Собственно 3-реализуемые группы*

М. КАРДЕНАС
Университет Севильи, Испания
e-mail: mcard@us.es

Ф. Ф. ЛАСЕРАС
Университет Севильи, Испания
e-mail: lasheras@us.es

А. КИНТЕРО
Университет Севильи, Испания
e-mail: quintero@us.es

УДК 515.162.3

Ключевые слова: накрывающие, 3-многообразия, собственно 3-реализуемые группы.

Аннотация

Говорят, что конечно представимая группа G собственно 3-реализуема, если существует компактный 2-полиэдр K, причём $\pi_1(K) \cong G$, универсальное накрытие которого имеет собственный гомотопический тип 3-многообразия (с краем). Мы рассматриваем поведение этого свойства относительно амальгамированных произведений, HNN-расширений и прямых произведений, а также независимость относительно выбора 2-полиэдра. Мы представляем также некоторые классы групп, обладающих этим свойством: конечно представимые абелевы группы, (классические) гиперболические группы, группы с одним соотношением.

Abstract

M. Cárdenas, F. F. Lasheras, A. Quintero, Properly 3*-realizable groups*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 4, pp. 95—103.

A finitely presented group G is said to be properly 3-realizable if there exists a compact 2-polyhedron K with $\pi_1(K) \cong G$ and whose universal cover has the proper homotopy type of a 3-manifold (with boundary). We discuss the behavior of this property with respect to amalgamated products, HNN-extensions, and direct products, as well as the independence with respect to the chosen 2-polyhedron. We also exhibit certain classes of groups satisfying this property: finitely generated Abelian groups, (classical) hyperbolic groups, and one-relator groups.

1. Введение

Хорошо известно, что для любой конечно представимой группы G первая группа когомологий $H^1(G, \mathbb{Z}G)$ свободная абелева и она «подсчитывает» число

*Работа частично поддержана проектом BFM 2001-3195-C02.

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 4, с. 95—103.

концов G [8, 9]. Концы G — это концы универсального накрытия $\tilde{X}$ конечного CW-комплекса, для которого $\pi_1(X) \cong G$. Если G конечна, она имеет 0 концов; если G бесконечна, то проверяется, что $1 + \operatorname{rank}(H^1(G, \mathbb{Z}G)) = 1, 2, \infty$ равно числу концов G. Авторы предположили в [10], что абелевы группы $H^n(G, \mathbb{Z}G)$ для $n > 1$ должны быть связаны с высшими гомологиями конца (или «гомологическими прогруппами» конца) n-остова $\tilde{X}$, как выше. Действительно, в [10] показано, что вторая группа когомологий свободна от кручения и свобода этой группы связана с полустабильностью G в бесконечности, т. е. с тем, будут ли любые два собственных луча в универсальном накрытии $\tilde{X}$, определяющих тот же конец, собственно гомотопны. Точнее, показано, что $H^2(G, \mathbb{Z}G)$ является свободной абелевой для группы G, полустабильной в бесконечности. Естественно задать вопрос:

$$\text{является ли группа } H^2(G, \mathbb{Z}G) \text{ всегда свободной абелевой?} \tag{Q1}$$

Это известный открытый вопрос, приписываемый Хопфу. Кажется, что эта тема как-то связана с «геометрией» соответствующего универсального накрытия. Если K — конечный двумерный CW-комплекс и $\pi_1(K) \cong G$, то вторая когомологическая группа с компактными носителями его универсального накрывающего $H^2_c(\tilde{K}; \mathbb{Z})$ изоморфна $H^2(G; \mathbb{Z}G) \oplus$(свободная абелева группа) (см. [10]). Значит, из свободы $H^2_c(\tilde{K}; \mathbb{Z})$ следует свобода $H^2(G; \mathbb{Z}G)$. Если бы $\tilde{K}$ было собственно гомотопически эквивалентно некомпактному pl 3-многообразию M, для которого, вообще говоря, $\partial M \neq \varnothing$, то по двойственности Лефшеца (так как $\pi_1(M) = 0$) $H^2_c(\tilde{K}; \mathbb{Z})$ была бы изоморфна группе $H_1(M, \partial M)$, которая в этом случае свободная абелева. Поэтому при этой гипотезе мы получили бы положительный ответ на вопрос (Q1). Мы можем дать следующее определение.

Определение 1.1. Конечно представимая группа G называется собственно 3-реализуемой, если существует конечный двумерный CW-комплекс K с $\pi_1(K) \cong G$, универсальное накрывающее которого $\tilde{K}$ собственно гомотопически эквивалентно трёхмерному многообразию M (с краем).

Следующий вопрос, поставленный в [12], усиливает вопрос (Q1):

$$\text{каждая ли конечно представимая группа } G \text{ собственно 3-реализуема?} \tag{Q2}$$

Как объяснялось выше, положительный ответ на вопрос (Q2) влечёт положительный ответ на вопрос (Q1).

Первым подходом к (Q2) было бы попытаться вложить с точностью до гомотопического типа универсальное накрывающее $\tilde{K}$ конечного двумерного CW-комплекса K с $\pi_1(K) \cong G$ в $\mathbb{R}^3$ и взять его регулярную окрестность, получив, следовательно, при этом, что $\tilde{K}$ собственно гомотопически эквивалентно 3-многообразию. Но имеется следующий результат — собственный аналог результата в [6, 16].

Теорема 1.2 ([3]). *Собственный гомотопический тип любого d-мерного локально конечного CW-комплекса X может быть представлен замкнутым подполиэдром $P \subset \mathbb{R}^{2d}$. Более того, если X собственно k-связно, то P можно выбрать в $\mathbb{R}^{2d-k}$.*

В результате мы заключаем, что универсальное накрывающее $\tilde{K}$ всегда собственно гомотопически эквивалентно 4-многообразию (и тогда G всегда собственно 4-реализуемо); собственная 3-реализуемость в общем случае неизвестна.

2. Общие замечания

В этом разделе мы представляем некоторые общие свойства, касающиеся 3-реализуемости конечно представимых групп. Эти результаты можно найти в [1].

Теорема 2.1. *Пусть $H \leqslant G$ — конечно представимые группы и $[G : H] < \infty$. Тогда G собственно 3-реализуема, если и только если H собственно 3-реализуема.*

Вспомним, что для конечно представимой групы G можно определить *число концов* G как число концов универсального накрывающего $\tilde{X}$ любого компактного 2-полиэдра X с $\pi_1(X) \cong G$. Группы с 0 концами — это конечные группы, а группы с двумя концами — это группы, имеющие бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса. Более того, теорема Столлингса о расщеплении характеризует группы с более чем одним концом как группы, которые расщепляются как амальгамированные свободные произведения (или HNN-расширения) над конечной группой (см. [9,15]). В [7] показано, что этот процесс факторизации G должен быть конечным, т. е. каждая конечно представимая группа есть фундаментальная группа конечного графа групп, в котором каждое ребро есть конечная группа и группа в каждой вершине имеет один конец.

Следствие 2.2. *Если G имеет свободную подгруппу конечного индекса, то G собственно 3-реализуема. В частности, это справедливо для всех 0-концевых и 2-концевых групп, а также для некоторых ∞-концевых групп.*

Доказательство. Заметим, что если конечно представимая группа G имеет конечно порождённую свободную подгруппу H и $[G : H] < \infty$, то G действительно 3-реализуема по теореме 2.1, так как конечно порождённые свободные группы, как легко доказывается, собственно 3-реализуемы. В частности, это приложимо ко всем 0-концевым и 2-концевым группам. Наконец, отметим, что если $\operatorname{rank}(H) \geqslant 2$, то G ∞-концевая. □

Если допустить, что для 1-концевых групп показано, что они собственно 3-реализуемые, шагом к доказательству, что и ∞-концевые группы также собственно 3-реализуемы, была бы (ввиду результата Столлингса) следующая теорема.

Теорема 2.3. *Пусть G_0, G_1 — собственно 3-реализуемые группы и F — (возможно, тривиальная) конечная циклическая группа. Тогда любое амальгамированное свободное произведение $G_0 *_F G_1$ (HNN-расширение $G_k *_F$) также собственно 3-реализуемо.*

Этот результат обобщается для доказательства того, что фундаментальная группа конечного графа групп с собственно 3-реализуемыми группами в вершинах и конечными циклическими группами на рёбрах собственно 3-реализуема, так как такая группа может быть представлена как комбинация амальгамированных произведений и HNN-расширений вершинных групп над рёберными группами.

Пока наше обсуждение того, когда группа G собственно 3-реализуема, базировалось на существовании компактного 2-полиэдра K с $\pi_1(K) \cong G$, универсальное накрывающее которого имеет определённый вид. Хотелось бы знать, до какой степени это свойство зависит от выбора такого 2-полиэдра. В [1] показано, что эта проблема исчезает после взятия букета с 2-сферами. Для этого мы сперва применяем теорему Уайтхеда ([18, теорема 14]) и получаем следующее утверждение.

Предложение 2.4. *Пусть G — собственно 3-реализуемая группа и X — любой компактный 2-полиэдр с $\pi_1(X) \cong G$. Тогда для некоторого конечного букета сфер $\bigvee\limits_{i\in I} S^2$ универсальное накрытие $X \vee \Big(\bigvee\limits_{i\in I} S^2\Big)$ имеет собственный гомотопический тип 3-многообразия.*

Замечание 2.5. Если группа G имеет свободную подгруппу H конечного индекса, то для любого компактного 2-полиэдра X с $\pi_1(X) \cong G$ его накрывающее $\tilde{X}_H$, соответствующее подгруппе H, является компактным 2-полиэдром со свободной фундаментальной группой H. Тогда согласно [17, утверждение 3.3] $\tilde{X}_H$ оказывается гомотопически эквивалентным конечному букету

$$\Big(\bigvee_{i\in I} S_i^1\Big) \vee \Big(\bigvee_{j\in J} S_j^2\Big),$$

и поэтому универсальное накрывающее как $\tilde{X}_H$, так, следовательно, и X собственно гомотопически эквивалентно 3-многообразию. Следовательно, в этом случае мы можем положить в предложении 2.4 $I = \varnothing$.

В действительности универсальное накрывающее в предложении 2.4 может быть представлено как результат собственно гомотопического прикрепления так называемого сферического объекта (определение см. в разделе 4) к универсальному накрывающему X. Изменение в пределах собственного гомотопического типа этого сферического объекта, как и прикрепляющего отображения, не меняет собственного гомотопического типа результирующего пространства. Классификация сферических объектов над данным деревом с точностью до собственного гомотопического типа дана в [2]. Сказанное приводит к следующему результату.

Предложение 2.6 ([1, утверждение 1.3]). *Пусть G — собственно 3-реализуемая группа и X — любой компактный 2-полиэдр с $\pi_1(X) \cong G$. Тогда универсальное накрывающее $X \vee S^2$ имеет собственный гомотопический тип 3-много-*

образия. Более того, если G такая, как в замечании 2.5, мы можем отбросить 2-сферу S^2.

Открытым остаётся вопрос, всегда ли в качестве множества I в предложении 2.4 можно взять $\varnothing$.

3. Примеры

Природа определения 1.1 делает для произвольной конечно представимой группы свойство быть собственно 3-реализуемой крайне трудным для проверки. В этом разделе мы представим некоторые классы групп, являющихся собственно 3-реализуемыми, используя результат о собственном гомотопическом типе некоторых двумерных собственных ко-H-пространств с одним концом (см. раздел 4).

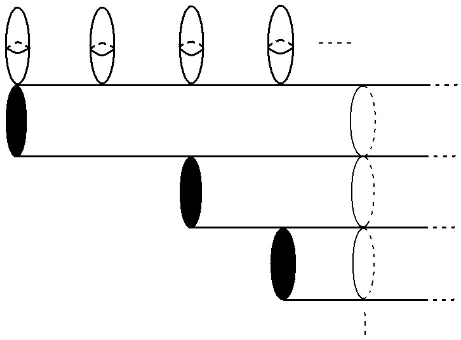
Предложение 3.1. *Пусть конечно представимая группа G принадлежит к одному из следующих классов групп*:

1) *прямые произведения бесконечных групп*;
2) *конечно порождённые абелевы группы*;
3) *односвязные на бесконечности группы, которые либо имеют один конец, либо не имеют кручения* (*т. е. «классические» гиперболические группы*);
4) *группы с одним соотношением.*

Тогда G собственно 3-реализуема.

Доказательства отдельных частей этого предложения можно найти в [1,5,13]. Напомним, что говорят, что данная группа G с компактным 2-полиэдром X, таким что $\pi_1(X) \cong G$, односвязна на бесконечности, если таково универсальное накрывающее $\tilde{X}$, т. е. для каждого компактного подполиэдра $L \subset \tilde{X}$ найдётся компактный подполиэдр $J \supset L$ и любое отображение $S^1 \to \tilde{X} - J$ продолжается до отображения $B^2 \to \tilde{X} - L$.

Главная идея состоит в сведении рассуждения к случаю, когда G имеет один конец, если ситуация не такова, с учётом теоремы Столлингса о расщеплении, следствия 2.2 и теоремы 2.3. Далее рассматривается некоторый компактный 2-полиэдр K с $\pi_1(K) \cong G$ и доказывается, что фундаментальная прогруппа универсального накрывающего $\tilde{K}$, pro-$\pi_1(\tilde{K})$, произоморфна телескопической башне $\underline{P}$ (см. раздел 4). Так как $\tilde{K}$ теперь двумерно и с одним концом, по теореме 4.2 существуют сферические объекты S^2_ω и $S^2_{\omega'}$ и собственная гомотопическая эквивалентность $\tilde{K} \vee S^2_\omega \simeq B(\underline{P}) \vee S^2_{\omega'}$. Пусть $V \subset \tilde{K}$ — множество вершин в $\omega([0,\infty))$ с $p(V) = \{v_1, \ldots, v_r\} \subset K$, обозначим через $\hat{K}$ полиэдр, полученный из $\tilde{K} \vee S^2_\omega$ прикреплением одной сферы S^2 к каждой вершине в $p^{-1}(p(V)) - \omega([0,\infty))$. Тогда $\hat{K}$ есть универсальное накрывающее компактного 2-полиэдра, полученного из K прикреплением одной сферы S^2 к каждой вершине $v_1, \ldots, v_r$, что собственно гомотопически эквивалентно букету $K \vee \Big(\bigvee_{i=1}^{r} S^2\Big)$. С другой стороны, $\hat{K}$ собственно гомотопически эквивалентно полиэдру Q, полученному из $B(\underline{P}\,) \vee S^2_{\omega'}$ прикреплением бесконечного числа сфер S^2 собственно (т. е. через собственную гомотопическую эквивалентность, даваемую теоремой 4.2). Наконец, собственный гомотопический тип букета $B(\underline{P}\,) \vee S^2_{\omega'}$ может быть представлен замкнутым подполиэдром в $\mathbb{R}^3$, показанным ниже на рисунке. Тогда легко проверить, что собственный гомотопический тип Q может быть также представлен замкнутым подполиэдром $\hat{Q}$ в $\mathbb{R}^3$.



Таким образом, универсальное накрывающее компактного 2-полиэдра $K \vee \Big(\bigvee\limits_{i=1}^{r} S^2\Big)$ с $\pi_1\Big(K \vee \Big(\bigvee\limits_{i=1}^{r} S^2\Big)\Big) \cong G$ оказывается собственно гомотопически эквивалентным 3-многообразию, полученному взятием регулярной окрестности $\hat{Q}$ в $\mathbb{R}^3$, и значит, группа G собственно 3-реализуема.

4. Добавление

Задача этой секции — представить основы и обозначения, требовавшиеся в предыдущем разделе, а также указать на то, что стоит за этими результатами. Далее мы работаем в категории tow-Gr *башен групп*, объектами которой являются обратные последовательности

$$\underline{A} = \{A_0 \xleftarrow{\phi_1} A_1 \xleftarrow{\phi_2} A_2 \longleftarrow \ldots\}.$$

Морфизм в этой категории будет называться *проморфизмом*. Общие сведения можно найти в [2, 14].

Башня $\underline{L}$ *свободная*, если она имеет вид

$$\underline{L} = \{L_0 \xleftarrow{i_1} L_1 \xleftarrow{i_2} L_2 \longleftarrow \ldots\},$$

где $L_i = \langle B_i \rangle$ — свободные группы с базисами B_i, причём $B_{i+1} \subset B_i$, разности $B_i - B_{i+1}$ конечны и $\bigcap\limits_{i=0}^{\infty} B_i = \varnothing$, а гомоморфизмы башни i_k задаются соответствующими включениями базисов. С другой стороны, башня $\underline{P}$ *телескопическая*, если она имеет вид

$$\underline{P} = \{P_0 \xleftarrow{p_1} P_1 \xleftarrow{p_2} P_2 \longleftarrow \ldots\},$$

где $P_i = \langle D_i \rangle$ — свободные группы с базисами D_i, такими что $D_{i-1} \subset D_i$, разности $D_i - D_{i-1}$ конечны (возможно, пусты), и гомоморфизмы башни p_k — очевидные проекции.

Мы также используем полную подкатегорию $(\mathrm{Gr}, \text{tow-Gr})$ в $\mathrm{Mor}(\text{tow-Gr})$, объектами которой служат стрелки $\underline{A} \to G$, где $\underline{A}$ — объект в tow-Gr и G — группа, рассматриваемая как постоянная башня, все гомоморфизмы которой сводятся к тождественному. Морфизмы в $(\mathrm{Gr}, \text{tow-Gr})$ также будут называться проморфизмами.

Всюду далее X будет (строго) локально конечным CW-комплексом. Собственное отображение $\omega\colon [0,\infty) \to X$ называется *собственным лучом* в X. Мы скажем, что два собственных луча ω, ω' *определяют тот же конец*, если их ограничения $\omega|_{\mathbb{N}}, \omega'|_{\mathbb{N}}$ собственно гомотопны. Более того, мы скажем, что они *определяют строго тот же конец*, если ω и ω' в действительности собственно гомотопны.

Для данного луча ω в X и ансамбля компактных подмножеств $C_1 \subset \subset C_2 \subset \ldots \subset X$, для которых $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$, башня

$$\text{pro-}\pi_1(X,\omega) = \{\pi_1(X,\omega(0)) \leftarrow \pi_1(X - C_1, \omega(t_1)) \leftarrow \pi_1(X - C_2, \omega(t_2)) \leftarrow \ldots\}$$

может рассматриваться как объект в $(\mathrm{Gr}, \text{tow-Gr})$, и она называется *фундаментальной прогруппой для* (X,ω), где $\omega([t_i,\infty)) \subset X - C_i$ и гомоморфизмы башни индуцированы вложениями. Эта башня не зависит (с точностью до произоморфизма) от последовательности подмножеств $\{C_i\}_i$. Нужно сказать, что если ω и ω' определяют строго тот же конец, то $\text{pro-}\pi_1(X,\omega)$ и $\text{pro-}\pi_1(X,\omega')$ произоморфны. В частности, мы всегда можем допустить, что ω есть клеточное отображение. Более того, если X строго связно в каждом конце (т. е. любые два собственных луча, определяющих тот же конец, строго определяют тот же конец), то $\pi_1^e(X,\omega) = \varprojlim \text{pro-}\pi_1(X,\omega)$ есть вполне определённый полезный инвариант, который зависит только (с точностью до изоморфизма) от конца, определённого посредством ω (см. [11]). Подобным образом можно определить объекты в $(\mathrm{Gr}, \text{tow-Gr})$, отвечающие высшим гомотопическим прогруппам (X,ω).

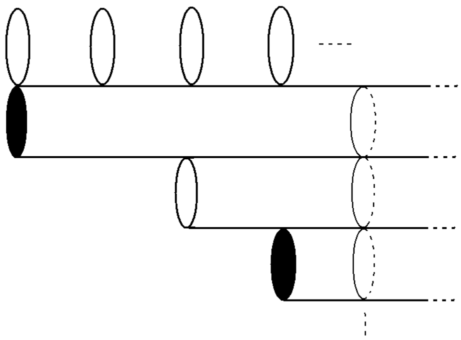
Определение 4.1. Для данного $n \geqslant 1$, дерева T и собственного луча $\omega\colon [0,\infty) \to T$ *сферический объект* S^n_ω *над* T есть пространство, полученное из T прикреплением конечного числа n-сфер S^n в каждой вершине $\omega([0,\infty))$. Заметим, что любые два такие объекта (вдоль ω) собственно гомотопически эквивалентны (над T) согласно [2, предложение 4.5(b)]).

Следующий результат, который характеризует одноконцевые двумерные собственные ко-H-пространства, был решающим для доказательства результатов в разделе 3.

Теорема 4.2 ([4, следствие 6.4]). *Если X — одноконцевой двумерный локально конечный CW-комплекс, тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) pro-$\pi_1(X, \omega)$ *произоморфна* (*копроизведению*) *башни вида* $\underline{L} \vee \underline{P}$;
2) *существуют сферические объекты* S^2_ω *и* $S^2_{\omega'}$ *и собственная гомотопическая эквивалентность* (*над* $[0, \infty)$) $X \vee S^2_\omega \simeq B(\underline{L} \vee \underline{P}) \vee S^2_{\omega'}$.

Здесь $(B(\underline{L} \vee \underline{P}), \omega')$ — собственно базированный 2-полиэдр, определённый как собственный букет (т. е. вдоль базисного луча) одноконцевого сферического объекта S^1_ε, для которого pro-$\pi_1(S^1_\varepsilon, \omega') \cong \underline{L}$ ($\omega' \colon [0, \infty) \hookrightarrow S^1_\varepsilon$ — каноническое вложение), и собственного букета C убывающей последовательности (возможно, бесконечной) цилиндров $C_n = S^1 \times [n, \infty)$ и/или евклидовых плоскостей $\mathbb{R}^2_m = S^1 \times [m, \infty)/S^1 \times \{m\}$, прикреплённых вдоль полупрямой $[0, \infty)$, для которого pro-$\pi_1(C, \omega') \cong \underline{P}$ ($\omega' \colon [0, \infty) \hookrightarrow C$ — каноническое вложение). Таким образом, $B(\underline{L} \vee \underline{P})$ может рассматриваться как «собственное пространство Эйленберга—Маклейна» $K(\underline{L} \vee \underline{P}, 1)$, и его собственный гомотопический тип может быть представлен замкнутым подполиэдром $\mathbb{R}^3$, показанным на рисунке.



Литература

[1] Ayala R., Cárdenas M., Lasheras F. F., Quintero A. Properly 3-realizable groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 2005. — Vol. 133. — P. 1527—1535.

[2] Baues H.-J., Quintero A. Infinite Homotopy Theory. — Kluwer Academic, 2001. — (K-Monographs in Mathematics).

[3] Cárdenas M., Fernández T., Lasheras F. F., Quintero A. Embedding proper homotopy types // Colloq. Math. — 2003. — Vol. 95, no. 1. — P. 1—20.

[4] Cárdenas M., Lasheras F. F., Muro F., Quintero A. Proper L-S category, fundamental pro-groups and 2-dimensional proper co-H-spaces // Topology Appl. — To appear.

[5] Cárdenas M., Lasheras F. F., Roy R. Direct products and properly 3-realizable groups. — To appear in Bull. Austral. Math. Soc.

[6] Dranisnikov A. N., Repovš D. Embedding up to homotopy type in Euclidean spaces // Bull. Austral. Math. Soc. — 1993. — Vol. 47. — P. 145—148.

[7] Dunwoody M. J. The accessibility of finitely presented groups // Invent. Math. — 1985. — Vol. 81. — P. 449—457.

[8] Epstein D. B. A. Ends // Topology of 3-Manifolds and Related Topics (Proc. Univ. Georgia Inst.). — New York: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1962. — P. 110—117.

[9] Geoghegan R. Topological Methods in Group Theory. — Book in preparation.

[10] Geoghegan R., Mihalik M. Free Abelian cohomology of groups and ends of universal covers // J. Pure Appl. Algebra. — 1985. — Vol. 36. — P. 123—137.

[11] Geoghegan R., Mihalik M. The fundamental group at infinity // Topology. — 1996. — Vol. 35, no. 3. — P. 655—669.

[12] Lasheras F. F. Universal covers and 3-manifolds // J. Pure Appl. Algebra. — 2000. — Vol. 151, no. 2. — P. 163—172.

[13] Lasheras F. F. One-Relator Groups Are Properly 3-Realizable. — Preprint.

[14] Mardešic S., Segal J. Shape Theory. — North-Holland, 1982.

[15] Scott P., Wall C. T. C. Topological methods in group theory // Homological Group Theory. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1979. — P. 137—204. — (London Math. Soc. Lect. Notes).

[16] Stallings J. R. The Embedding of Homotopy Types into Manifolds. — Princeton Univ. Press, 1965. — (Mineographed Notes).

[17] Wall C. T. C. Finiteness conditions for CW-complexes // Ann. Math. — 1965. — Vol. 81. — P. 56—69.

[18] Whitehead J. H. C. Simple homotopy types // Amer. J. Math. — 1950. — Vol. 72. — P. 1—57.