Разрешимые алгебры Ли, заданные произведением образующих, и некоторые их приложения

Р. КАМПОАМОР-ШТУРСБЕРГ
Университет «Комплутенсе»,
Мадрид, Испания
e-mail: rutwig@ucmail.ucm.es

УДК 512.554.33

Ключевые слова: разрешимые алгебры Ли, коприсоединённое представление, инварианты.

Аннотация

В настоящей работе мы обобщаем определение произведения образующими на класс разрешимых алгебр Ли. Мы анализируем число инвариантных функций коприсоединённого представления этих алгебр посредством уравнений Маурера—Картана и приводим некоторые приложения к структурам произведения на алгебрах.

Abstract

R. Campoamor-Stursberg, Solvable Lie algebras, products by generators, and some of its applications, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 4, pp. 85—94.

In this work, we enlarge the definition of products by generators of Lie algebras to the class of solvable Lie algebras. We analyze the number of independent invariant functions for the coadjoint representation of these algebras by means of the Maurer–Cartan equations and give some applications to product structures on Lie algebras.

1. Введение

Разрешимые алгебры Ли являются важным классом алгебр не только из-за их многочисленных приложений к геометрии и механике, но также для классификации полупрямых сумм алгебр Ли (как известно, полупростой случай классифицирован). Классификация не была проведена из-за отсутствия общих структур для разрешимых алгебр Ли (таких, как форма Киллинга). В настоящей работе мы исследуем разрешимые алгебры Ли специального вида, которые мы называем произведениями образующими. Будучи изначально определённой для нильпотентных алгебр, операция произведения образующих может быть определена и в случае разрешимых алгебр Ли. Это приводит к методу построения неразложимых алгебр Ли в больших размерностях. Мы исследуем также два

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 4, с. 85—94.

приложения: инварианты коприсоединённого представления и структуры произведения на группах Ли (мы изучаем алгебры Ли групп Ли). Мы покажем, что произведения образующими открывают естественный способ изучения структур произведения и паракомплексных структур в произвольной размерности.

2. Произведение образующими разрешимых алгебр Ли

Произведение образующими было изначально введено для нильпотентных алгебр для изучения систем весов [6, 7, 9]. Введённое посредством графа весов, оно может быть охарактеризовано расширениями, что позволяет эффективно работать с уравнениями Маурера—Картана [5]. Эта операция может быть обобщена на случай разрешимых алгебр Ли, но в этом случае мы теряем наглядную интерпретацию посредством графов. Эта операция позволяет строить неразложимые алгебры Ли.

Как обычно, обозначим через $Z(\mathfrak{g})$ центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а через $b_1(\mathfrak{g})$ — первое число Бетти, т. е. размерность пространства $H_1(\mathfrak{g},\mathbb{R})$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{g}_i$ $(i=1,2)$ — разрешимые алгебры Ли,*

$$b_1(\mathfrak{g}_i)=\dim\left(\frac{\mathfrak{g}_i}{[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_i]}\right).$$

Тогда существует единственное центральное расширение $\mathfrak{e}$ для $\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $b_1(\mathfrak{e})=b_1(\mathfrak{g}_1)+b_1(\mathfrak{g}_2)$;
2) $\dim D^1(\mathfrak{e})=\dim D^1(\mathfrak{g}_1)+\dim D^1(\mathfrak{g}_2)+b_1(\mathfrak{g}_1)b_1(\mathfrak{g}_2)$;
3) $\dim D^i(\mathfrak{e})=\dim D^i(\mathfrak{g}_1)+\dim D^i(\mathfrak{g}_2)$, $i\geqslant 2$;
4) $\dim Z(\mathfrak{e})=\dim Z(\mathfrak{g}_1)+\dim Z(\mathfrak{g}_2)+b_1(\mathfrak{g}_1)b_1(\mathfrak{g}_2)$.

Доказательство. Доказательство формально то же самое, как и в нильпотентном случае [5, 9], при этом убывающая центральная последовательность заменяется на производную последовательность. Фактически расширение определяется посредством коцикла $\varphi\in H^2\big(\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2,\mathbb{R}^{b_1(\mathfrak{g}_1)b_2(\mathfrak{g}_2)}\big)$, который удовлетворяет условию

$$\varphi(\mathfrak{g}_1,D^1\mathfrak{g}_2)=\varphi(D^1\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2)=0. \tag{1}$$

Условие (1) влечёт

$$\dim_{\mathbb{R}}\{\varphi(X,X')\mid X\in\mathfrak{g}_1-[\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_1],\ X'\in\mathfrak{g}_2-[\mathfrak{g}_2,\mathfrak{g}_2]\}=b_1(\mathfrak{g}_1)b_1(\mathfrak{g}_2). \tag{2}$$

Без ограничения общности мы можем считать, что $\{X_1,\ldots,X_{b_1(\mathfrak{g}_1)}\}$ и $\{X'_1,\ldots,X'_{b_1(\mathfrak{g}_2)}\}$ — минимальные наборы образующих для $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ соответственно. Если $\{e_1,\ldots,e_{b_1(\mathfrak{g}_1)b_1(\mathfrak{g}_2)}\}$ — канонический базис в $\mathbb{R}^{b_1(\mathfrak{g}_1)b_2(\mathfrak{g}_2)}$, то мы можем выбрать такого представителя φ, для которого имеет место

$$\varphi(X_i, X'_j) = e_{(i-1)b_1(g_2)+j}, \quad 1 \leqslant i \leqslant b_1(\mathfrak{g}_1), \quad 1 \leqslant j \leqslant b_1(\mathfrak{g}_2), \tag{3}$$

$$\varphi(X, X') = 0 \qquad \text{при } X \in D^1\mathfrak{g}_1 \text{ или } X' \in D^1\mathfrak{g}_2. \tag{4}$$

Соответствующее расширение удовлетворяет всем требованиям теоремы. □

Пусть B_i — базис алгебры $\mathfrak{g}_i$ $(i = 1, 2)$. Тогда скобки Ли в алгебре $\mathfrak{g}_1 \veebar \mathfrak{g}_2$ представляют собой объединение скобок для алгебр $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ и, кроме того, скобок вида $[X, X']$ для всех образующих $X \in \mathfrak{g}_1$ и $X' \in \mathfrak{g}_2$. В силу уравнения Маурера—Картана искомое расширение может быть получено добавлением к $b_1(\mathfrak{g}_1)b_1(\mathfrak{g}_2)$ 2-формы вида

$$d\eta_{ij} = \omega_i \wedge \omega'_j,$$

где ω_i и ω'_i — формы, соответствующие образующим $X_1 \in \mathfrak{g}_1$ и $X_2 \in \mathfrak{g}_2$ соответственно. Определим теперь произведение образующими следующим образом.

Определение 1. Произведение образующими $\mathfrak{g}_1 \veebar \mathfrak{g}_2$ представляет собой центральное расширение $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, определённое классом гомологий φ.

Утверждение 1. *Если $\mathfrak{g}_i$ — разрешимая алгебра Ли индекса j_i при $i = 1, 2$, то $\mathfrak{g}_1 \veebar \mathfrak{g}_2$ — неразложимая алгебра Ли индекса $\max\{j_1, j_2\}$. В частности, $\mathfrak{g}_1 \veebar \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_2 \veebar \mathfrak{g}_1$.*

По построению расширение $\mathfrak{g}_1 \veebar \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_2 \veebar \mathfrak{g}_1$ является разрешимой алгеброй Ли.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{g}$ — разрешимая алгебра Ли. Алгебра $\mathfrak{g}$ называется произведением образующими, если существуют подалгебры $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$, такие что $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}_1 \veebar \mathfrak{g}_2$.

Утверждение 2. *Для любого $d \geqslant 4$ существует разрешимая алгебра Ли порядка d. Тогда существует пара $(\mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{g}_2)$ (здесь $\mathfrak{g}_i$ — подалгебра), такая что $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}_1 \veebar \mathfrak{g}_2$.*

Доказательство. Для любого $n \geqslant 3$ имеем разбиение

$$n = (n-2) + 1 + 1. \tag{5}$$

Пусть $\mathfrak{r}_n$ — алгебра Ли, в которой скобка имеет вид

$$[X_1, X_j] = X_j, \quad 2 \leqslant j \leqslant n-2, \tag{6}$$

в базисе $\{X_1, \ldots, X_{n-2}\}$. Алгебра Ли $\mathfrak{r}_n$ разрешима и не нильпотентна. Далее, $\dim \mathfrak{r}_n/[\mathfrak{r}_n, \mathfrak{r}_n] = 1$. Если L_1 — абелева алгебра первого порядка, то произведение $\mathfrak{r}_1 \veebar L_1$ представляет собой разрешимую алгебру n-го порядка (за исключением случая $n = 3$, так как $\mathfrak{r}_3 = L_1$, следовательно $\mathfrak{r}_3 \veebar L_1$ изоморфна алгебре Гейзенберга $\mathfrak{h}_1$). □

Если одна из алгебр $\mathfrak{g}_1$ или $\mathfrak{g}_2$ разрешима, то произведение этих алгебр также разрешимо. Имеют место следующие свойства.

Утверждение 3. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *произведение образующими. Тогда*

1) $\dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \leqslant \dim\mathfrak{g} - 2$;
2) $\dim Z(\mathfrak{g}) \geqslant 1$;
3) $\dim\mathfrak{g} \geqslant 3$;
4) *если алгебра* $\mathfrak{g}$ *разрешима и ненильпотентна, то существует разрешимая ненильпотентная подалгебра* $\mathfrak{g}_1$ *и подалгебра* $\mathfrak{g}_2$, *такие что* $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}_1 \underline{\times} \mathfrak{g}_2$.

Принимая во внимание перечисленные выше структурные результаты о произведениях образующими, мы можем получить полную классификацию таких алгебр, опираясь на уже известную классификацию в низших размерностях. Приведём классификацию в размерности семь с точностью до изоморфизма.

Утверждение 4. *Пусть* $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}_1 \underline{\times} \mathfrak{g}_2$ — *произведение образующими, и пусть* $(d_i, m_i) = (\dim\mathfrak{g}_i, b_1(\mathfrak{g}_i))$ *при* $i = 1, 2$. *Если* $\dim\mathfrak{g} = 7$, *то имеет место один из следующих случаев*:

1) $(d_1, m_1) = (5, 1)$, $(d_2, m_2) = (1, 1)$;
2) $(d_1, m_1) = (4, 1)$, $(d_2, m_2) = (2, 1)$;
3) $(d_1, m_1) = (3, 1)$, $(d_2, m_2) = (3, 1)$;
4) $(d_1, m_1) = (4, 2)$, $(d_2, m_2) = (1, 1)$;
5) $(d_1, m_1) = (3, 2)$, $(d_2, m_2) = (2, 1)$;
6) $(d_1, m_1) = (3, 1)$, $(d_2, m_2) = (2, 2)$;
7) $(d_1, m_1) = (3, 3)$, $(d_2, m_2) = (1, 1)$.

В частности, если $b_1(\mathfrak{g}) = 4$, *то алгебра* $\mathfrak{g}$ *является нильпотентной.*

Доказательство. Так как $\dim(\mathfrak{g}_1 \underline{\times} \mathfrak{g}_2) = d_1 + d_2 + m_1 m_2$, дальнейшая классификация сводится к разбиению числа семь в сумму трёх натуральных чисел. Учитывая, что $b_1(\mathfrak{g}_1 \underline{\times} \mathfrak{g}_2) = b_1(\mathfrak{g}_1) + b_1(\mathfrak{g}_2) = m_1 + m_2$ и $\dim\mathfrak{g} = 7$, мы имеем $2 \leqslant b_1(\mathfrak{g}_1 \underline{\times} \mathfrak{g}_2) \leqslant 4$. Если $b_1(\mathfrak{g}_1 \underline{\times} \mathfrak{g}_2) = 2$, то $m_1 = m_2 = 1$, и мы приходим к случаям 1—3. Если $b_1(\mathfrak{g}_1 \underline{\times} \mathfrak{g}_2) = 3$, мы имеем $7 = d_1 + d_2 + 2$. Если $d_1 = 4$, то $d_2 = 1$, следовательно, $m_2 = 1$, $m_2 = 2$. Мы приходим к случаю 4. Если $d_1 = 3$ и $d_2 = 2$, то либо $m_1 = 1$ и $m_2 = 2$, либо $m_1 = 2$ и $m_2 = 1$. Это приводит нас к случаям 5 и 6. Если $b_1(\mathfrak{g}_1 \underline{\times} \mathfrak{g}_2) = 4$, то $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ — абелевы алгебры, и произведение $\mathfrak{g}_1 \underline{\times} \mathfrak{g}_2$ нильпотентно. □

Для порядков $n \geqslant 8$ мы можем решать эту задачу, но так как разрешимые алгебры Ли размерностей $n \geqslant 7$ не классифицированы (последняя известная размерность — шесть [2, 11]), результат не был бы окончательным.

3. Применение к инвариантам

Инварианты коприсоединённого представления играют важную роль в теории представлений, а также во многих геометрических и физических приложениях (квантовые числа и ограничения представлений для моделей в ядерной и атомной физике).

Одним из стандартных методов для определения этих инвариантов является теория дифференциальных уравнений. Она позволяет получать не только полиномиальные инварианты (связанные с операторами Казимира), но и иррациональные функции, которые находят применение в теории интегрируемых гамильтоновых систем [1,3,4]. Пусть $\{C_{ij}^k\}$ — структурный тензор алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в базисе $\{X_1,\ldots,X_n\}$. Пусть

$$\hat{X}_i=-C_{ij}^k x_k\partial_{x_j}\ - \tag{7}$$

представление алгебры Ли, где $[X_i,X_j]=C_{ij}^k X_k$ ($1\leqslant i<j\leqslant n$, $1\leqslant k\leqslant n$). Аналитическая функция $F(X_1,\ldots,X_n)$ на $\mathfrak{g}^*$ является инвариантом коприсоединённого представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда

$$\hat{X}_iF(x_1,\ldots,x_n)=-C_{ij}^k x_k\partial_{x_j}F(x_1,\ldots,x_n)=0,\quad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{8}$$

Общее число $\mathcal{N}(\mathfrak{g})$ решений (как полиномиальных, так и неполиномиальных) системы (8) задаётся формулой

$$\mathcal{N}(\mathfrak{g})=\dim\mathfrak{g}-\operatorname{rank}(C_{ij}^k x_k), \tag{9}$$

где матрица $A(\mathfrak{g})$ определяется формулой

$$A(\mathfrak{g})=(C_{ij}^k x_k) \tag{10}$$

в базисе $\{X_1,\ldots,X_n\}$. Эту формулу можно также интерпретировать с использованием уравнения Маурера—Картана следующим образом. Пусть $\mathcal{L}(\mathfrak{g})=$ $=\mathbb{R}\{d\omega_i\}_{1\leqslant i\leqslant\dim\mathfrak{g}}$ — подпространство пространства $\bigwedge^2\mathfrak{g}^*$, порождённое 2-формами $d\omega_i$. Отсюда сразу следует, что $\dim\mathcal{L}(\mathfrak{g})=\dim(\mathfrak{g})$ тогда и только тогда, когда $d\omega_i\neq 0$ при всех i, т. е. $\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Если $\omega=a^i d\omega_i$ — элемент общего положения в $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$, тогда существует $j_0(\omega)\in\mathbb{N}$, такое что

$$\bigwedge\nolimits^{j_0(\omega)}\omega\neq 0,\quad \bigwedge\nolimits^{j_0(\omega)+1}\omega\equiv 0. \tag{11}$$

Тогда $r(\omega)=2j_0(\omega)$, где $r(\omega)$ — ранг 2-формы ω [10]. Положим

$$j_0(\mathfrak{g})=\max\{j_0(\omega)\mid\omega\in\mathcal{L}(\mathfrak{g})\}. \tag{12}$$

Очевидно, что $j_0(\mathfrak{g})$ — числовой инвариант алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Короткое вычисление показывает, что

$$\mathcal{N}(\mathfrak{g})=\dim\mathfrak{g}-2j_0(\mathfrak{g}). \tag{13}$$

Формула (13) важна для оценки числа инвариантов полупрямых произведений в том случае, когда общий метод уже не работает.

Для определения числа независимых инвариантов применим формулу (13), учитывая уравнения Маурера—Картана. Пусть $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ — разрешимые алгебры Ли, и пусть $\{C_{ij}^k\}$ ($\{\bar{C}_{lm}^n\}$) — структурный тензор алгебры $\mathfrak{g}_i$ ($i=1,2$) в базисе $\{X_1,\ldots,X_{d_1}\}$ (соответственно $\{X'_1,\ldots,X'_{d_2}\}$. Уравнения Маурера—Картана имеют вид

$$d\omega_i=0,\qquad 1<i<m_1, \tag{14}$$

$$d\omega_k=-C_{ij}^k\omega_i\wedge\omega_j,\quad k\geqslant m_1, \tag{15}$$

для $\mathfrak{g}_1$, при этом

$$d\omega_i' = 0, \qquad 1 < i < m_2, \tag{16}$$

$$d\omega_k' = -\bar{C}_{ij}^k \omega_i' \wedge \omega_j', \quad k \geqslant m_2, \tag{17}$$

для $\mathfrak{g}_2$. Тогда уравнения для произведений $\mathfrak{g}_1 \veebar \mathfrak{g}_2$ имеют вид (14)—(17) и

$$d\eta_{ij} = \omega_i \wedge \omega_j', \quad 1 \leqslant i \leqslant m_1, \quad 1 \leqslant j \leqslant m_2. \tag{18}$$

Для всех X_i (для X_i')

$$X_i \lrcorner\, \omega_j = \delta_{ij} \quad (\text{соответственно } X_i' \lrcorner\, \omega_j'), \tag{19}$$

где $\lrcorner$ — внутреннее произведение. Число $\mathcal{N}(\mathfrak{g})$ можно получить из максимального ранга элементов общего положения, задаваемого формулами (14)—(18). Приводимый ниже результат задаёт метод нахождения этого числа.

Утверждение 5. *Пусть $\omega_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}_1)$ и $\omega_0' \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}_2)$ — две формы, такие что $j_0(\omega_0) = j_0(\mathfrak{g}_1)$ и $j_0(\omega_0') = j_0(\mathfrak{g}_2)$. Пусть $F \subset \{1, \ldots, m_1\}$ и $F' \subset \{1, \ldots, m_2\}$ — такие подмножества, что*

1) *для каждого $\alpha \in F$ справедливо $X_\alpha \lrcorner\, \omega_0 \equiv 0$,*
2) *для каждого $\beta \in F'$ справедливо $X_\beta' \lrcorner\, \omega_0' \equiv 0$.*

Тогда

$$j_0(\mathfrak{g}_1 \veebar \mathfrak{g}_2) = j_0(\mathfrak{g}_1) + j_0(\mathfrak{g}_2) + j_0(\omega), \tag{20}$$

где

$$\omega = \sum_{\alpha \in F,\ \beta \in F'} \omega_\alpha \wedge \omega_\beta. \tag{21}$$

В частности,

$$m_1 m_2 \leqslant \mathcal{N}(\mathfrak{g}_1 \veebar \mathfrak{g}_2) \leqslant \mathcal{N}(\mathfrak{g}_1) + \mathcal{N}(\mathfrak{g}_2) + (m_1 m_2 - 2 j_0(\omega)). \tag{22}$$

Доказательство. Уравнения Маурера—Картана $\mathfrak{g}_1 \veebar \mathfrak{g}_2$ получаются из уравнений (14)—(17). Число независимых инвариантов выписывается по формуле

$$\mathcal{N}(\mathfrak{g}_1 \veebar \mathfrak{g}_2) = \dim(\mathfrak{g}_1 \veebar \mathfrak{g}_2) - 2 j_0(\theta), \tag{23}$$

где $\theta \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}_1 \veebar \mathfrak{g}_2)$ — общая форма максимального ранга. Пусть $\alpha \in F$. Так как $\omega_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}_1)$, из условия $X_\alpha \lrcorner\, \omega_0 = 0$ следует, что $[X, X_\alpha] = \psi^k X_k \neq 0$ для всех $X \in \mathfrak{g}_1$ (т. е. $d\omega_k$ не лежит в ω_0). Легко видеть, что

$$\omega_0 + \omega_0' + \sum_{\alpha \in F,\ \beta \in F'} \omega_\alpha \wedge \omega_\beta \tag{24}$$

имеет максимальный ранг, так как $j_0(\omega_0) = j_0(\mathfrak{g}_1)$, $j_0(\omega_0') = j_0(\mathfrak{g}_2)$ и $\omega \notin \mathcal{L}(\mathfrak{g}_1) + \mathcal{L}(\mathfrak{g}_2)$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathfrak{g}_1 \veebar \mathfrak{g}_2) &= \dim \mathfrak{g}_1 + \dim \mathfrak{g}_2 + m_1 m_2 - 2(j_0(\omega_0) + j_0(\omega_0') + j_0(\omega)) = \\ &= \mathcal{N}(\mathfrak{g}_1) + \mathcal{N}(\mathfrak{g}_2) + (m_1 m_2 - 2 j_0(\omega)). \end{aligned} \tag{25}$$

Из того, что добавленные элементы являются центральными, следует, что $m_1 m_2 \leqslant \mathcal{N}(\mathfrak{g}_1 \veebar \mathfrak{g}_2)$. □

Следствие 1. *Если* $\mathcal{N}(\mathfrak{g}_1) = \mathcal{N}(\mathfrak{g}_2) = 0$*, то* $\mathcal{N}(\mathfrak{g}_1 \underline{\times} \mathfrak{g}_2) = m_1 m_2$*.*

Доказательство. Поскольку $\mathcal{N}(\mathfrak{g}_1) = \mathcal{N}(\mathfrak{g}_2) = 0$, существуют 2-формы $\omega_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}_1)$ и $\omega_0' \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}_2)$, такие что $\dim \mathfrak{g}_1 = 2j_0(\omega_0)$ и $\dim \mathfrak{g}_2 = 2j_0(\omega_0')$. Тогда форма $\theta = \omega_0 + \omega_0'$ имеет ранг $\dim \mathfrak{g}_1 + \dim \mathfrak{g}_2$. Алгебра $\mathfrak{g}_1 \underline{\times} \mathfrak{g}_2$ содержит в точности $m_1 m_2$ центральных элементов, поэтому форма θ имеет максимальный ранг. ☐

Замечание 1. Обратное, вообще говоря, неверно. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, задаваемая уравнениями

$$\begin{aligned}
d\omega_1 &= \omega_2 \wedge \omega_3 + \omega_1 \wedge \omega_4, \\
d\omega_2 &= \omega_2 \wedge \omega_4 - \omega_2 \wedge \omega_5, \\
d\omega_3 &= \omega_3 \wedge \omega_5, \\
d\omega_4 &= d\omega_5 = 0.
\end{aligned}$$

Форма $\omega_0 = d\omega_1$ удовлетворяет уравнению $j_0(\omega_0) = j_0(\mathfrak{g}) = 2$, т. е. $\mathcal{N}(\mathfrak{g}) = 1$. Тогда $\mathfrak{g} \underline{\times} \mathfrak{g}$ — разрешимая алгебра Ли 14-го порядка (так как $b_1(\mathfrak{g}) = 2$), при этом уравнения Маурера—Картана имеют вид

$$\begin{array}{lll}
d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_3 + \omega_1 \wedge \omega_4, & d\omega_1' = \omega_2' \wedge \omega_3' + \omega_1' \wedge \omega_4', & d\eta_1 = \omega_4 \wedge \omega_4', \\
d\omega_2 = \omega_2 \wedge \omega_4 - \omega_2 \wedge \omega_5, & d\omega_2' = \omega_2' \wedge \omega_4' - \omega_2' \wedge \omega_5', & d\eta_2 = \omega_4 \wedge \omega_5', \\
d\omega_3 = \omega_3 \wedge \omega_5, & d\omega_3 = \omega_3' \wedge \omega_5', & d\eta_3 = \omega_5 \wedge \omega_4', \\
d\omega_4 = d\omega_5 = 0, & d\omega_4' = d\omega_5' = 0, & d\eta_4 = \omega_5 \wedge \omega_5'
\end{array}$$

в базисе $\{\omega_1, \ldots, \omega_5, \omega_1', \ldots, \omega_5', \eta_1, \ldots, \eta_4\}$. Пусть $\theta = \alpha^i d\omega_i + \beta^j d\omega_j' + \gamma^k d\eta_k \in \in \mathcal{L}(\mathfrak{g} \underline{\times} \mathfrak{g})$ — элемент общего положения. Тогда $\bigwedge^6 \theta \equiv 0$ и

$$\bigwedge\nolimits^5 \theta = (\alpha^1)^2 (\beta^1)^2 \gamma^4 \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 \wedge \omega_5 \wedge \omega_1' \wedge \omega_2' \wedge \omega_3' \wedge \omega_4' \wedge \omega_5' \neq 0$$

тогда и только тогда, когда $\alpha^1 \beta^1 \gamma^4 \neq 0$. Форма $\theta' = d\omega_1 + d\omega_1' + d\eta_4$ имеет максимальный ранг, при этом $\mathcal{N}(\mathfrak{g} \underline{\times} \mathfrak{g}) = 4$. В частности, мы получаем, что если F и F' не пусты, то $\omega = d\eta_4$ удовлетворяет условию $j_0(\omega) = 1$, тогда $2\mathcal{N}(\mathfrak{g}) - 2j_0(\omega) = 0$. Кроме того, алгебра $\mathfrak{g} \underline{\times} \mathfrak{g}$ имеет четыре оператора Казимира, в то же время $\mathfrak{g}$ не имеет полиномиальных инвариантов (есть лишь рациональные инварианты).

4. Приложения к структурам произведений

Приведём теперь некоторые приложения к дифференциально-геометрическим структурам на группах Ли. Эти конструкции позволяют получать некоторые новые алгебры Ли в произвольных размерностях, что задаёт новые классы, пополняющие известные случаи.

Определение 3. Пусть $E\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $E \neq \pm\mathrm{id}$ — инволютивный автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$. В этом случае автоморфизм E задаёт структуру почти произведения.

Говорят, что E задаёт структуру произведения, если имеет место интегрируемость, т. е. если для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$ имеют место следующее тождество:

$$E[X,Y] = [E(X),Y] + [X,E(Y)] - E[E(X),E(Y)].$$

Мы имеем разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-, \tag{26}$$

где $\mathfrak{g}_+$ — собственное подпространство, соответствующее собственному значению $\lambda = 1$, а $\mathfrak{g}_-$ — собственное пространство, соответствующее собственному значению $\lambda = -1$. Если условие интегрируемости выполняется, то подпространства $\mathfrak{g}_+$ и $\mathfrak{g}_-$ являются подалгебрами. Такие структуры были изучены для различных типов алгебр Ли и классифицированы для алгебр Ли размерностей $n \leqslant 4$ [8]. В этом разделе мы показываем, что произведения образующими дают новые нетривиальные примеры алгебр Ли, обладающие такой структурой; эти алгебры определяются в терминах своих подалгебр.

Утверждение 6. *Пусть $\mathfrak{g}_i$ $(i = 1,2)$ — разрешимые алгебры Ли, и пусть E_i $(i = 1,2)$ — структура произведения для $i = 1,2$. Пусть $E_1(X_j) = \varepsilon_j X_j$ при $1 \leqslant j \leqslant n$, $\varepsilon_j = \pm 1$ в базисе $\{X_1,\ldots,X_n\}$ и $E_2(X'_j) = \varepsilon_j X'_j$ при $1 \leqslant j \leqslant m$, $\varepsilon_j = \pm 1$ в базисе $\{X'_1,\ldots,X'_n\}$). Тогда $\mathfrak{g}_1 \veebar \mathfrak{g}_2$ является структурным произведением.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что X_i $(1 \leqslant i \leqslant b_1(\mathfrak{g}_1) \leqslant n)$ удовлетворяют условию $X_i \notin [\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_1]$ (аналогично для $\mathfrak{g}_2$). Пусть $[X_i, X'_j] = Z_{ij}$ при $1 \leqslant i \leqslant b_1(\mathfrak{g}_1)$, $1 \leqslant j \leqslant b_1(\mathfrak{g}_2)$. Определим векторное отображение $E\colon \mathfrak{g}_1 \veebar \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{g}_1 \veebar \mathfrak{g}_2$ путём $E|_{\mathfrak{g}_1} = E_1$ и $E|_{\mathfrak{g}_2} = E_2$. Кроме того, действие E на новых элементах Z_{ij} диагонально. Так как E_1 и E_2 интегрируемы и $[\mathfrak{g}_1, D^1\mathfrak{g}_2] = [D^1\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] = 0$, нам нужно проверить условие интегрируемости только на парах $(X,X') \in \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ с $[X,X'] \neq 0$. Пусть $X = \alpha^i X_i + \beta^j Y_j$ $(i \leqslant n)$ и $X' = \gamma^k X'_k + \delta^l Y'_l$, где $Y_i \in [\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_1]$ и $Y'_i \in [\mathfrak{g}_2,\mathfrak{g}_2]$. Тогда

$$\begin{aligned} E[X,X'] - [E(X),X'] - [X,E(X')] + E[E(X),E(X')] &= \\ = \alpha^i\gamma^k E(Z_{ik}) - \alpha^i\gamma^k(\varepsilon_i + \varepsilon_k)Z_{ik} + \alpha^i\gamma^k\varepsilon_i\varepsilon_k E(Z_{ik}) &= \\ = \alpha^i\gamma^k\{(1+\varepsilon_i\varepsilon_k)E(Z_{ik}) - (\varepsilon_i+\varepsilon_k)Z_{ik}\}&. \end{aligned} \tag{27}$$

Чтобы уравнение (27) обратилось в нуль для всех пар (i,k), нам нужно положить $E(Z_{ik}) = \lambda_{ik} Z_{ik}$, $\lambda_{ik} = \pm 1$. Имеют место два различных случая.

1. При (i_0,k_0) мы имеем $\varepsilon_{i_0} + \varepsilon_{k_0} = 0$. Тогда $1 + \varepsilon_{i_0}\varepsilon_{k_0} = 0$, и мы можем положить $\lambda_{i_0k_0}$ равным 1 или -1.
2. При (i_0,k_0) имеем $\varepsilon_{i_0} + \varepsilon_{k_0} \neq 0$. Тогда $\operatorname{sgn}(\varepsilon_{i_0}) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_{k_0})$. Таким образом, $2E(Z_{i_0k_0}) = \pm 2 Z_{i_0k_0}$, поэтому $\lambda_{i_0k_0} = \pm 1$; знак выбирается в зависимости от $\varepsilon_{i_0} + \varepsilon_{k_0}$.

Действие E на Z_{ij} полностью определено в случае $(\varepsilon_i + \varepsilon_k) \neq 0$. В остальных случаях мы можем выбрать знак для λ_{ij}. Для разложения (26) мы имеем

$$\mathfrak{g}_+^E = \mathfrak{g}_+^{E_1} \oplus \mathfrak{g}_+^{E_2} \oplus \langle Z_{ij} \mid \lambda_{ij} = 1\rangle, \tag{28}$$

$$\mathfrak{g}_-^E = \mathfrak{g}_-^{E_1} \oplus \mathfrak{g}_-^{E_2} \oplus \langle Z_{ij} \mid \lambda_{ij} = -1\rangle. \tag{29}$$

Так как E_1 и E_2 интегрируемы, то $\mathfrak{g}_+^E$ и $\mathfrak{g}_-^E$ являются подалгебрами в $\mathfrak{g}_1 \underline{\times} \mathfrak{g}_2$. $\square$

Пример. Рассмотрим следующие алгебры Ли $\mathfrak{r}_4$ и $\mathfrak{r}_{4,0}$:

$$\mathfrak{r}_4\colon \quad [X_0, X_1] = X_1,\ [X_0 X_2] = X_1 + X_2,\ [X_0, X_3] = X_2 + X_3 \tag{30}$$

в базисе $\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$ и

$$\mathfrak{r}_{4,0}\colon \quad [X_4, X_5] = X_6,\ [X_4, X_7] = X_6 \tag{31}$$

в базисе $\{X_4, X_5, X_6, X_7\}$. Рассмотрим произведение $\mathfrak{r}_4 \underline{\times} \mathfrak{r}_{4,0}$. В базисе $\{X_0, \ldots, X_9\}$ оно задаётся скобками

$$[X_0, X_4] = X_8, \quad [X_0, X_7] = X_9 \tag{32}$$

и коммутационными соотношениями (30), (31). Алгебры $\mathfrak{r}_4$ и $\mathfrak{r}_{4,0}$ имеют структуру E_1 и соответственно E_2, где

$$E_1(X_i) = X_i, \quad i = 0, 1; \qquad E_1(X_i) = -X_i, \quad i = 2, 3, \tag{33}$$

$$E_2(X_i) = X_i, \quad i = 4, 5; \qquad E_2(X_i) = -X_i, \quad i = 6, 7. \tag{34}$$

Теперь определим $E\colon \mathfrak{r}_4 \underline{\times} \mathfrak{r}_{4,0} \to \mathfrak{r}_4 \underline{\times} \mathfrak{r}_{4,0}$ таким образом, что $E|_{\mathfrak{r}_4} = E_1$, $E|_{\mathfrak{r}_{4,0}} = E_2$. Из утверждения 6 следует, что

$$E(X_8) = X_8, \quad E(X_9) = \lambda X_9, \tag{35}$$

где $\lambda = \pm 1$. Если $\lambda = 1$, то мы получим структуру на $\mathfrak{r}_4 \underline{\times} \mathfrak{r}_{4,0}$, такую что $\dim(\mathfrak{r}_4 \underline{\times} \mathfrak{r}_{4,0})_+ = 6$, $\dim(\mathfrak{r}_4 \underline{\times} \mathfrak{r}_{4,0})_- = 4$, в то время как выбор $\lambda = -1$ задаёт структуру с $\dim(\mathfrak{r}_4 \underline{\times} \mathfrak{r}_{4,0})_+ = \dim(\mathfrak{r}_4 \underline{\times} \mathfrak{r}_{4,0})_- = 5$.

Определение 4. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли со структурой произведения E. Если $\dim \mathfrak{g}_+ = \dim \mathfrak{g}_-$, то E называют паракомплексной структурой на $\mathfrak{g}$.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ — разрешимая алгебра Ли, для которой $b_1(\mathfrak{g}) = 4m$, снабжённая паракомплексной структурой E, такой что существует базис $\{X_1, \ldots, X_{4m}, \ldots, X_{2n}\}$, удовлетворяющий следующим условиям:*

1) *$X_i \notin D^1\mathfrak{g}$ при $1 \leqslant i \leqslant 4m$,*
2) *$X_i \in \mathfrak{g}_+$ при $1 \leqslant i \leqslant 2m$ и $X_i \in \mathfrak{g}_-$ при $2m + 1 \leqslant i \leqslant 4m$,*
3) *$b_1(\mathfrak{g}_+) = b_1(\mathfrak{g}_-) = 2m$.*

Тогда $\mathfrak{g}_+ \underline{\times} \mathfrak{g}_-$ допускает паракомплексную структуру.

Доказательство. Так как E — паракомплексная структура, то размерность $\dim \mathfrak{g}_+ \underline{\times} \mathfrak{g}_-$ чётна. Предложение 6 задаёт структуру произведения E на $\mathfrak{g}_+ \underline{\times} \mathfrak{g}_-$, ограничения которой на $\mathfrak{g}_+$ и $\mathfrak{g}_-$ являются соответственно тождественным и антитождественным отображениями. Условием 2 (см. доказательство утверждения 6) знак $E([X_i, X_j])$ $(1 \leqslant i \leqslant 2m,\ 2m + 1 \leqslant j \leqslant 4m)$ определён быть не может. Из $4m^2$ элементов вида $[X_i, X_j]$ припишем $2m^2$ элементам знак плюс, а остальным $2m^2$ элементам — знак минус. Таким образом, $\dim(\mathfrak{g}_+ \underline{\times} \mathfrak{g}_-)_+ = \dim(\mathfrak{g}_+ \underline{\times} \mathfrak{g}_-)_- = n + 2m^2$. $\square$

Предыдущий пример показывает, что условие является достаточным, но не необходимым для существования комплексных структур на произведениях.

Автор выражает благодарность А. В. Чернавскому за приглашение на конференцию и В. О. Мантурову за ценные обсуждения и помощь.

Литература

[1] Берзин Д. В. Инварианты込присоединённого представления для алгебр Ли некоторого специального вида // Успехи мат. наук. — 1996. — Т. 51. — С. 141—143.

[2] Мубаракзянов Г. М. О разрешимых алгебрах Ли // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1963. — Т. 32. — С. 114—123.

[3] Переломов А. М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. — М.: РХД, 2002.

[4] Трофимов В. В. Введение в геометрию многообразий с симметриями. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.

[5] Ancochea J. M., Campoamor-Stursberg R. Symplectic forms and products by generators // Comm. Algebra. — 2002. — Vol. 30. — P. 4235—4249.

[6] Ancochea J. M., Campoamor-Stursberg R. Two step solvable Lie algebras and weight graphs // Transform. Groups. — 2002. — Vol. 7. — P. 307—320.

[7] Ancochea J. M., Campoamor-Stursberg R. Characteristically nilpotent Lie algebras of type $\mathfrak{g}_1 \underline{\times} \mathfrak{g}_2$ // Forum Math. — 2003. — Vol. 15. — P. 299—307.

[8] Andrada A., Barberis M. L., Dotti I., Ovando G. Product structures on four dimensional solvable Lie algebras. — 2004. — arXiv:math.RA/0402234.

[9] Campoamor-Stursberg R. A graph theoretical determination of solvable complete rigid Lie algebras // Linear Algebra Appl. — 2003. — Vol. 372. — P. 53—66.

[10] Campoamor-Stursberg R. An alternative interpretation of the Beltrametti—Blasi formula by means of differential forms // Phys. Lett. A. — 2004. — Vol. 327. — P. 138—145.

[11] Turkowski P. Solvable Lie algebras of dimension six // J. Math. Phys. — 1990. — Vol. 31. — P. 1344—1350.