Геометрия евклидовых тетраэдров и инварианты узлов

И. Г. КОРЕПАНОВ
Южно-Уральский государственный университет
e-mail: kig@susu.ac.ru

УДК 515.162.8

Ключевые слова: инварианты узлов, евклидовы тетраэдры, исчисление Редже.

Аннотация

Строятся инварианты узлов, основанные на приписывании евклидовых геометрических величин триангуляции сферы S^3, в которой лежит узел. Рёбра триангуляции, по которым проходит узел, характеризуются ненулевым углом дефекта в терминологии исчисления Редже.

Abstract

I. G. Korepanov, Geometry of Euclidean tetrahedra and knot invariants, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 4, pp. 105—117.

We construct knot invariants on the basis of ascribing Euclidean geometric values to a triangulation of the sphere S^3, where the knot lies. Edges of the triangulation along which the knot goes are distinguished by a nonzero deficit angle, in the terminology of the Regge calculus.

1. Введение

В этой статье мы строим инварианты узлов в сфере S^3, основанные, говоря очень схематично, на следующих идеях. Берётся такая триангуляция S^3, что узел проходит по её рёбрам. После этого элементам триангуляции определённым образом приписываются евклидовы геометрические величины. В частности, каждое ребро получает евклидову длину. Поэтому и двугранные углы, и, скажем, объёмы тетраэдров приобретают определённые значения. Некоторые двугранные углы и объёмы берутся со знаком минус по причинам, связанным с ориентацией.

После этого строится ациклический комплекс в духе работ [2, 3], в котором векторные пространства состоят из дифференциалов наших геометрических величин. Напомним, что в указанных работах были предложены инварианты трёх- и четырёхмерных *многообразий*, основанные на алгебраических соотношениях, естественно соответствующих движениям Пахнера — элементарным перестройкам триангуляции многообразия. Принципиальный новый момент в настоящей

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 4, с. 105—117.

статье по сравнению с [2,3] (а равно [1,4,6]) состоит в том, что здесь мы приводим алгебраическое соотношение, работающее в ситуации, когда *углы дефекта* вокруг некоторых рёбер не равны нулю по модулю 2π. Эти углы дефекта определяются так же, как в исчислении Редже: минус сумма двугранных углов при данном ребре во всех тетраэдрах, входящих в его звезду, с той оговоркой, что мы берём *алгебраическую* сумму, с уже упоминавшимися знаками. Конструкция инварианта узлов возникает как естественное следствие такого соотношения: рёбра триангуляции, по которым проходит узел, выделяются именно тем, что для них углы дефекта равны не нулю, а некоторой величине $(-\varphi)$.

Наш инвариант узлов выражается через кручение ациклического комплекса, длины рёбер и объёмы тетраэдров почти так же, как инвариант трёхмерных многообразий [2, формула (5)] (однако, как мы объясним, для рёбер, по которым проходит узел, ситуация иная).

В разделе 2 мы указываем симплициальные движения, достаточные для перехода от данной триангуляции сферы S^3 *с узлом в ней* к любой другой триангуляции. В разделе 3 мы выписываем нужный ациклический комплекс и формулу для инварианта узлов. В разделе 4 мы доказываем наше ключевое алгебраическое соотношение, отвечающее ненулевым углам дефекта. В заключительном разделе 5 мы обсуждаем результаты и перспективы дальнейшей работы.

Предварительное изложение результатов настоящей статьи, без доказательства двух теорем, находится в заметке [5].

2. Симплициальные движения

Мы будем рассматривать, строго говоря, *псевдо*триангуляции сферы с узлом. От триангуляций в собственном смысле слова они отличаются тем, что граница симплекса в псевдотриангуляции может содержать симплекс меньшей размерности *несколько раз*; кроме того, симплекс псевдотриангуляции, вообще говоря, не определяется списком своих вершин. Отметим, что хотя комбинаторным топологам часто удобнее рассматривать триангуляции в собственном смысле (см. особенно очень полезную статью [7]), обычно не очень сложно включить в рассмотрение и псевдотриангуляции.

Пусть имеется узел K в сфере S^3. Рассмотрим псевдотриангуляцию этой сферы, удовлетворяющую следующим условиям:

а) весь узел K лежит на некоторых рёбрах псевдотриангуляции;

б) для любого тетраэдра псевдотриангуляции не более двух из его вершин принадлежат K;

в) концы всякого рёбра a псевдотриангуляции суть или две *различные* вершины, или, если они совпадают, a порождает абелизацию группы узла $\pi(K)$.

Иными словами, условие в) означает, что рёбра с совпадающими концами обвиваются ровно один раз вокруг узла. Такие рёбра нам нужны для описания «движений $1 \leftrightarrow 2$» в следующей теореме.

Теорема 1. *Псевдотриангуляция сферы S^3 со свойствами* а)—в) *может быть преобразована в любую другую псевдотриангуляцию с теми же свойствами последовательностью следующих элементарных движений*:

- *движения Пахнера $2 \leftrightarrow 3$ и $1 \leftrightarrow 4$ (здесь, например, «$2 \leftrightarrow 3$» означает, что два тетраэдра заменяются на три тетраэдра или наоборот). Такие движения не должны затрагивать рёбер, лежащих на узле K (узел, однако, может проходить через рёбра и/или вершины, лежащие на границе преобразуемого кластера тетраэдров)*;
- *движения $1 \leftrightarrow 2$ «на узле». Пусть ребро BD лежит на узле, и пусть псевдотриангуляция содержит тетраэдр $BDAA$ с ребром AA, обвивающимся вокруг узла один раз (ср. замечание перед теоремой). Движение $1 \to 2$ определяется следующим образом: возьмём точку C на ребре BD и заменим тетраэдр $BDAA$ на два тетраэдра $BCAA$ и $CDAA$. Движение $2 \to 1$ обратно этому.*

Более того, можно сделать так, что и все промежуточные псевдотриангуляции будут обладать свойствами а)—в).

Доказательство теоремы занимает остаток этого раздела. В нём мы очень существенно используем статью У. Б. Р. Ликориша [7]. Нам понадобятся не только *результаты* из [7]: мы детально проанализируем некоторые *доказательства* и укажем, какие изменения в них нужно сделать, чтобы они могли служить нашим целям. Мы также используем, только в этом доказательстве, *обозначения* статьи [7] (они отличаются от наших обозначений): Ликориш обозначает *симплексы* буквами $A, B, \ldots$, а *вершины* буквами $a, b, \ldots$.

Выражение звёздных движений через движения Пахнера и $1 \leftrightarrow 2$

Согласно [7] в симплициальных комплексах вводятся *звёздные подразделения* и *сварки* (предложенные Александером и Ньюменом, см. библиографию в [7]). Они вводят новую или соответственно убирают старую вершину во внутренней точке симплекса некоторой размерности. Сейчас мы опишем, как мы представляем такие движения для трёхмерных многообразий в виде последовательностей движений Пахнера и $1 \leftrightarrow 2$. Отметим, что мы сделаем это «вручную», *не* используя мощную теорию из [7, раздел 5].

Мы будем в основном работать с триангуляциями в собственном смысле трёхмерных многообразий, именно триангуляциями сферы S^3, содержащей узел K. Тем не менее, рассматривая движение $1 \leftrightarrow 2$, мы будем переходить на короткое время к псевдотриангуляции (разумеется, мы начинаем также с псевдотриангуляции, но она скоро подразделяется и становится собственно триангуляцией).

Достаточно рассматривать звёздные *подразделения*. Подразделение по 3-симплексу — тетраэдру — есть не что иное, как движение Пахнера $1 \to 4$.

Подразделение по 2-симплексу — треугольнику — состоит во взятии новой вершины внутри него и соединении её новыми рёбрами с тремя его вершинами, а также с ещё двумя вершинами двух прилегающих тетраэдров. Нетрудно видеть, что тот же результат получится, если сначала сделать движение Пахнера $1 \to 4$ в одном из этих тетраэдров, а затем движение $2 \to 3$, затрагивающее другой тетраэдр и прилегающий к нему новый «маленький» тетраэдр.

Подразделение (A, a) по ребру A мы представляем различными последовательностями движений в зависимости от того, лежит ли это ребро на узле.

Для ребра A, не лежащего на узле: делаем движение $1 \to 4$ в одном из тетраэдров, принадлежащих звезде A. Затем соединяем полученную новую вершину a новыми рёбрами с вершинами из линка ребра A, одной за другой, с помощью движений $2 \to 3$, пока новая звезда A не будет содержать ровно три тетраэдра. После этого преобразуем эти три тетраэдра в два движением $3 \to 2$, убирая таким образом более не нужное ребро A.

Описанная последовательность движений Пахнера, как мы видим, заменяет ребро A на ломаную линию из двух рёбер, не лежащую на A (за исключением её двух концов). Для A, лежащего на узле, это не согласуется с процедурой «геометризации», которую мы опишем в разделе 3, и здесь мы поступим по-другому.

Для ребра A, лежащего на узле: возьмём вершину b из линка A. Используя движения Пахнера $2 \to 3$, соединяем b последовательно новыми рёбрами с другими вершинами из линка A, начиная, естественно, с вершины, лежащей через одну от b, и заканчивая самой вершиной b (как уже говорилось, здесь мы ненадолго переходим к псевдотриангуляции). Затем мы делим ребро A на два — A_1 и A_2 — нашим движением $1 \to 2$, добавляя таким образом вершину a.

Теперь нужно «вернуться назад», так чтобы общий линк рёбер A_1 и A_2 снова стал таким же, как исходный линк A. Несложное рассмотрение показывает, что каждому шагу на «пути вперёд», состоявшему в движении $2 \to 3$, теперь будет соответствовать замена диагонали в октаэдре: вершина a соединяется с очередной вершиной, которую мы собираемся возвратить в линк A_1 и A_2, новым ребром посредством движения $2 \to 3$; затем другая диагональ, временно соединявшая b с одной из вершин, убирается движением $3 \to 2$.

Подразделение псевдотриангуляции последовательностью звёздных движений

Пусть имеются две псевдотриангуляции сферы с узлом, удовлетворяющие условиям а)—в) перед теоремой 1. Сначала мы подразделяем каждую из них до собственно триангуляции, дополнительно требуя, чтобы при этом не возникало рёбер, не лежащих полностью на узле, оба конца которых лежат на нём. Для этого можно использовать первое производное подразделение. Оно легко выражается через звёздные подразделения и затем через движения Пахнера и $1 \to 2$.

Таким образом, мы получили две триангуляции в собственном смысле (назовём их исходными триангуляциями), для которых существует общее симплициальное подразделение βC (мы используем обозначения теоремы 4.5 из [7]). Мы построим последовательность звёздных движений для каждой триангуляции, переводящую её в βC или даже дальше, если нужно (см. ниже). Изучая соответствующий алгоритм, который можно извлечь из доказательств леммы 4.4 и теоремы 4.5 в [7], мы замечаем, что он начинается со взятия первого производного подразделения, обозначенного $\beta_0 K$ в конце доказательства леммы 4.4 (не путать с уже сделанным подразделением!).

Это первое производное подразделение получается посредством следующих звёздных подразделений: сначала новые вершины помещаются внутрь симплексов наибольшей размерности (тетраэдров в нашем случае), затем внутрь «старых» симплексов следующей размерности (т. е. тех, которые существовали до подразделения в высшей размерности) и так далее. Мы модифицируем этот процесс следующим образом: когда мы доходим до «старых» симплексов размерности 1, мы *сразу подразделяем их* так, как они должны быть подразделены в будущей триангуляции βC. После этого всё идёт как в доказательствах леммы 4.4 и теоремы 4.5 из [7], но больше никаких подразделений или сварок в 1-остове исходной триангуляции не делается. Это важно по следующим причинам.

Нам нужно, чтобы условие б) перед теоремой 1 выполнялось на каждом шаге наших преобразований. Перейдя от псевдотриангуляций к триангуляциям, мы заменим б) более сильным условием: потребуем, чтобы ни на каком шагу преобразований не возникало рёбер, не лежащих на узле, но имеющих там оба конца. Если всё же такое ребро A возникло в вышеописанном процессе, ведущем к βC, мы будем действовать следующим образом.

«Плохое» ребро A явилось результатом некоторой сварки $(A,a)^{-1}$. Считаем, что на некотором шаге после неё делается обратное движение — подразделение (A,a); если это не так, мы просто добавляем это подразделение вручную, равно как и все остальные необходимые подразделения такого вида, после всех движений, ведущих к βC (в любом порядке)[1]. Мы получаем последовательность звёздных движений

$$\dots (A,a) \dots (A,a)^{-1} \dots . \tag{1}$$

Покажем, что расстояние между (A,a) и $(A,a)^{-1}$ можно уменьшить так, что в конце концов они взаимно сократятся, *не внося осложнений* типа новых «плохих» рёбер.

Пусть справа от (A,a) в (1) находится некоторое подразделение (B,b). Обратимся к доказательству леммы 3.4 из [7]. В нём объяснено, что (A,a) и (B,b) или просто коммутируют, или — в самом сложном случае — пересечение $C = A\cap B$ непусто и A и B оба являются гранями некоторого симплекса $A_0\star B_0\star C$, где $A = A_0\star C$, $B = B_0\star C$, звезда означает джойн. В этом случае, как объяснено

[1]Заметим, что множество «плохих» рёбер, которые мы должны подразделить, зависит только от βC, но не от исходной триангуляции.

в том же доказательстве,

$$(A,a)(B,b) = (b \star A_0, d)^{-1}(a \star B_0, d)(B,b)(A,a), \tag{2}$$

где d — новая вершина, которая тут же исчезает. Заметим, что здесь появляется новый симплекс $b \star A_0$, что было бы нежелательным в случае, если и b и A_0 — вершины, лежащие на узле. Однако, как было объяснено, подразделения (B', b') для рёбер B' на узле были сделаны *ранее* благодаря нашей модификации процесса подразделения, так что они находятся *правее* $(A,a)^{-1}$ в цепочке (1). Более того, эти подразделения делались в такой ситуации, где они не сами могли породить «плохих» рёбер.

Если же справа от (A,a) в (1) стоит сварка $(B,b)^{-1}$, то мы преобразуем их произведение следующим образом:

$$(A,a)(B,b)^{-1} = (B,b)^{-1}(a \star B_0, d)^{-1}(b \star A_0, d)(A,a). \tag{3}$$

Справедливость (3) прямо получается из (2).

Для завершения доказательства теоремы 1 остаётся проверить, что запрещённые рёбра, соединяющие две вершины на узле, не возникают при замене звёздных движений на движения Пахнера и $1 \to 2$. Эта несложная проверка предоставляется читателю. Теорема доказана.

3. Ациклический комплекс

Представлению $f\colon \pi(K) \to G$ группы узла K в некоторую группу G естественно соответствует ветвящееся над K накрытие сферы S^3 (в которой лежит K). Именно, возьмём сначала *универсальное* ветвящееся над K накрытие S^3 (в котором $\pi(K)$ действует естественным образом) и затем отождествим его точки x и x' в том и только в том случае, когда x' получается из x действием элемента подгруппы $\operatorname{Ker} f \subset \pi(K)$. Считаем, что f *нетривиально*: $\operatorname{Im} f \neq \{e\}$, где e — единичный элемент $\pi(K)$. Заметим, что для нетривиальности f достаточно, чтобы образ некоторого *перехода* некоторой диаграммы узла K, рассматриваемого как элемент $\pi(K)$, не равнялся e (тогда это также справедливо для любого перехода и любой диаграммы).

В «евклидовой» теории, которую мы собираемся развивать, нам интересна в качестве G группа изометрий, или движений, трёхмерного евклидова пространства, сохраняющих ориентацию.

Поднимем триангуляцию S^3 (начиная отсюда, мы употребляем это слово в широком смысле, включая псевдотриангуляции), удовлетворяющую условиям а)—в) из раздела 2, на покрытие, соответствующее f. Далее следуем по пути, описанному в [1—3, 6], где мы строили инварианты многообразий. Каждой вершине поднятой триангуляции мы приписываем координаты в $\mathbb{R}^3$, соблюдая такое правило: если вершины $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ лежат над одной и той же вершиной F исходной триангуляции S^3 и $F^{(2)} = gF^{(1)}$, где $g \in \pi(K)$, то координаты $F^{(2)}$ получаются из координат $F^{(1)}$ преобразованием $f(g)$. В частности, для вершины

$E \in a$, где a — переход, должно быть $a(E) = E$, так что и $f(a)$ имеет неподвижную точку. Значит, образ любого перехода есть вращение на (один и тот же) угол φ вокруг некоторой оси в трёхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Если есть только одна такая ось, то f — *скалярное*, или *абелево*, представление.

Ещё одно условие — условие «общего положения»: координаты вершин должны лежать в общем положении с точки зрения любых дальнейших рассмотрений. В частности, это подразумевает, что объёмы тетраэдров, рассматриваемые далее, ненулевые. Примем также, что угол φ лежит в общем положении в том же смысле.

Таким образом, каждое ребро триангуляции приобретает евклидову длину, а также обычные евклидовы значения приписываются двугранным углам и объёмам тетраэдров. Некоторые из этих углов и объёмов берутся, однако, со знаком минус согласно следующему правилу.

Мы считаем, что тетраэдры в нашей триангуляции S^3 *ориентированы согласованно*, т. е. для каждого тетраэдра задан порядок его вершин с точностью до чётных перестановок. Если есть два тетраэдра с общей двумерной гранью ABC и четвёртыми вершинами соответственно D и E, то их согласованные ориентации суть, например, $ABCD$ и $EABC$. Когда мы помещаем ориентированный тетраэдр $ABCD$ в $\mathbb{R}^3$, мы берём в качестве его объёма *ориентированный объём* $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}$ (смешанное произведение векторов). Напомним, что $V_{ABCD} \neq 0$. Таким образом, знаки объёмов уже определены, и мы приписываем *всем двугранным углам тетраэдра* тот же знак, который имеет его объём.

В настоящей статье мы разбираем только случай *абелева* представления f; очень интересный неабелев случай заслуживает отдельного тщательного исследования. Вот как выглядит наш ациклический комплекс в абелевом случае (объяснения ниже):

$$0 \to \mathfrak{a} \xrightarrow{\left(\frac{\partial x_i}{\partial (z \text{ или } \varphi)}\right)} (dx) \xrightarrow{\left(\frac{\partial l_a}{\partial x_i}\right)} (dl) \xrightarrow{\left(\frac{\partial \omega_b}{\partial l_a}\right)} (d\omega) \to (\cdots) \to (\cdots) \to 0. \qquad (4)$$

Он очень напоминает комплекс, используемый в нашей конструкции инвариантов трёхмерных многообразий [3, формула (1)]. Как и в указанной статье, мы пользуемся немного вольными, но очень удобными обозначениями для векторных пространств, состоящих из дифференциалов евклидовых величин.

Начнём объяснения с пространства, обозначенного (dx). Оно состоит из векторов-столбцов, элементы которых — по три дифференциала dx_i, dy_i, dz_i координат каждой вершины i, не лежащей на узле, и по одному дифференциалу dz_k для каждой вершины k на узле. Точнее, мы выбираем *по одному* прообразу каждой вершины триангуляции S^3 в нашем накрытии и обозначаем его координаты x_i, y_i и z_i, если эта i-я вершина не лежит на узле, или берём всего одну координату z_k, если эта k-я вершина лежит на узле и, значит, её прообраз попадает на некоторую фиксированную ось в $\mathbb{R}^3$, в качестве которой мы выбираем ось z. Таким образом, мы принимаем, что f отображает $\pi(K)$ во вращения вокруг оси z.

Пространство (dl) состоит из векторов-столбцов $(dl_1, \dots, dl_{N_1})^{\mathrm{T}}$, где l_a — длина a-го ребра, а N_1 — количество рёбер. Ясно, как мы определяем отображение $(dx) \to (dl)$: это *дифференциал* отображения, ставящего в соответствие координатам вершин длины соединяющих их рёбер.

Аналогично, $(dl) \to (d\omega)$ есть дифференциал отображения, ставящего в соответствие длинам рёбер углы дефекта вокруг рёбер. По определению ω_b есть минус алгебраическая сумма двугранных углов во всех тетраэдрах, содержащих ребро b (именно здесь вступают в игру знаки углов). Бесконечно малые изменения dl_a длин l_a приводят к тому, что величины ω_b отклоняются на некоторые $d\omega_b$ от $0 \pmod{2\pi}$ или $(-\varphi) \pmod{2\pi}$ для рёбер, лежащих или не лежащих на узле соответственно.

Обратимся теперь к векторному пространству $\mathfrak{a}$ и отображению $\mathfrak{a} \to (dx)$. По определению $\mathfrak{a}$ есть двумерное векторное пространство, состоящее из столбцов, обозначаемых $\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)$. Отображение $\mathfrak{a} \to (dx)$, по определению, прибавляет dz к координатам z всех вершин и поворачивает их всех на угол $d\varphi$ вокруг оси z.

Во всех этих пространствах $\mathfrak{a}$, (dx), (dl) и $(d\omega)$ имеются естественные выделенные базисы (с точностью до упорядочения базисных векторов). Поэтому все рассмотренные отображения отождествляются с их матрицами. Более того, матрица $\left(\frac{\partial \omega_b}{\partial l_a}\right)$ *симметрична* [4, раздел 2], так что оставшиеся стрелки в последовательности (4) заполняются матрицами, транспонированными к $\left(\frac{\partial l_a}{\partial x_i}\right)$ и $\left(\frac{\partial x_i}{\partial (z \text{ или } \varphi)}\right)$. При этом мы так же, как и в [2, 3], не задаемся вопросом, каков геометрический смысл пространств, обозначенных $(\cdots)$. Именно из-за этой симметрии последовательности (4) мы рассматриваем только её левую половину в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 2. *Последовательность* (4) *является ациклическим комплексом.*

Доказательство. То, что произведения двух последовательных стрелок нулевые, следует немедленно из геометрических соображений. Вот каковы они для двух стрелок около члена (dx): если координаты вершин комплекса меняются из-за вращения евклидова пространства как целого, то длины рёбер очевидно не меняются. Переходя к бесконечно малым, получаем, что действие $\mathfrak{a}$ даёт нулевые дифференциалы длин.

Аналогично для двух стрелок около члена (dl): если длины l_a вычисляются по координатам вершин x_i (а не меняются произвольно и независимо), то углы дефекта остаются нулевыми для рёбер, не лежащих на узле, и равными $(-\varphi)$ для лежащих (последнее выполнено просто по определению: координаты двух экземпляров одной вершины связаны движением $f(g)$, $g \in \pi(K)$, как отмечалось ранее; обход вокруг узла один раз соответствует вращению на φ). Переходя к бесконечно малым, снова получаем, что произведение двух этих стрелок нулевое.

Таким образом, мы заключаем, что (4) действительно есть алгебраический комплекс. Теперь нужно доказать его ацикличность (= точность).

Точность в члене (dl)

Нужно доказать, что если бесконечно малые изменения dl_a длин рёбер l_a таковы, что соответствующие бесконечно малые изменения $d\omega_b$ углов дефекта нулевые, то такие dl_a могут быть получены из бесконечно малых изменений dx_i координат вершин.

Сначала рассмотрим «конечную» версию этого утверждения: пусть длинам рёбер приданы малые, но конечные изменения, такие что углы дефекта сохраняют свои значения: $(-\varphi)$ для рёбер на узле и нуль для остальных, тогда должны существовать новые координаты вершин, соответствующие этим новым длинам. Прямым обобщением рассуждения из [2, доказательство леммы 2] можно показать, что в этой ситуации можно ввести евклидовы координаты для вершин некоторого накрытия сферы S^3, ветвящегося над узлом K, так, что новые длины рёбер совпадут с евклидовыми расстояниями между их концами. Группа $\pi(K)$ действует на этом накрытии, и так как каждая вершина снабжена евклидовыми координатами, возникает новое представление $\pi(K)$ в группе движений трёхмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$.

Нетрудно, однако, показать, что малая деформация абелева представления группы узла в группу изометрий $\mathbb{R}^3$, характеризуемого углом φ в общем положении, приводит также к абелеву представлению[1]. Поэтому $\pi(K)$ отображается во вращения вокруг некоторой оси, и чтобы получить желаемые координаты вершин, в нашем случае фиксированного φ остаётся только сдвинуть эту ось на «старое» место оси z.

Не представляет проблем перейти в этом рассуждении к бесконечно малым dl_a и dx_i. Осторожность нужна лишь при рассмотрении бесконечно малых $d\omega_b$. Именно, условие «все $d\omega_b$ равны нулю» *не должно быть менее ограничительным*, чем условие «все ω_b равны const». Здесь мы должны потребовать, чтобы конфигурация вершин была такова, чтобы матрица $\left(\frac{\partial \omega_b}{\partial l_a}\right)$ имела *максимальный*

[1] Доказательство можно провести следующим образом. Предположим, что для общего φ можно деформировать абелево представление $\pi(K) \to$ (движения $\mathbb{R}^3$) в неабелево. Если перейти к алгебраически замкнутому полю, т. е. комплексифицировать группу движений $\mathbb{R}^3$, такое утверждение будет значить, что такая деформация существует для открытого по Зарискому множества φ. Пусть φ очень мало, тогда образы всех переходов любой диаграммы узла близки к единичному оператору — разность между ними и единичным оператором порядка φ (говоря здесь и дальше о разностях, мы представляем, что выбран способ численного выражения движения $\mathbb{R}^3$ или его комплексифицированной версии, например в виде матрицы вращения и вектора сдвига).

Рассмотрим точку пересечения диаграммы узла, в которой переход a разбивает нижележащий фрагмент узла на два перехода b и c так, что, скажем, $c = aba^{-1}$. Тогда разность между $f(c)$ и $f(b)$, где f — предполагаемое неабелево деформированное представление, такого же или большего порядка малости, как $\varphi \cdot (f(b) - f(a))$. Это можно вывести так: $f(c) - f(b) = \big(f(ab^{-1})f(b)f(ba^{-1})f(b^{-1}) - 1\big)f(b)$, где мы отмечаем, что $f(b)$ отличается от единицы на величину порядка φ, а $f(ab^{-1})$ отличается от единицы на величину такого же порядка, как $f(b)-f(a)$ (большие скобки в правой части содержат приближённо коммутатор двух бесконечно малых движений из алгебры Ли).

Но тогда, суммируя некоторые величины типа $f(c) - f(b)$, мы находим, что *наибольшая* из разностей между двумя образами переходов того же или большего порядка малости, что она же, умноженная на φ. Это возможно, только если все эти образы просто совпадают.

ранг. Это, однако, лишь ещё одно условие типа «общего положения», а мы договорились, что все такие условия выполнены.

Точность в членах (dx) и $\mathfrak{a}$

Начнём с члена (dx). Как и раньше, рассмотрим сначала конечную версию этого утверждения. Она очевидна: если координаты вершин изменились так, что все длины рёбер остались постоянными, то, конечно, такое изменение координат отвечает движению евклидова пространства, которое, так как ось z фиксирована, есть вращение вокруг неё и сдвиг вдоль неё же. Чтобы перейти к бесконечно малым, снова используем соображения общего положения.

Точность в члене $\mathfrak{a}$ следует из того, что $\mathfrak{a}$ состоит *в точности* из бесконечно малых поворотов вокруг и сдвигов вдоль оси z. Теорема 2 доказана.

Наш инвариант узлов определяется формулой

$$I(K) = \tau \frac{\prod' l^2}{\prod 6V} (2(1-\cos\varphi))^{N_0^{\mathrm{knot}}}. \tag{5}$$

Здесь τ — кручение комплекса (4). Оно может быть выражено через миноры матриц (выбранные согласно общей теории кручений) с учётом симметрии комплекса как

$$\tau = \frac{\left(\operatorname{minor}\left(\frac{\partial l_a}{\partial x_i}\right)\right)^2}{\operatorname{minor}\left(\frac{\partial \omega_b}{\partial l_a}\right)\left(\operatorname{minor}\left(\frac{\partial x_i}{\partial (z \text{ или } \varphi)}\right)\right)^2}. \tag{6}$$

Произведение в знаменателе (5) берётся по всем тетраэдрам, а произведение со штрихом в числителе — только по рёбрам, *не лежащим на узле*. Число N_0^{knot} есть количество вершин триангуляции, *лежащих на узле*.

Теорема 3. *Величина $I(K)$ является инвариантом узлов.*

Доказательство основано на изучении того, как кручение ведёт себя при симплициальных движениях из теоремы 1. Для движений $2 \leftrightarrow 3$ и $1 \leftrightarrow 4$ это уже, по существу, проделано в [4] (см. также части статей [2, 3], посвящённые трёхмерным многообразиям). Что касается движений $1 \leftrightarrow 2$, мы ими займемся в следующем разделе.

4. Алгебраическое соотношение для движения $1 \to 2$

Пусть тетраэдр $BDAA$ будет как в теореме 1: ребро BD лежит на узле K, а ребро AA оборачивается один раз вокруг K. Пусть представление $f\colon \pi(K) \to$ (движения $\mathbb{R}^3$) переводит обход по AA во вращение на угол $\varphi \neq 0 \pmod{2\pi}$ вокруг оси z. Поднятые на покрытие, соответствующее f (см. первый абзац раздела 3), начало и конец ребра AA становятся разными точками, которым приписываются разные евклидовы координаты, как объяснено в третьем абзаце раздела 3.

Наша цель сейчас — изучить, как кручение комплекса (4) ведёт себя при движении $1 \to 2$, описанном в теореме 1. Как подсказывает форма нашего ациклического комплекса (4), нас должно интересовать, какие вершины, рёбра и тетраэдры убираются или добавляются к симплициальному комплексу. Именно, движение $1 \to 2$

- добавляет новую вершину C;
- убирает ребро BD и добавляет новые рёбра BC, CD и CA;
- убирает тетраэдр $BDAA$ и добавляет взамен $BCAA$ и $CDAA$.

Соображения, опирающиеся на треугольность матриц и аналогичные использованным в [4], показывают, что множитель, на который кручение комплекса (4) умножается при движении $1 \to 2$, может быть вычислен из следующих «локальных» ациклических комплексов:

$$0 \to 0 \to (dl_{BD}) \to (d\omega_{BD}) \to 0 \to 0 \tag{7}$$

и

$$0 \to (dz_C) \to (dl_{BC}, dl_{CD}, dl_{AC}) \to (d\omega_{BC}, d\omega_{CD}, d\omega_{AC}) \to \\ \to (\text{член, симметричный } dz_C) \to 0. \tag{8}$$

Здесь, например, (dz_C) означает одномерное пространство, состоящее просто из дифференциала координаты z_C; $(dl_{BC}, dl_{CD}, dl_{AC})$ есть трёхмерное пространство и т. д.

Мы обозначаем кручение комплекса (7) через τ_1, а кручение комплекса (8) — через τ_2. Прямое вычисление показывает, что

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{6V_{CAAB} \cdot 6V_{DAAC}}{2(1-\cos\varphi) \cdot l_{AC}^2 \cdot 6V_{DAAB}}. \tag{9}$$

Поэтому отношение кручений «глобальных» комплексов (4), отвечающих триангуляциям S^3, различающимся на движение $1 \to 2$, тоже даётся формулой (9). Таким образом, кручение (6) комплекса (4)

- приобретает множитель $\frac{1}{2(1-\cos\varphi)}$ при добавлении вершины (в нашем случае C) на узле;
- приобретает множитель l_i^{-2} при добавлении ребра i, не лежащего на узле. Отметим, что для рёбер *на узле* таких множителей нет;
- приобретает множитель $6V$ при добавлении тетраэдра (объёма V) и множитель $(6V)^{-1}$ для каждого убираемого тетраэдра.

Всё это вместе гарантирует инвариантность величины $I(K)$ при движениях $1 \leftrightarrow 2$, что завершает доказательство теоремы 3.

5. Обсуждение результатов

Главное в настоящей статье — формула (9). Она показывает, что соотношение, отвечающее полезному симплициальному движению, существует и для ненулевых углов дефекта. В этой статье этот факт применяется к теории узлов. С другой стороны, он может также найти применения в исчислении Редже, т. е. дискретной теории гравитации.

Возможно, имеет смысл поискать квантовые аналоги формулы (9). Эта задача выглядит решаемой в нашем случае инвариантов, строящихся с использованием евклидовой геометрии в 3-симплексах, по аналогии с соотношением для движений $2 \to 3$, которое играло ключевую роль в построении инвариантов *многообразий*, начатом в [4], и которое может быть получено (двойным) квазиклассическим пределом из уравнения пентагона для квантовых $6j$-символов.

Ещё одна, по-видимому, решаемая задача — обобщение наших геометрических конструкций на случай многомерных аналогов узлов и на случай, когда мы используем другую геометрию, отличающуюся от евклидовой. Гораздо более трудной выглядит в этих случаях проблема *квантования*.

Первые результаты фактических вычислений наших инвариантов $I(K)$ для конкретных узлов K и представлений группы $\pi(K)$ можно найти в [10]. Также в одной из будущих работ будет представлена теория, относящаяся к неабелевым представлениям $\pi(K)$. Сейчас мы лишь отметим, что

$$I(\text{неузел}) = -4(1-\cos\varphi)^2$$

(что нетрудно сосчитать даже без компьютера) и что вычисления обнаруживают связь с многочленом Александера и кручением Райдемайстера (как абелевым, так и неабелевым). Аналогия с нашими инвариантами узлов [8,9] подсказывает, что самые интересные результаты ожидаются для наиболее сложных представлений $\pi(K)$ в какой-либо группе геометрического происхождения. Отметим, что есть указания на то, что наша «евклидова» теория инвариантов многообразий и узлов может, немного парадоксально, выйти за пределы евклидовых изометрий $\mathbb{R}^3$ и включить в себя группу всех *аффинных* преобразований $\mathbb{R}^3$.

Работа выполнена при поддержке совместного гранта РФФИ и губернатора Челябинской области, проект 04-01-96010.

Литература

[1] Корепанов И. Г. Евклидовы 4-симплексы и инварианты четырехмерных многообразий. I. Перестройки $3 \to 3$ // Теор. и матем. физ. — 2002. — Т. 131, № 3. — С. 377—388.

[2] Корепанов И. Г. Евклидовы 4-симплексы и инварианты четырехмерных многообразий. II. Алгебраический комплекс и перестройки $2 \leftrightarrow 4$ // Теор. и матем. физ. — 2002. — Т. 133, № 1. — С. 24—35.

[3] Корепанов И. Г. Евклидовы 4-симплексы и инварианты четырехмерных многообразий. III. Перестройки $1 \leftrightarrow 5$ и связанные с ними структуры // Теор. и матем. физ. — 2003. — Т. 135, № 2. — С. 179—195.

[4] Korepanov I. G. Invariants of PL manifolds from metrized simplicial complexes. Three-dimensional case // J. Nonlinear Math. Phys. — 2001. — Vol. 8, no. 2. — P. 196—210.

[5] Korepanov I. G. Euclidean tetrahedra and knot invariants. — 2004. — `arXiv:math.GT/0405547`.

[6] Korepanov I. G., Martyushev E. V. Distinguishing three-dimensional lens spaces $L(7,1)$ and $L(7,2)$ by means of classical pentagon equation // J. Nonlinear Math. Phys. — 2002. — Vol. 9, no. 1. — P. 86—98.

[7] Lickorish W. B. R. Simplicial moves on complexes and manifolds // Proceedings of the Kirbyfest. — 1999. — P. 299—320. — (Geometry & Topology Monographs; Vol. 2).

[8] Martyushev E. V. Euclidean simplices and invariants of three-manifolds: a modification of the invariant for lens spaces // Изв. Челябинского науч. центра УрО РАН. — 2003. — Вып. 2 (19). — С. 1—5. — `http://csc.ac.ru/news/2003_2/`.

[9] Martyushev E. V. Two representations of the fundamental group and invariants of lens spaces // Изв. Челябинского науч. центра УрО РАН. — 2003. — Вып. 4 (21). — С. 1—5. — `http://csc.ac.ru/news/2003_4/`.

[10] Martyushev E. V. Euclidean geometric invariants of links in 3-sphere. — 2004. — `arXiv:math.GT/0409241`.