] Cavicchioli A., Repovš D. Peripheral acyclicity and homology manifolds // *Ann. Mat. Pura Appl.* — 1997. — Vol. 172. — P. 5–24.
- [14] Daverman R. J., Repovš D. A new 3-dimensional shrinking theorem // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1989. — Vol. 315. — P. 219–230.
- [15] Daverman R. J., Repovš D. General position properties which characterize 3-manifolds // *Can. J. Math.* — 1992. — Vol. 44. — P. 234–251.
- [16] Daverman R. J., Row W. H. Cell-like 0-dimensional decompositions of S^3 are 4-manifold factors // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1979. — Vol. 254. — P. 217–236.
- [17] Daverman R. J., Thickstun T. L. The 3-manifold recognition problem // *Trans. Amer. Math. Soc.* — To appear.
- [18] Edwards R. D. Approximating certain cell-like maps by homeomorphisms. — Manuscript. — UCLA, Los Angeles, 1977.
- [19] Hempel J. 3-Manifolds. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1986.
- [20] Lambert H. W., Sher R. B. Pointlike 0-dimensional decompositions of S^3 // *Pacific J. Math.* — 1968. — Vol. 24. — P. 511–518.
- [21] Nicholson V. A. 1-FLG complexes are tame in 3-manifolds // *General Topology Appl.* — 1972. — Vol. 2. — P. 277–285.
- [22] Quinn F. S. An obstruction to the resolution of homology manifolds // *Michigan Math. J.* — 1987. — Vol. 34. — P. 285–291.
- [23] Repovš D. Recognition problem for manifolds // *Geometric and Algebraic Topology* / J. Krasinkiewicz, S. Spiez, H. Toruńczyk, eds. — Warsaw: PWN, 1986. — P. 77–108. — (Banach Centre Publ.; Vol. 18).
- [24] Repovš D., Lacher R. C. A disjoint disks property for 3-manifolds // *Topology Appl.* — 1983. — Vol. 16. — P. 161–170.
- [25] Thickstun T. L. An extension of the loop theorem and resolutions of generalized 3-manifolds with 0-dimensional singular set // *Invent. Math.* — 1984. — Vol. 78. — P. 161–222.
- [26] Thickstun T. L. Strongly acyclic maps and homology 3-manifolds with 0-dimensional singular set // *Proc. London Math. Soc. (3)*. — 1987. — Vol. 55. — P. 378–432.
- [27] Thickstun T. L. Resolutions of generalized 3-manifolds whose singular sets have general position dimension one // *Topology Appl.* — 2004. — Vol. 138. — P. 61–95.