

# Комплекс Хованова для виртуальных узлов

**В. О. МАНТУРОВ**

*Московский государственный университет*

*им. М. В. Ломоносова*

e-mail: vassily@manturov.mccme.ru

УДК 515.162.8

**Ключевые слова:** узел, виртуальный узел, скобка Кауфмана, полином Джонса, комплекс Хованова, атом, категорификация.

## Аннотация

Одним из самых ярких достижений современной теории узлов является предложенная Ховановым категорификация полинома Джонса. В работе построена теория гомологий Хованова для виртуальных узлов. Важным препятствием к построению такой теории (в отличие от случая классических узлов) является неориентируемость атома — двумерного комбинаторного объекта, связанного с диаграммами виртуальных зацеплений. Задача решена явно в случае поля коэффициентов  $\mathbb{Z}_2$ , а также с использованием геометрических конструкций, применяемых к атомам. Обсуждается предложенное Ховановым обобщение его теории гомологий посредством фробениусовых расширений. В случае виртуальных узлов автором построены аналоги этих теорий, использующие как алгебраические, так и геометрические (атомы) конструкции.

## Abstract

*V. O. Manturov, The Khovanov complex for virtual links, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 4, pp. 127–152.*

One of the most outstanding achievements of the modern knot theory is Khovanov's categorification of Jones polynomials. In the present paper, we construct the homology theory for virtual knots. An important obstruction to this theory (unlike the case of classical knots) is the nonorientability of "atoms"; an atom is a two-dimensional combinatorial object closely related with virtual link diagrams. The problem is solved directly for the field  $\mathbb{Z}_2$ , and also by using some geometrical constructions applied to atoms. We discuss a generalization proposed by Khovanov; he modifies the initial homology theory by using the Frobenius extension. We construct analogues of these theories for virtual knots, both algebraically and geometrically (by using atoms).

## 1. Введение

В последние годы получила широкое развитие теория виртуальных узлов, предложенная Кауфманом в 1996 году (см. [9]). Виртуальное зацепление представляет собой комбинаторное обобщение понятия классического зацепления: мы рассматриваем диаграммы зацеплений, в которых, помимо обычных перекрёстков (проход и переход), допускаем ещё один тип перекрёстков — так называемый *виртуальный*, который не является ни проходом, ни переходом. Он

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2005, том 11, № 4, с. 127–152.

© 2005 Центр новых информационных технологий МГУ,

Издательский дом «Открытые системы»

изображается кружочком. Его следует трактовать так, что две ветви диаграммы пересекаются, так как не могут быть изображены на плоскости без пересечения. Это приводит к естественному обобщению движений Рейдемейстера на случай виртуальных узлов: помимо обычных классических движений Рейдемейстера плоских диаграмм (обозначаемых через  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ ), которые можно трактовать как изменения диаграммы внутри некоторой локальной области, гомеоморфной  $\mathbb{R}^2$ , возникает ещё движение *объезда*, которое состоит в следующем. Если некоторая ветвь диаграммы между точками  $A$  и  $B$  содержит только виртуальные перекрёстки, то мы можем удалить эту ветвь и восстановить её в виде произвольного пути, соединяющего  $A$  и  $B$ , по ходу расставляя виртуальные перекрёстки (рис. 1).

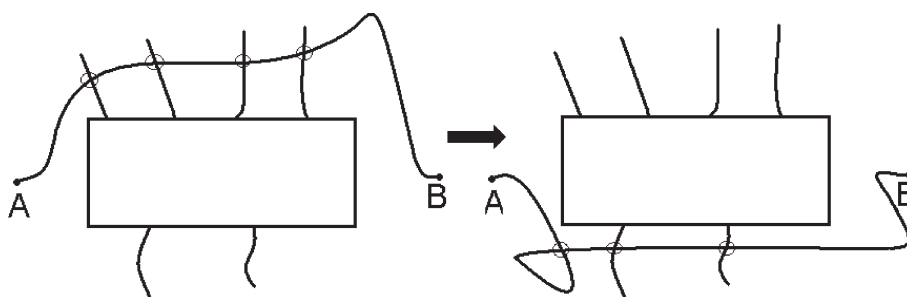


Рис. 1. объезд

Таким образом, *виртуальное зацепление* — это класс эквивалентности виртуальных диаграмм по обобщённым движениям Рейдемейстера, состоящим из классических движений Рейдемейстера и движения объезда.

**Замечание 1.** Такое определение позволяет обобщать некоторые инварианты классических узлов, при этом часто инвариантность относительно объезда следует из определения, а инвариантность относительно классических движений Рейдемейстера доказывается так же, как в классическом случае.

Такой подход приводит к геометрическому определению виртуального узла (зацепления) как узла в утолщённой поверхности с ручками  $S_g \times I$ , рассматриваемого с точностью до стабилизации/дестабилизации, при этом виртуальные перекрёстки соответствуют «дефектам изображения» при «проектировании» теории узлов в  $S_g \times I$  на  $\mathbb{R}^2 \times I$  (здесь  $S_g$  проектируется на плоскость, при этом образы классических перекрёстков представляют собой классические перекрёстки, а пересечения образов ветвей, не пересекающихся в  $S_g \times I$ , образуют виртуальные перекрёстки). Таким образом, виртуальные узлы, помимо комбинаторного, имеют также и геометрическое определение.

На случай виртуальных узлов были обобщены многие известные инварианты классических узлов (см. [1, 3, 9, 13]), в частности скобка Кауфмана и полином Джонса, предложенный в оригинальной работе Кауфмана [9].

Замечательным достижением классической теории узлов последних лет является обобщение полинома Джонса (в форме нормированной скобки Кауфмана), предложенное Ховановым [10]. Оно представляет собой *категорификацию* полинома Джонса, т. е. замену абстрактных полиномов (ко)гомологиями градуированных комплексов векторных пространств. Так, каждому зацеплению ставится в соответствие некоторый градуированный алгебраический комплекс, все (ко)гомологии которого являются инвариантами узлов, а градуированная эйлерова характеристика совпадает с полиномом Джонса.

В дальнейшем мы будем рассматривать (би)градуированные комплексы

$$\mathcal{C} = \bigoplus_{i,j} \mathcal{C}^{i,j},$$

в которых имеется *высота*  $i$  и *градуировка*  $j$ . Дифференциал  $\partial$  в комплексе сохраняет градуировку и повышает высоту на единицу. У градуированного линейного пространства  $A$  определим *квантовую размерность*  $\text{qdim}$  по правилу

$$\text{qdim } A = \sum_i q^i \cdot \dim A^i,$$

где  $A^i$  — подпространство в  $A$ , порождённое базисными векторами градуировки  $i$ . В качестве таких градуированных линейных пространств можно рассматривать, например, пространства цепей  $\mathcal{C}^i$  комплекса  $\mathcal{C}$  заданной высоты  $i$ .

Здесь правильнее было бы говорить о *когомологиях*, но в литературе устоялось название *гомологии Хованова*, поэтому мы будем придерживаться терминологии *цепи, циклы, границы* вместо *коцепи, коциклы, кограницы*. На таких комплексах естественным образом определены операции сдвига высоты  $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}[k]$  и сдвига градуировки  $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C} \cdot \{l\}$ , определённые по правилам

$$(\mathcal{C}[k])^{i,j} = \mathcal{C}^{i-k,j}, \quad (\mathcal{C} \cdot \{l\})^{i,j} = \mathcal{C}^{i,j-l}.$$

*Градуированной эйлеровой характеристикой* комплекса  $\mathcal{C}^{i,j}$  называется альтернированная сумма градуированных размерностей пространств цепей, или, что то же самое, групп гомологий. Для пространств цепей мы имеем

$$\sum_i (-1)^i \text{qdim } \mathcal{C}^i = \sum_{i,j} (-1)^i q^j \dim \mathcal{C}^{i,j}.$$

Замечательным результатом в теории гомологий Хованова является их *функториальность*, которая состоит в том, что каждый кобордизм в  $\mathbb{R}^3 \times I$  между двумя зацеплениями  $K_1 \subset \mathbb{R}^3 \times \{0\}$  и  $K_2 \subset \mathbb{R}^3 \times \{1\}$  задаёт естественное отображение между гомологиями Хованова  $\text{Kh}(K_1) \rightarrow \text{Kh}(K_2)$ , которое представляет собой *инвариант кобордизма* (с точностью до знака), в частности, когда зацепления  $K_1$  и  $K_2$  пусты, комплекс Хованова задаёт инвариант *двумерных узлов* — вложенных в  $\mathbb{R}^4$  двумерных поверхностей. Этот результат был независимо получен Ховановым, Бар-Натаном и Якобсоном (подробнее см. [5, 6]).

Целью настоящей работы является обобщение конструкции Хованова на случай виртуальных узлов. Замечание 1 облегчает доказательство инвариантности

гомологий Хованова для виртуальных зацеплений. При этом самой трудной частью является доказательство *корректной определённости* комплекса Хованова.

Мы опишем три способа построения комплекса Хованова для виртуальных узлов. В первом из них мы построим комплекс Хованова для произвольных виртуальных зацеплений с коэффициентами в поле  $\mathbb{Z}_2$ , второй способ — это построение комплекса Хованова для оснащённых виртуальных зацеплений (посредством удвоения виртуальных зацеплений), а третий способ опирается на комплекс Хованова двулистных накрытий над виртуальными узлами (в смысле атомов). Во втором случае коэффициенты можно брать в произвольном кольце, а в третьем — в произвольном поле.

После этого мы кратко опишем предложенное Ховановым в [12] алгебраическое обобщение его конструкции, в которых в качестве гомологий тривиального зацепления выступает некоторый модуль над основным кольцом коэффициентов, а также обсудим предложенные автором обобщения этой конструкции на случай виртуальных узлов (как геометрическим способом, использующим атомы, так и алгебраическим способом).

## 2. Скобка Кауфмана и полином Джонса. Атомы

Рассмотрим ориентированную виртуальную диаграмму  $L$  и диаграмму  $|L|$ , полученную из  $L$  забыванием ориентации. После этого будем разводить классические перекрёстки диаграммы  $|L|$  по следующему правилу. Каждый классический перекрёсток диаграммы можно *сгладить* одним из двух способов:  $A$  и  $B$  (рис. 2).

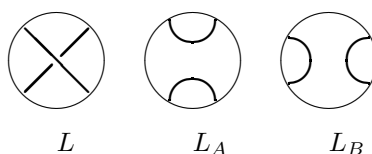


Рис. 2. Два способа сглаживания

Выбор сглаживания для всех классических перекрёстков диаграммы задаёт её *состояние*. Каждое состояние задаёт набор кривых на плоскости, у которых имеются только виртуальные перекрёстки. Иными словами, мы получаем некоторое тривиальное виртуальное зацепление; его компонентами являются (уникурсальные) кривые.

Пусть у диаграммы  $L$  имеется  $n$  классических перекрёстков. Перенумеруем их произвольным образом. В этом случае мы имеем  $2^n$  состояний, которые можно однозначно поставить в соответствие вершинам  $n$ -мерного куба  $\{0, 1\}^n$ , где 0 и 1 соответствуют  $A$ -сглаживанию и  $B$ -сглаживанию перекрёстка. Назовём этот куб *кубом состояний*. Назовём два состояния *соседними*, если они

отличаются ровно в одной координате. Соседние (по ребру) рёбра куба соединяются ребром. Ориентируем рёбра куба согласно увеличению координаты, т. е. от разведения типа  $A$  к разведению типа  $B$ .

Каждое состояние  $s$  имеет три важные характеристики: количество  $\alpha(s)$  сглаживаний типа  $A$ , количество  $\beta(s) = n - \alpha(s)$  сглаживаний типа  $B$  и число  $\gamma(s)$  компонент зацепления в этом состоянии. После этого мы определяем полином Джонса—Кауфмана по формуле

$$X(L) = (-a)^{-3w(L)} \sum_s a^{\alpha(s)-\beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{\gamma(s)-1}, \quad (1)$$

где  $w(L)$  — число закрученности ориентированной диаграммы  $L$  (т. е. разница между количеством положительных и отрицательных классических перекрёстков).

Ненормированная версия

$$\sum_s a^{\alpha(s)-\beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{\gamma(s)-1}$$

носит название *скобки Кауфмана*. Скобка Кауфмана (а также нормированная версия — полином Джонса—Кауфмана) представляет собой полином Лорана одной переменной. В дальнейшем мы будем говорить просто «полином», подразумевая полином Лорана. Скобка Кауфмана определяется для неориентированных зацеплений и является инвариантной относительно движения объезда, второго и третьего движений Рейдемейстера и удвоенного первого движения Рейдемейстера  $\Omega_1^2$ , состоящего в одновременном добавлении (удалении) рядом стоящих петель — одной положительной и одной отрицательной, при этом участок между двумя петлями должен образовывать два перехода подряд (подробнее см. [3]).

Сделав замену переменной  $a = \sqrt{-q^{-1}}$ , мы получим вместо полинома Джонса  $V$  его модифицированные версии  $J$  и  $\hat{J}$ . Они отличаются друг от друга тем, что  $J = 1$  на тривиальном узле, а  $\hat{J} = 1$  на «пустом зацеплении». При этом  $J = \frac{\hat{J}}{q+q^{-1}}$ . Опишем конструкцию  $\hat{J}$  более подробно. Пусть  $L$  — ориентированная виртуальная диаграмма,  $|L|$  — соответствующая неориентированная виртуальная диаграмма,  $n_+$  и  $n_-$  — количества положительных и отрицательных классических перекрёстков,  $n$  — общее число классических перекрёстков. Таким образом,  $n = n_+ + n_-$ . Положим

$$\hat{J}(L) = (-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-} \langle L \rangle, \quad (2)$$

где  $\langle L \rangle$  — модифицированная скобка Кауфмана, определяемая по правилу

$$\langle \bigcirc \rangle = (q + q^{-1}), \quad \langle L \rangle = \langle L_A \rangle - q \langle L_B \rangle, \quad \langle L \sqcup \bigcirc \rangle = (q + q^{-1}) \cdot \langle L \rangle$$

(см. рис. 2).

В дальнейшем мы будем иметь дело с полиномом  $\hat{J}$ .

Классы эквивалентности виртуальных диаграмм по движению объезда и движениям  $\Omega_1^2$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$  называются *оснащёнными виртуальными зацеплениями*.

Для оснащённых виртуальных зацеплений корректно определена операция взятия  $n$  «параллельных копий»  $K \rightarrow D_n(K)$ : при применении движений  $\Omega_1^2$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$  или объезда (но не  $\Omega_1$ ) к исходной диаграмме  $K$  диаграмма  $D_n(K)$  преобразуется в эквивалентную ей. Операция удвоения  $K \rightarrow D_2(K)$  изображена на рис. 3.

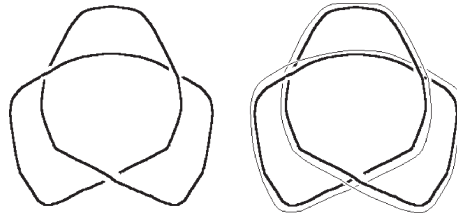


Рис. 3. Удвоение трилистника: параллельная копия изображена тонкой линией

Полином  $\hat{J}$  имеет простое описание в терминах куба состояний. Вынося за скобки нормировочные множители  $(-1)^{n-} q^{n+ - 2n-}$ , мы получаем (слегка модифицированную) скобку Кауфмана вида  $\sum_s (-q)^{\beta(s)} (q + q^{-1})^{\gamma(s)}$ , т. е. мы берём сумму по всем вершинам куба произведений величины  $(-q)$  в степени *высоты вершины* и величины  $(q + q^{-1})$  в степени количества окружностей, соответствующих данной вершине куба. Таким образом, мы можем сказать, что каждой окружности соответствует полином  $(q + q^{-1})$ , затем эти полиномы перемножаются и «сдвигаются» с помощью умножения на  $\pm q^k$ .

Таким образом, полином Джонса восстанавливается лишь по информации о *количестве окружностей* в состояниях куба. Если же ещё принять во внимание, как *перестраиваются окружности при переходе из некоторого состояния в соседнее (по ребру)*, мы получим комплекс Хованова.

Приведём важную конструкцию, которая нам понадобится в дальнейшем. Атомом называется пара  $(M, \Gamma)$ : двумерное замкнутое многообразие без края  $M$  и четырёхвалентный граф  $\Gamma \subset M$ , называемый *остовом атома* и делящий  $M$  на чёрные и белые клетки, раскрашенные шахматным образом. Атомы рассматриваются с точностью до естественной комбинаторной эквивалентности — гомеоморфизмов многообразия, переводящих остов в остов, чёрные клетки — в чёрные, а белые — в белые. Мы не будем предполагать  $M$  связным; иногда будет рассматриваться случай, когда  $M$  состоит из двух связных компонент.

Атом  $(M, \Gamma)$  называется *ориентируемым*, если поверхность  $M$  ориентируема.

Каждый атом (более точно, его класс эквивалентности) может быть полностью восстановлен по следующим комбинаторным данным:

- 1) остов (четырёхвалентный граф);
- 2)  $A$ -структура (делящая четыре полуребра, исходящие из каждой вершины, на две пары, называемые противоположными; отношение противоположности определяется в соответствии с расположением рёбер на поверхности);

- 3)  $B$ -структура (в каждой вершине выделены две пары соседних полурёбер (или двух углов), которые образуют границы чёрных клеток).

В 1996 году автором была предложена связь атомов с узлами и виртуальными узлами, которую мы опишем в дальнейшем (подробнее см. [3]).

### 3. Комплекс Хованова виртуальных узлов с коэффициентами в поле $\mathbb{Z}_2$

В этом разделе приводится результат, впервые полученный в [1].

Пусть  $L$  — ориентированная диаграмма виртуального зацепления. Под *кубом перестроек* мы понимаем куб  $\{0, 1\}^n$ , в каждой вершине которого указано количество окружностей в соответствующем состоянии (как у куба состояний), а на каждом ребре указано, какие окружности перестраиваются при переходе от состояния к соседнему по этому ребру (новая информация). Поставим в соответствие каждой окружности линейное пространство  $V$  над полем  $\mathbb{Z}_2$ , порождённое двумя векторами  $v_+$  и  $v_-$ , где векторы  $v_{\pm}$  имеют градуировку  $\pm 1$ . Таким образом,  $\text{qdim } V = (q + q^{-1})$ . Каждой вершине куба  $s = \{a_1, \dots, a_n\}$  соответствует некоторое количество окружностей, которое мы обозначим через  $\gamma(s)$ . Поставим в соответствие каждой такой вершине векторное пространство  $V^{\otimes \gamma(s)} \cdot \left\{ \sum_{i=0}^n a_i \right\}$ , получающееся из тензорной степени пространства  $V$  сдвигом градуировки. Замена  $(q + q^{-1})$  на пространство  $V$ , такое что  $\text{qdim } V = (q + q)^{-1}$ , представляет собой важный шаг категорификации. Определим пространство цепей высоты  $k$  как прямую сумму пространств, относящихся ко всем вершинам куба высоты  $k$ .

Мы корректно задали цепи градуированного комплекса. Из этого следует, что, как бы мы ни задали дифференциалы этого комплекса, его эйлерова характеристика от этого зависеть не будет. А именно,  $\chi(\text{Kh}(L)) = \hat{J}(L)$ , где  $\text{Kh}(L)$  означает биградуированную группу гомологий того комплекса, который мы собираемся строить.

Определим *частичные дифференциалы* на цепях, действующие вдоль рёбер куба по направлению стрелок, т. е. от  $A$  к  $B$ , следующим образом. Пусть ребро  $a$  соответствует переходу из состояния  $s$  в состояние  $s'$ , при этом  $l$  окружностей, которые не примыкают к рассматриваемому перекрёстку, не претерпевают изменений. В перекрёстке диаграммы  $|L|$ , соответствующем ребру  $a$ , происходит перестройка либо одной окружности в две, либо двух окружностей в одну, либо одной окружности в одну. В первых двух случаях мы определим дифференциал так же, как он определяется в случае классических узлов [4, 10], а именно на ребре, увеличивающем количество окружностей, мы положим  $\Delta \otimes \text{Id}^{\otimes l} \cdot \{1\}$ , а на ребре, уменьшающем количество окружностей, мы положим  $m \otimes \text{Id}^{\otimes l} \cdot \{1\}$ . Здесь отображения  $m: V \otimes V \rightarrow V$  и  $\Delta: V \rightarrow V \otimes V$  определяются по следующим правилам. Отображение  $m$ :

$$\begin{cases} v_+ \otimes v_- \mapsto v_-, & v_+ \otimes v_+ \mapsto v_+, \\ v_- \otimes v_+ \mapsto v_-, & v_- \otimes v_- \mapsto 0. \end{cases} \quad (3)$$

Отображение  $\Delta$ :

$$\begin{cases} v_+ \mapsto v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+, \\ v_- \mapsto v_- \otimes v_-. \end{cases} \quad (4)$$

Корректное определение полного дифференциала вида  $1 \rightarrow 1$  представляет собой главную трудность в общем случае; в случае  $\mathbb{Z}_2$  эта трудность легко преодолевается.

В случае перестройки типа  $1 \rightarrow 1$  мы определим частичный дифференциал на ребре как отображение, переводящее всё пространство, отвечающее вершине, в нуль. Таким образом, мы получили *куб перестроек*, в котором по сравнению с кубом состояний ещё дополнительно указано, как действуют дифференциалы. Обозначим получившийся куб через  $Q(L)$ . Для того чтобы дифференциал был определён корректно, куб должен быть *антикоммутативен*, т. е. для каждой двумерной грани куба композиция отображений, соответствующая одной паре последовательно идущих рёбер, равна минус композиции отображений, соответствующих другой паре рёбер. Отметим, что в данном случае (для поля  $\mathbb{Z}_2$ ) антикоммутативность равносильна коммутативности.

**Лемма 1.** Куб  $Q(L)$  коммутативен.

Это утверждение доказывается проверкой, аналогичной той, которую проделал Бар-Натан в [4]. Мы приведём лишь один пример такой проверки, самый интересный (рис. 4).

Здесь мы используем стандартное соглашение для скобки Кауфмана: при подходе к перекрёстку по нижней ветви при разведении типа  $A$  мы поворачиваем направо, а при разведении типа  $B$  — налево.

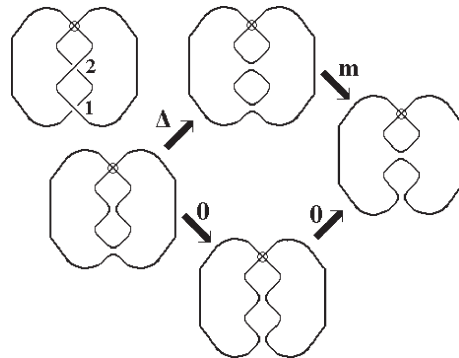


Рис. 4. Проверка коммутативности двумерной грани куба



Нужно проверить, что отображение  $m \circ \Delta: V \rightarrow V$  переводит всё пространство  $V$  в нуль. Действительно, при таком отображении  $v_- \mapsto v_- \otimes v_- \mapsto 0$ ,  $v_+ \mapsto v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+ \mapsto 2v_- = 0$  над полем  $\mathbb{Z}_2$ .

Отметим, что это — единственный существенный неклассический случай, в котором встречается перестройка типа  $1 \rightarrow 1$ . Действительно, из соображений чётности следует, что на каждой двумерной грани число таких перестроек чётно. Если их нет, то дело сводится к одному из классических случаев (все такие случаи были рассмотрены Бар-Натаном).

В случае, если таких перестроек две или четыре, то на двумерной грани рассматриваемого куба

$$\begin{array}{ccc} V^{\otimes a}\{1\} & \xrightarrow{s} & V^{\otimes b}\{2\} \\ r \uparrow & & \uparrow q \\ V^{\otimes c} & \xrightarrow{p} & V^{\otimes d}\{1\} \end{array} \quad (5)$$

либо каждая из композиций  $q \circ p$  и  $s \circ r$  содержит нулевое отображение, отвечающее переходу вида  $1 \rightarrow 1$  (например, в случае  $a = b$ ,  $c = d$  отображения  $p$  и  $s$  нулевые), либо имеет место случай, разобранный выше.

Положим  $\mathcal{C}(L) = Q'(|L|)\{n_+ - 2n_-\}[n_-]$ . В этом случае  $\mathcal{C}(L)$  является корректно определённым комплексом. Обозначим линейное пространство гомологий комплекса  $\mathcal{C}(L)$  через  $\text{Kh}(L)$  (или  $\text{Kh}_{\mathbb{Z}_2}(L)$  в случае, если нужно подчеркнуть, что комплекс Хованова рассматривается именно над полем  $\mathbb{Z}_2$ ).

**Теорема 1.**  $\text{Kh}(L)$  является инвариантом зацепления  $L$ . Градуированная эйлерова характеристика  $\chi(\text{Kh}(L))$  равна  $\hat{J}(L)$ .

**Доказательство.** Доказательство инвариантности гомологий Хованова относительно классических движений Рейдемейстера дословно повторяет доказательство, предложенное Бар-Натаном [4], для классических зацеплений: оно локальное и не обращает внимание на структуру куба перестроек, которая не относится к области, в которой мы применяем движение Рейдемейстера.

Для доказательства инвариантности в работе Бар-Натана используется так называемый «принцип сокращения», который состоит в следующем.

Пусть  $\mathcal{C}$  — (биградуированный) цепной комплекс, и пусть  $\mathcal{C}'$  — подкомплекс комплекса  $\mathcal{C}$ . Тогда:

- 1) если комплекс  $\mathcal{C}'$  ацикличен, то  $H(\mathcal{C}) = H(\mathcal{C}/\mathcal{C}')$ ;
- 2) если комплекс  $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$  ацикличен, то  $H(\mathcal{C}) = H(\mathcal{C}')$ .

Здесь  $H$  означает группу гомологий. Далее для каждого из движений Рейдемейстера кубы перестроек (диаграммы до применения движения Рейдемейстера и диаграммы после применения движения Рейдемейстера) разбиваются на подкубы, отвечающие разведениям в тех рёбрах, к которым относится то или иное движение Рейдемейстера. Так, например, в случае движения  $\Omega_3$  куб размерности  $n$  разбивается на восемь кубов, каждый из которых имеет размерность  $(n - 3)$ . Далее, используя принцип сокращения и локальный вид дифференциалов ( $\Delta$  и  $m$ ), мы сводим гомологии куба размерности  $n$  к более простому виду,

и оказывается, что этот более простой вид — один и тот же для диаграммы до применения движения Рейдемейстера и для диаграммы после применения движения Рейдемейстера.

При этом в доказательстве *нигде не используется глобальная информация о дифференциалах*, т. е. нигде не говорится, что некоторой стрелке в кубе отвечает дифференциал вида  $\Delta$  или  $m$ , если это не видно явно из картинке.

Поэтому те же рассуждения могут быть дословно применены к любым кубам (например, к таким, у которых имеются дифференциалы, относящиеся к перестройкам вида  $1 \rightarrow 1$ ).

Инвариантность относительно объезда очевидна по построению.

Второе утверждение теоремы следует из того факта, что эйлерова характеристика, определённая как альтернированная сумма (градуированных) размерностей групп гомологий, равна альтернированной сумме градуированных размерностей пространств цепей.  $\square$

Отметим, что комплекс  $\mathcal{C}(L)$  распадается в сумму двух комплексов: чётной градуировки и нечётной градуировки (напомним, что дифференциал сохраняет градуировку).

Мы получаем *два* типа гомологий Хованова: чётный  $\text{Kh}^e$  и нечётный  $\text{Kh}^o$ . Они соответствуют мономам полинома Джонса, имеющим степени, дающие остаток два при делении на четыре ( $\text{Kh}^e$ ), и мономам, степени которых делятся на четыре без остатка ( $\text{Kh}^o$ ). У классического зацепления встречаются гомологии только одного из этих двух типов, более точно, имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.** Для классического зацепления с чётным числом компонент имеет место  $\text{Kh}^o \cong 0$ , для классического зацепления с нечётным числом компонент  $\text{Kh}^e \cong 0$ .

Назовём *виртуализацией* локальное преобразование классического перекрёстка, изображённое на рис. 5. Отметим, что при виртуализации не меняется ни *куб состояний*, ни *куб перестроек*.

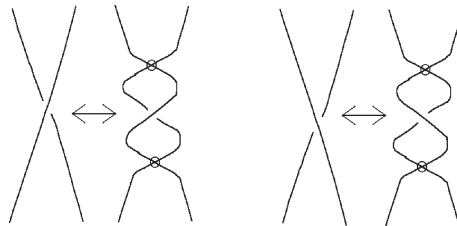


Рис. 5. Два варианта виртуализации

Отметим, что построенный нами комплекс Хованова с коэффициентами в поле  $\mathbb{Z}_2$  полностью определяется структурой куба перестроек и числами  $n_+$ ,  $n_-$ .

Таким образом, гомологии Хованова не меняются при виртуализациях исходной диаграммы.

В следующем разделе мы приведём другой подход к построению комплекса Хованова (для оснащённых зацеплений), который чувствителен к виртуализациям. Приведённый здесь комплекс Хованова в классическом случае совпадает с обычным комплексом Хованова с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$ ; в этом случае легко преодолевается трудность с перестройками вида  $1 \rightarrow 1$ . В двух следующих разделах мы будем строить комплекс Хованова не для всех виртуальных диаграмм, а лишь для «хороших» виртуальных диаграмм — тех, у которых на кубе не возникает перестроек (локальных дифференциалов) типа  $1 \rightarrow 1$ . Далее мы будем каждое виртуальное зацепление (диаграмму виртуального зацепления) сводить к хорошей диаграмме и смотреть, как преобразуются гомологии Хованова соответствующей хорошей диаграммы при применении обобщённых движений Рейдемейстера к изначальной диаграмме. Так, в следующем разделе будет построен комплекс Хованова для оснащённых зацеплений, где в качестве хорошей диаграммы будет выступать диаграмма удвоения.

#### 4. Комплекс Хованова удвоений узлов

В оставшейся части настоящей работы мы будем использовать конструкцию, связывающую атомы с виртуальными узлами.

Для произвольного атома  $V$  рассмотрим погружение (общего положения)  $p$  его остова в плоскость, сохраняющее  $A$ -структуру атома. Мы получим четырёхвалентный граф на плоскости с двумя типами вершин: образами вершин атома и «дефектами погружения» — пересечениями образов рёбер атома.

В первом случае мы расставим классические перекрёстки так же, как и в случае вложения остова высотного атома. А именно, пусть  $a, b$  — полурёбра, исходящие из вершины  $X$ , образующие чёрный угол согласно  $B$ -структуре атома. При проекции на плоскость окрестности вершины  $X$  обозначим через  $u$  то из полурёбер  $a, b$ , которое идёт раньше при обходе угла  $X, a, b$  по часовой стрелке. Полурёбро  $u$  и противоположное ему полурёбро выберем для прохода в перекрёстке  $X$ .

В точках пересечения образов различных рёбер мы расставим виртуальные перекрёстки. В итоге мы получим диаграмму  $L$  виртуального зацепления.

**Лемма 2.** *Виртуальное зацепления  $L$  определяется по атому с точностью до объезда и виртуализации некоторых классических перекрёстков.*

**Доказательство.** При погружении графа в плоскость учитывается только структура противоположных рёбер в каждом перекрёстке. Допустим, что в некоторой вершине  $A$  рассматриваемого атома сходятся четыре ребра  $p, q, r, s$ , причём ребро  $r$  противоположно ребру  $p$ , а ребро  $s$  противоположно ребру  $q$ . При погружении на плоскость циклический порядок рёбер (против часовой стрелки) может быть либо  $p, q, r, s$ , либо  $p, s, r, q$ . Легко видеть, что виртуальные

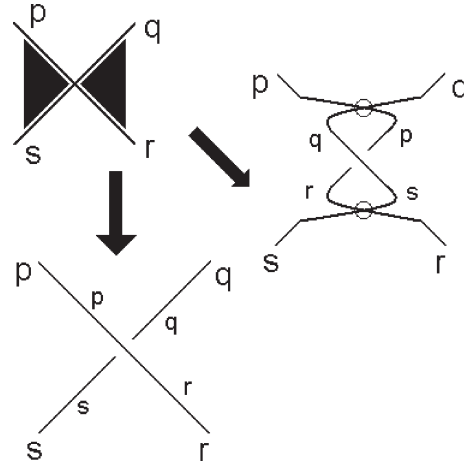


Рис. 6. Различные погружения остова атома и виртуализация

зацепления, соответствующие таким погружениям, отличаются друг от друга виртуализацией в соответствующем перекрёстке (и объездами) (рис. 6).  $\square$

Отметим следующую важную лемму.

**Лемма 3.** Пусть  $L, L'$  — две диаграммы, которым соответствуют ориентуемые атомы, при этом  $L'$  отличается от  $L$  применением объезда или одного из трёх классических движений Рейдемейстера. Тогда имеет место изоморфизм гомологий Хованова:  $\text{Kh}(L) \cong \text{Kh}(L')$ .

При объезде структура классических перекрёстков не меняется, таким образом, не меняется куб состояний, и следовательно, не меняется и весь комплекс. В случае *классических движений Рейдемейстера* имеется доказательство Бар-Натана инвариантности гомологий Хованова. Оно локальное, т. е. использует только локальную структуру движения Рейдемейстера (вне зависимости от того, как выглядит неподвижная часть зацепления). Следовательно, оно проходит и для виртуальных узлов.

Опишем основные детали доказательства леммы 3.

**Предложение 1.** Пусть  $L$  — произвольная диаграмма виртуального зацепления. Тогда атом, соответствующий удвоению  $D_2(L)$ , является ориентируемым.

Для доказательства нам понадобится ещё одно вспомогательное утверждение.

Пусть дан некоторый атом  $V$ . Предположим, что  $A$ -структура атома такова, что существует такая ориентация всех рёбер атома  $V$ , что в каждой вершине по два противоположных ребра являются исходящими, а два других — входящими. Назовём такую структуру структурой *источник-сток*.

**Предложение 2 ([3]).** Если остов атома допускает структуру источник-сток, то атом является ориентируемым.

Доказательство предложения 1 выводится из предложения 2 следующим образом. Пусть  $L$  — виртуальная диаграмма. Ориентируем диаграмму  $D_2(L)$  так, чтобы для каждой точки  $A$  на диаграмме зацепления репер  $(\partial L_A, \tau_A)$  задавал положительную ориентацию плоскости (рис. 7).

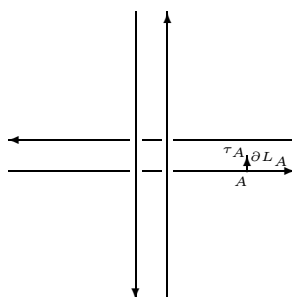


Рис. 7. Локальная ориентация для удвоенной диаграммы

Здесь  $\partial L$  — касательный вектор к зацеплению, а  $\tau_A$  — перпендикулярный вектору  $\partial L$  вектор от точки  $A$  к близкой точке на соседней компоненте.

Искомая структура источник-сток получается так: все рёбра (т. е. образы рёбер соответствующего атома) диаграммы  $D_2(L)$  делятся на «длинные» (которые происходят из рёбер диаграммы  $L$ ) и «короткие» (четыре коротких ребра соответствуют каждой вершине диаграммы  $L$ , см. рис. 7). Сменим ориентацию всех коротких рёбер, оставив ориентацию длинных неизменной. Полученная ориентация задаёт структуру источник-сток.

**Замечание 2.** Эта структура имеет ключевое значение в некоторых других задачах комбинаторной топологии (см. [2]).

Таким образом, комплекс Хованова для  $D_{2n}(L) = D_2(D_n(L))$  корректно определён над любым кольцом коэффициентов. Отображение  $L \mapsto D_{2n}(L)$  является инвариантным для оснащённых виртуальных зацеплений. По этой причине естественно ожидать, что гомологии комплекса Хованова для удвоенного узла являются инвариантами оснащённых зацеплений. Имеет место следующая лемма.

**Лемма 4.** Пусть  $L, L'$  — две диаграммы эквивалентных оснащённых виртуальных зацеплений. Тогда существует набор диаграмм  $D_2(L) = L_0, L_1, \dots, L_n = D_2(L')$ , такой что

- 1) все атомы, соответствующие диаграммам  $L_i$ , ориентируемы;
- 2) для каждого  $i = 0, \dots, n - 1$  диаграмма  $L_{i+1}$  получается из диаграммы  $L_i$  применением одного из обобщённых движений Рейдемейстера.

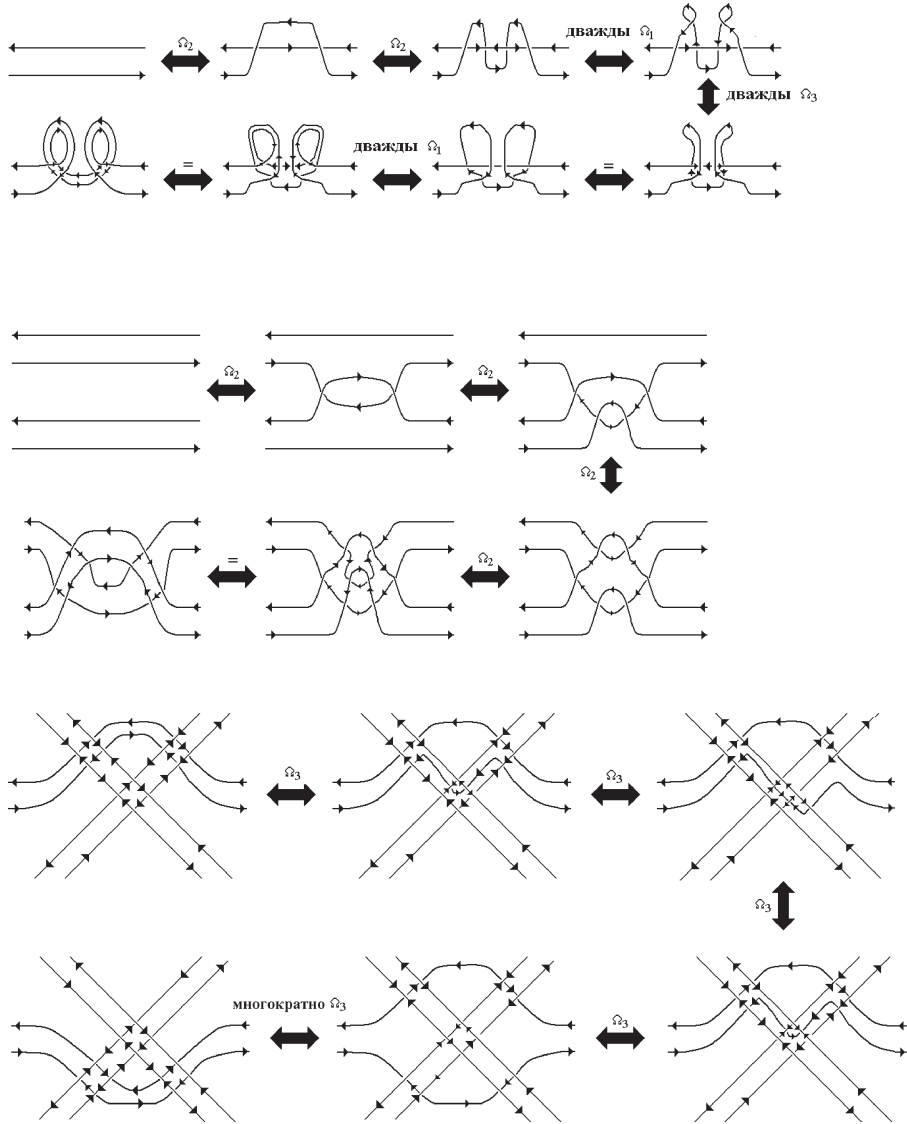


Рис. 8. Удвоенные движения Рейдемейстера

Доказательство леммы 4 схематично изображено на рис. 8.

**Теорема 3.** Пусть  $n$  — натуральное число. Тогда образ отображения  $L \mapsto \text{Kh}(D_{2n}(L))$  является инвариантом оснащённых виртуальных зацеплений.

**Доказательство.** Согласно предложению 1  $\mathcal{C}(D_{2n}(L))$  является корректно

определённым комплексом. Пусть теперь  $L, L'$  — две эквивалентные диаграммы оснащённых виртуальных зацеплений. Тогда в силу леммы 4 существует набор виртуальных диаграмм  $D_{2n}(L) = L_0, \dots, L_n = D_{2n}(L')$ , соответствующих ориентируемому атому, при этом  $L_{i+1}$  получается из  $L_i$  применением объезда либо одного из движений Рейдемейстера. Таким образом, в силу леммы 3 мы имеем  $\text{Kh}(D_{2n}(L)) = \text{Kh}(L_1) = \dots = \text{Kh}(D_{2n}(L'))$ . Теорема доказана.  $\square$

Отметим, что удвоение диаграммы  $L$  и удвоение диаграммы  $L'$ , полученной из  $L$  виртуализацией одного из перекрёстков диаграммы  $L$ , имеют различные кубы состояний. Так что построенный в этом разделе комплекс может а priori различать оснащённые виртуальные диаграммы, полученные друг из друга виртуализацией.

Однако построенный в этом разделе «удвоенный» комплекс Хованова существенно отличается от «обычного» комплекса Хованова классических узлов: как в классическом, так и в виртуальном случае нам нужно брать удвоение и после этого считать гомологии Хованова.

Естественным является вопрос о том, инвариантны ли «обычные» гомологии Хованова  $\text{Kh}(L)$  в случае диаграмм, которым отвечают ориентированные атомы. Положительный ответ на этот вопрос даётся в следующем разделе.

## 5. Атомы и комплекс Хованова двулистных накрытий

Основной целью этого раздела является доказательство следующей теоремы.

**Теорема 4.** Пусть  $\mathbf{F}$  — поле. Пусть  $L, L'$  — две эквивалентные виртуальные диаграммы, которым отвечают ориентируемые атомы. Тогда  $\text{Kh}_{\mathbf{F}}(L) = \text{Kh}_{\mathbf{F}}(L')$ .

Основная идея доказательства состоит в следующем. Для каждой виртуальной диаграммы  $L$  можно рассмотреть соответствующий ей атом  $V(L)$ . Далее будем использовать технику *ориентирующего накрытия*. А именно, если атом  $V(L)$  ориентируем, рассмотрим две копии атома  $V(L)$ , если нет, то рассмотрим атом  $\tilde{V}(L)$  — ориентирующее двулистное накрытие над атомом  $V(L)$ . Оно определяется как двулистное накрытие над соответствующей поверхностью, при этом прообразом остова является граф, который мы берём в качестве остова, прообразом чёрных клеток — пары чёрных клеток, а прообразом белых клеток — пары белых клеток. Полученный атом может быть либо двухкомпонентным, либо однокомпонентным в зависимости от того, является исходный атом ориентированным или нет.

Обозначим полученный атом через  $V^2(L)$ , а виртуальное зацепление, ему соответствующее, через  $K(V^2(L))$ .

Эту конструкцию можно трактовать так: мы рассматриваем два набора перекрёстков атома с  $A$ -структурой в них и соединяем перекрёстки рёбрами.

Таким образом, для каждого виртуального узла можно рассмотреть его «накрытую версию»:

$$L \rightarrow V(L) \rightarrow V^2(L) \rightarrow \text{Kh}_{\mathbf{F}}(K(V^2(L))). \quad (6)$$

Исходя из диаграмм узлов эта конструкция описывается так. Пусть дано виртуальное зацепление  $L$ , у которого имеется  $n$  классических перекрёстков  $X_1, \dots, X_n$ . Эти перекрёстки некоторым образом соединяются между собой. Таким образом, мы имеем граф  $\Gamma$ , погружённый в плоскость. У каждого из перекрёстков  $X_i$  имеется по четыре конца  $X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}, X_{i4}$ , перенумерованных, скажем, по часовой стрелке, при этом перекрёстки соединяются ветвями узла, которым соответствуют рёбра атома. Пусть ребро  $l_j$  соединяет концы  $X_{j_1 j_2}$  и  $X_{j_3 j_4}$ , где  $j_2, j_4 \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

Диаграмма  $K(V^2(L))$  строится следующим образом. Она содержит  $2n$  перекрёстков  $X'_1, \dots, X'_n, X''_1, \dots, X''_n$ , которые соединяются ветвями. У каждой ветви  $l_j$  исходной диаграммы появляются два образа:  $l_j^1$  и  $l_j^2$ . Каждое из двух рёбер  $l_j^i$  соединяет конец  $X'_{j_1 j_2}$  или  $X''_{j_1 j_2}$  с концом  $X'_{j_3 j_4}$  или  $X''_{j_3 j_4}$ . Для каждого ребра  $l_j^1$  нам нужно указать, какие именно концы оно соединяет ( $X'$  или  $X''$ ). Здесь имеется произвол в описании. Дело в том, что до того, как мы начали описывать рёбра, мы не имели естественного упорядочивания вершин: какая из вершин  $X'_i$  и  $X''_i$  «первая», а какая «вторая». Для преодоления этой трудности рассмотрим максимальное дерево  $\Delta$  в графе  $\Gamma$  и скажем, что все рёбра  $l_j^1$ , соответствующие рёбрам этого дерева, соединяют концы  $X'_{j_1 j_2}$  с  $X'_{j_3 j_4}$  (тем самым рёбра  $l_j^2$  соединяют концы  $X''_{j_1 j_2}$  и  $X''_{j_3 j_4}$ ). Выбор другого дерева будет соответствовать смене обозначений: в некоторых парах  $X'_j$  и  $X''_j$  поменяются местами. После этого правило соединения оставшихся концов рёбрами  $l_i^1$  и  $l_i^2$  таково. Мы опять позволим себе небольшой произвол: указывая, какие пары концов нужно соединить ребром  $l_i$ , мы не будем указывать, соединяем мы их ребром  $l_i^1$  или ребром  $l_i^2$ . Соответствующая им «симметричная» пара концов, получающаяся заменой  $X' \longleftrightarrow X''$ , будет также соединена ребром, при этом для диаграммы узла не важно, как эти два ребра обозначаются. Также мы не будем следить за тем, как именно на плоскости расположены рёбра  $l_i^\alpha$  — результирующий класс виртуального зацепления от этого зависеть не будет.

Итак, мы фиксировали максимальное дерево  $\Delta \subset \Gamma$ . Каждое ребро  $l_j$ , не принадлежащее этому дереву, задаёт минимальный цикл на подграфе  $\Delta \cup l_j \subset \Gamma$ . В случае, если этот цикл *хороший* (см. далее), соединим ребром  $l_j^1$  концы  $X'_{j_1 j_2}$  и  $X'_{j_3 j_4}$ , а ребром  $l_j^2$  концы  $X''_{j_1 j_2}$  и  $X''_{j_3 j_4}$ . В случае плохого цикла соединим ребром  $l_j^1$  концы  $X'_{j_1 j_2}$  и  $X''_{j_3 j_4}$ , а ребром  $l_j^2$  концы  $X''_{j_1 j_2}$  и  $X'_{j_3 j_4}$ . Понятия *хорошего* и *плохого* рёбер восходят к ориентирующим и неориентирующим циклам на атоме: хорошим называется ребро, соответствующее ориентируемому циклу. При накрытии атома ориентирующие циклы переходят в циклы, а неориентирующие — в незамкнутые пути (с некоторыми различными концами  $X'_k, X''_k$ ). Определим теперь понятие хорошего ребра (для рёбер, не входящих в  $\Delta$ ), а также понятие ориентирующего цикла, исходя из диаграммы виртуального



зацепления. Именно, цикл называется хорошим, если количество его трансверсальных проходов через классические перекрёстки — вершины атома — чётно.

Легко проверить, что такое определение хорошего цикла совпадает с определением ориентирующего цикла на атоме, заданного  $A$ -структурой: задавая последовательно ориентацию рёбер согласно правилу источник-сток, мы задаём ориентацию примыкающих к этим рёбрам чёрных клеток (локально), и если мы возвращаемся в исходное ребро с той же ориентацией, то это означает, что мы прошли по ориентирующему пути, а если с противоположной — то по неориентирующему.

Итак, мы определили понятие ориентирующего цикла и *хорошего* ребра (для рёбер, не входящих в дерево  $\Delta$ ). Следовательно, мы полностью построили диаграмму виртуального узла  $K(V^2(L))$ . Отметим, что это определение не зависит (с точностью до объезда) от выбора дерева  $\Delta$ .

Более того, по атому  $V^2(L)$  этот узел восстанавливается с точностью до виртуализаций (что, впрочем, не меняет гомологий Хованова). Мы указали явный способ построения диаграммы  $K(V^2(L))$  по диаграмме  $L$ ; он соответствует некоторому погружению остова атома  $V^2(L)$  (с сохранением  $A$ -структуры).

Легко видеть, что при применении объезда к исходной диаграмме зацепления  $L$  к  $K(V^2(L))$  также применяется некоторая комбинация объездов. Кроме того, имеет место следующая лемма.

**Лемма 5.** *При применении одного из классических движений Рейдемейстера к диаграмме  $L$  диаграмма  $K(V^2(L))$  будет изменяться следующим образом: к ней будет применяться то же самое движение Рейдемейстера в двух местах.*

**Доказательство.** Мы будем обозначать зацепления до и после применения движения Рейдемейстера через  $L, L'$ , остовы соответствующих атомов через  $\Gamma, \Gamma'$ , а соответствующие диаграммы накрытий — через  $\tilde{L}, \tilde{L}'$ .

Каждое движение Рейдемейстера представляет собой перестройку диаграммы узла внутри некоторой области; диаграмма  $L$  имеет некоторый вид  $P$ , а диаграмма  $L'$  — некоторый вид  $Q$ . При этом мы имеем некоторый набор «хвостиков»  $t_1, \dots, t_n$ , соединяющих поддиаграмму  $P$  (диаграммы  $L$ ) или поддиаграмму  $Q$  (диаграммы  $L'$ ) с оставшейся (неподвижной) частью диаграммы. В случае первого движения Рейдемейстера  $n$  равно двум, в случае второго — четырём, в случае третьего — шести. На диаграммах  $\tilde{L}$  и  $\tilde{L}'$  каждый хвостик  $t_i$  поднимается до двух хвостиков  $t'_i, t''_i$ . В случае, если поддиаграмма  $P$  или поддиаграмма  $Q$  не содержит неориентирующих циклов, на  $\tilde{L}$  мы получаем две копии поддиаграмм  $P$ , а на  $\tilde{L}'$  — две копии диаграммы  $Q$ . Суть теоремы состоит в том, что эти копии согласованным образом подсоединены к «хвостикам». Пример согласованного и несогласованного соединений приведён на рис. 9.

В согласованном случае все вершины  $t'_i, t''_i$  соединяются одинаковым способом в случае поднятия диаграммы  $L$  и в случае поднятия  $L'$ , а именно все  $t'_j$  соединяются между собой, а  $t''_k$  — между собой. В несогласованном случае на рис. 9 соединение при поднятии  $L$  такое же, как и в согласованном случае,

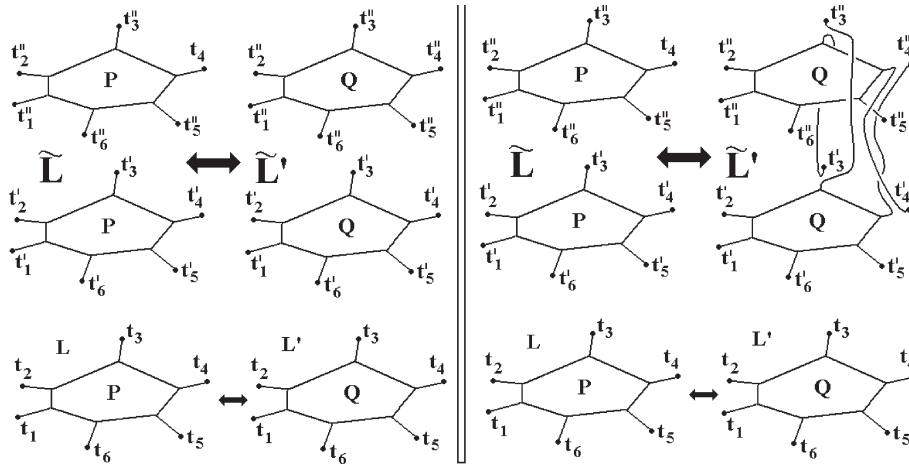


Рис. 9. Согласованное и несогласованное соединения

а соединение при поднятии  $L'$  другое: одна копия  $Q$  соединяется с хвостиками  $t'_1, t'_2, t''_3, t''_4, t'_5, t'_6$ , а вторая — с  $t''_1, t''_2, t'_3, t'_4, t''_5, t''_6$ . Нам нужно показать, что второй случай не имеет места.

В случае применения первого движения Рейдемейстера, добавляющего петлю, возникает петля, состоящая из одного ребра  $l_j$ , начальная (она же конечная) точка которого разбивает некоторое ребро  $l_k$ . Ребро  $l_j$ , рассмотренное как цикл, является хорошим. Кроме того, ребро  $l_k$  разбивается на два ребра  $l_{k_1}$  и  $l_{k_2}$ , которые не являются противоположными в вершине разбиения. Рассмотрим цикл  $s$  на графе  $\Gamma'$ , содержащий ребро  $l_k$ . Ему естественным образом соответствует цикл  $s'$ , содержащий  $l_{k_1}$  и  $l_{k_2}$  на графе  $\Gamma'$ . Если цикл  $s$  ориентируем, то ориентируем и цикл  $s'$ , и наоборот. Это следует из того, что если рёбра  $l_{k_1}$  и  $l_{k_2}$  не являются противоположными, следовательно, при определении цикла на них можно задать последовательную ориентацию, происходящую из ориентации ребра  $l_k$ . Поэтому если на диаграмме  $K(V^2(L))$  ребро  $l_k^1$  соединяет, скажем, концы  $X'_{pq}$  с  $X''_{rs}$ , то пара рёбер  $l_{k_1}^2, l_{k_2}^2$  будет соединять соответствующие им концы (с теми же обозначениями)  $X'_{pq}$  и  $X''_{rs}$ . Это и означает согласованность соединения. Каждое из оставшихся двух движений Рейдемейстера представляет собой перестройку некоторой области на плоскости; из этой области выходит несколько ветвей (в случае второго движения Рейдемейстера их четыре, а в случае третьего — шесть). Рассмотрим набор концов  $\{X_{ij}\}$  этих ветвей.

Рассмотрим сначала второе движение Рейдемейстера. В диаграмме  $L'$  имеется двуугольник  $cd$  и четыре исходящих ребра  $a, b, e, f$  (рис. 10).

Этот двуугольник является хорошим, поскольку как цикл он не имеет трансверсальных проходов через вершины. Таким образом, весь набор рёбер однозначно поднимается на диаграмму  $K(V^2(L'))$ . В итоге мы получим два набора

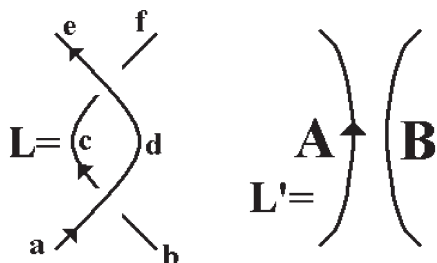


Рис. 10. Случай второго движения Рейдемейстера

ветвей  $a', b', c', d', e', f'$  и  $a'', b'', c'', d'', e''$ . Ветви  $c', d'$  образуют двуугольник, к которому можно применить уменьшающее движение Рейдемейстера. То же можно сказать и о двуугольнике  $c'', d''$ . Применяя к ним уменьшающие вторые движения Рейдемейстера, мы получим диаграмму  $K(V^2(L))$ . Для этого достаточно заметить, что после такого уменьшающего движения Рейдемейстера ребро  $a'$  соединится с ребром  $e'$ , а ребро  $b'$  — с ребром  $f'$  (при этом  $a''$  соединяется с  $e''$ , а  $b''$  — с  $f''$ ). Последнее вытекает из соображения, что любой цикл на  $L$ , проходящий последовательно через  $a, c, e$ , имеет столько же трансверсальных проходов через вершины, сколько и соответствующий ему цикл на  $L'$ , проходящий через ребро  $A$ .

В случае третьего движения Рейдемейстера как на диаграмме  $L$ , так и на диаграмме  $L'$  мы имеем по треугольнику и по шесть внешних ветвей.

Оба треугольника представляют собой хорошие циклы, так как не содержат трансверсальных проходов. Следовательно, соответствующие области  $P$  и  $Q$  поднимаются до двойных копий областей  $P$  и  $Q$ . Осталось проверить, что они поднимаются согласованно.

Для этого нужно показать, что любые два пути  $\gamma \in L$  и  $\gamma' \in L'$ , соединяющие концы  $t_i, t_j$ , «одинаково» поднимаются на  $L$  и  $L'$  соответственно. Например, если один из двух прообразов  $\tilde{\gamma}$  пути  $\gamma$  соединяет точки  $t'_i, t'_j$  и проходит внутри  $P$ , то у каждого пути  $\gamma'$ , имеющего те же концы, что и  $\gamma$ , один из прообразов  $\tilde{\gamma}'$  соединяет те же точки  $t'_i, t'_j$  (а не  $t'_i, t''_j$ ). На рис. 11 приведён пример двух таких путей.

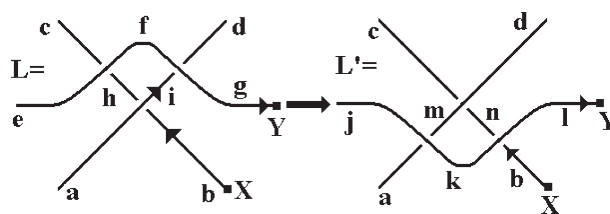


Рис. 11. Случай третьего движения Рейдемейстера

А именно, рассмотрим два пути между точками  $X$  и  $Y$  на диаграммах  $L$  и  $L'$ . Мы утверждаем, что они поднимаются одинаковым образом на  $\tilde{L}$  и  $\tilde{L}'$  соответственно. Это следует из того, что количество точек трансверсального прохождения на этих путях одинаково (равно нулю). Аналогично доказывается одинаковость поднятия любых двух путей на рис. 11 с одинаковыми концами.  $\square$

Следовательно, по лемме 3 гомологии Хованова «удвоенного узла» не меняются при применении движений Рейдемейстера к исходному. Отсюда получаем следующую теорему.

**Теорема 5.** *Отображение  $L \rightarrow \text{Kh}(K(V^2(L)))$  задаёт корректно определённый инвариант виртуальных зацеплений.*

**Замечание 3.** Отметим, что только второе движение Рейдемейстера  $\Omega_2$  может изменить тип соответствующего атома (т. е. превратить неориентируемый атом в ориентируемый и наоборот). Так, например, если мы имели ориентированный атом  $V(K)$  и две компоненты атома  $V^2(K)$ , то применение второго движения Рейдемейстера к  $K$  может «соединить» эти компоненты в одну (что соответствует тому, что после применения второго движения Рейдемейстера атом может перестать быть ориентируемым). При этом движения  $\Omega_1, \Omega_3$  оставляют ориентируемый атом ориентируемым.

Пусть теперь атом, соответствующий зацеплению  $L$ , ориентируем. Тогда  $K(V^2(L))$  состоит из двух копий атома  $L$ . Поскольку  $\mathbf{F}$  является полем, мы имеем  $\text{Kh}_{\mathbf{F}}(K(V^2(L))) = \text{Kh}_{\mathbf{F}}(L)^{\otimes 2}$ .

Следовательно, гомологии  $\text{Kh}(L)$  получаются из инвариантных гомологий  $\text{Kh}(K(V^2(L)))$  извлечением тензорного квадратного корня. В случае, когда кольцо коэффициентов является полем, мы имеем полином Пуанкаре  $\mathfrak{P}$  от двух переменных со всеми целыми неотрицательными коэффициентами. Из него нужно извлечь квадратный корень, т. е. найти такой полином (Лорана)  $\Omega$  с целыми неотрицательными коэффициентами (коэффициенты неотрицательны, поскольку являются рангами групп гомологий Хованова), что  $\Omega^2 = \mathfrak{P}$ . Очевидно, что если это и можно сделать, то единственным образом. Так как эта операция однозначна, если определена, мы получаем утверждение теоремы 4. Отсюда следует следующая теорема.

**Теорема 6.** *Пусть  $\mathbf{F}$  — поле и зацепление  $L$  таково, что  $\text{Kh}_{\mathbf{F}}(K(V^2(L)))$  не представимо в виде тензорного квадрата. Тогда  $L$  не имеет диаграммы, которой соответствовал бы ориентируемый атом. В частности, зацепление  $L$  не является классическим.*

Важным и интересным является вопрос, могут ли два неизотопных классических зацепления  $L, L'$  быть получены друг из друга последовательностью обобщённых движений Рейдемейстера и виртуализаций. Комплекс Хованова даёт частичный ответ на этот вопрос.

Из теоремы 4 и инвариантности гомологий Хованова относительно виртуализаций вытекает следующая теорема.

**Теорема 7.** Если классическое зацепление  $L'$  получается из классического зацепления  $L$  применением обобщённых движений Рейдемейстера и виртуализаций, то  $L$  и  $L'$  имеют одинаковые гомологии Хованова с коэффициентами в любом наперёд заданном поле.

## 6. Полином Хованова и фробениусовы расширения

В этом разделе мы опишем предложенное Ховановым обобщение его же конструкции. Для этого нам понадобится пара колец  $R, A$ , при этом  $R \subset A$  и  $A$  представляет собой модуль над  $R$ . В [12] показано, что кольцо  $A$  должно быть *фробениусовым расширением* кольца  $R$ . Мы не будем давать определения фробениусова расширения, используем лишь уже имеющийся явно описанный пример Хованова для построения инвариантов виртуальных узлов.

### 6.1. Описание конструкции Хованова фробениусовых расширений

Как было описано ранее в этой работе, стандартная теория гомологий Хованова строится над некоторым произвольным кольцом  $R$  (в качестве которого могут выступать, например, кольцо  $\mathbb{Z}$  или поля  $\mathbb{Q}$  или  $\mathbb{Z}_p$ ), при этом гомологии тривиального узла представляют собой градуированный двумерный модуль  $A$  над этим кольцом, порождённый векторами  $v_+$  и  $v_-$  градуировки  $+1$  и  $-1$  соответственно. Для этих векторов определены два отображения: «умножение»  $m$  и «коумножение»  $\Delta$ . При изменении градуировки  $\deg \mapsto 1 - \deg$  векторов (что потребует незначительных изменений в построении теории гомологий) можно положить  $\deg v_+ = 0$ ,  $\deg v_- = 2$ . Тогда элемент  $v_+$  можно считать единицей (обозначим его через  $1$ , а  $v_-$  обозначим через  $X$ ), а определённые ранее умножение и коумножение превратят модуль  $A$  в алгебру Хопфа над  $R$ , в которой умножение задаётся по правилу  $X^2 = 0$ , а коумножение имеет вид

$$\Delta(1) = 1 \otimes X + X \otimes 1, \quad \Delta(X) = X \otimes X.$$

В [12] М. Хованов поставил вопрос: какой должна быть пара линейных пространств  $(A, R)$ , чтобы, взяв  $R$  в качестве основного кольца коэффициентов, а  $A$  — некоторую алгебру Хопфа над кольцом  $R$  — в качестве кольца гомологий тривиального узла (основного строительного элемента), мы могли бы «точно так же» построить инвариантную теорию гомологий. Под «точно так же» имеется в виду, что мы рассматриваем куб перестроек, в каждую вершину его ставим тензорную степень пространства  $A$  (над  $R$ ), соответствующую количеству окружностей в данном состоянии, определяем частичные дифференциалы с помощью отображений умножения и коумножения, а затем ставим знаки на рёбрах куба и нормируем всю конструкцию сдвигами.

Хованов показал, что инвариантность относительно первого движения Рейдемейстера требует двумерности пространства  $A$  как  $R$ -модуля, и привёл необходимые и достаточные условия для того, чтобы существовала такая теория гомологий.

Хованов [12] доказал, что каждое такое решение получается с помощью некоторых операций (замена базиса, скручивание и двойственность) из следующего универсального решения:

- 1)  $R = \mathbb{Z}[h, t]$ ;
- 2)  $A = R[X]/(X^2 - hX - t = 0)$ ;
- 3)  $\deg X = 2, \deg h = 2, \deg t = 4$ ;
- 4)  $\Delta(1) = 1 \otimes X + X \otimes 1 - h1 \otimes 1$ ;
- 5)  $\Delta(X) = X \otimes X + t1 \otimes 1$ .

Как мы видим, умножение в алгебре  $A$  сохраняет градуировку, а коумножение повышает её на два.

Назовём эту конструкцию *универсальной  $(R, A)$ -конструкцией*. Соответствующие гомологии (классического ориентированного) зацепления  $L$  будем обозначать через  $\text{Kh}_U(L)$ .

При этом Хованов также доказал функториальность его новой теории гомологий; этот аспект мы затрагивать не будем.

Мы не будем описывать подробно смысл алгебраических операций для фробениусовых расширений ( $A$  над  $R$ ) — скручивания, замены базиса и сопряжения. Скажем лишь, что каждая из них приводит к теории, в которой гомологии зацепления восстанавливаются по гомологиям зацепления, подсчитанным в изначальном виде.

## 6.2. Геометрические обобщения посредством атомов

В этом разделе мы показываем, что конструкция Хованова работает в случае ориентированных атомов в явном виде, а также выписываем соответствующие алгебраические уравнения для случая произвольных виртуальных зацеплений.

Каждой диаграмме зацепления универсальная  $(R, A)$ -конструкция ставит в соответствие некоторый куб перестроек, гомологии которого после некоторого сдвига дают инвариант зацепления.

Из теории Хованова [11] следует, что существует *локальное* доказательство инвариантности гомологий универсальной  $(R, A)$ -конструкции, т. е. набор алгебраических действий (вроде принципа сокращения и коротких точных последовательностей алгебраических комплексов), который приводит к следующему.

Фиксируем классическое движение Рейдемейстера  $\Omega_i$ . Тогда каковы бы ни были две (классические) диаграммы  $L$  и  $L'$ , локально отличающиеся друг от друга движением  $\Omega_i$ , описанная выше последовательность алгебраических преобразований, переводящих  $\text{Kh}_U(L)$  в  $\text{Kh}_U(L')$  и не зависящих явным образом от видов частных дифференциалов комплексов Хованова зацеплений

$L$  и  $L'$ , относящихся к тем перекрёсткам диаграмм  $L$  и  $L'$ , которые не участвуют в данном движении  $\Omega_i$ .

Из этого соображения следует, что универсальная  $(R, A)$ -конструкция обобщается на ориентируемые виртуальные диаграммы — те виртуальные диаграммы, которым соответствуют ориентируемые атомы. А именно, если задана ориентируемая диаграмма  $L$ , мы можем построить соответствующий куб перестроек с дифференциалами, соответствующими операциям умножения и коумножения (со знаками), и вычислить гомологии. Далее, если две ориентируемые виртуальные диаграммы  $L, L'$  получаются друг из друга применением некоторого классического движения Рейдемейстера  $\Omega_i$ , то в силу описанного выше принципа имеет место изоморфизм градуированных колец гомологий  $\text{Kh}_U(L) \cong \text{Kh}_U(L')$ . Так как универсальная  $(R, A)$ -конструкция тавтологически инвариантна при движениях объезда (куб перестроек остаётся неизменным), верен следующий аналог леммы 3.

**Лемма 6.** Пусть  $L, L'$  — две диаграммы, которым соответствуют ориентируемые атомы, при этом  $L'$  отличается от  $L$  применением объезда или одного из трёх классических движений Рейдемейстера. Тогда  $\text{Kh}_U(L) = \text{Kh}_U(L')$ .

Из этого рассуждения, а также лемм 4, 5 вытекает, что универсальная  $(R, A)$ -конструкция работает для

- 1) построения теории гомологий Хованова  $\text{Kh}_U$  для оснащённых виртуальных зацеплений посредством взятия  $2k$  параллельных копий;
- 2) построения теории гомологий Хованова  $\text{Kh}_U$  для виртуальных узлов посредством взятия двулистных накрытий над соответствующими атомами.

Более точно, имеют место следующие две теоремы.

**Теорема 8.** Пусть  $n$  — натуральное число. Тогда образ отображения  $L \mapsto \text{Kh}_U(D_{2n}(L))$  является инвариантом оснащённых виртуальных зацеплений.

**Теорема 9.** Отображение  $L \rightarrow \text{Kh}_U(K(V^2(L)))$  является корректно определённым инвариантом зацеплений.

### 6.3. Алгебраические обобщения

Как было показано ранее, для неориентируемых виртуальных узлов явно применима  $\mathbb{Z}_2$ -теория гомологий Хованова для виртуальных узлов, в которой все частичные дифференциалы, соответствующие перестройкам типа  $1 \rightarrow 1$ , обращаются в нуль.

Рассмотрим теперь универсальную  $(R, A)$ -конструкцию и постараемся обобщить её на случай неориентируемых виртуальных узлов.

Отметим, что если мы каждому узлу поставим в соответствие *корректно определённый комплекс*, то гомологии этого комплекса будут автоматически инвариантны относительно классических движений Рейдемейстера (согласно изложенным выше принципам) и движения объезда (по определению).

Таким образом, мы свели нашу задачу к следующей: найти такой оператор  $\mathfrak{J}: A \rightarrow A$ , чтобы для каждой виртуальной диаграммы  $L$  куб перестроек был (анти)коммутативным.

Эта задача является чисто алгебраической. Действительно, для её проверки нужно рассмотреть всевозможные грани, которые могут возникнуть в кубе перестроек; число типов таких граней конечно. Для каждой из них нужно проверить некоторое конкретное алгебраическое условие на отображения  $\mathfrak{J}$ ,  $\Delta$  и  $m$ .

Зададим на пространстве  $A$  базис  $\{1, X\}$ , а на пространстве  $A \otimes A$  базис  $\{1 \otimes 1, 1 \otimes X, X \otimes 1, X \otimes X\}$ . Тогда в этом базисе  $\Delta$  и  $m$  будут иметь следующий вид:

$$\Delta = \begin{pmatrix} -h & t \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 1 & h \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Мы ищем матрицу

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \quad (8)$$

которая соответствовала бы перестройкам типа  $1 \rightarrow 1$ , обеспечивая при этом (анти)коммутативность куба перестроек.

Несложно доказывается следующая лемма.

**Лемма 7.** *Чтобы куб перестроек был антикоммутативным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$m \cdot \Delta = (\mathfrak{J})^2, \quad (9)$$

$$\Delta \cdot \mathfrak{J} = (\mathfrak{J} \otimes 1) \cdot \Delta = (1 \otimes \mathfrak{J}) \cdot \Delta, \quad (10)$$

$$\mathfrak{J} \cdot m = m \cdot (\mathfrak{J} \otimes 1) = m \cdot (1 \otimes \mathfrak{J}). \quad (11)$$

Первое уравнение нам уже встречалось в случае «обычных» гомологий Хованова. В случае универсальной  $(R, A)$ -теории мы имеем

$$m \cdot \Delta = \begin{pmatrix} -h & 2t \\ 2 & h \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Если мы хотим построить *градуированную* теорию, то нам нужно, чтобы матрица  $\mathfrak{J}$  повышала градуировку элементов на единицу. В этом случае  $\deg p = 1$ ,  $\deg q = 2$ ,  $\deg r = 0$ ,  $\deg s = 1$ , при этом возможно, что какие-либо из элементов  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $s$  равны нулю (в этом случае градуировка была бы не определена). Тогда из равенства  $(\mathfrak{J})^2 = m \cdot \Delta$  мы получаем  $\deg(2t) = 3$ , что приводит нас к противоречию, если  $2 \neq 0$ .

Таким образом (как и в случае обычных гомологий Хованова), для построения  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ -биградуированной теории будем использовать поле характеристики два.

Рассмотрим случай поля характеристики два. Оказывается, что в этом случае имеет место простое нетривиальное решение. А именно, в случае  $2 = 0$



матрица  $m \cdot \Delta$  превращается в диагональную матрицу вида

$$m \cdot \Delta = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Добавим к кольцу  $R$  новый элемент  $u = \sqrt{h}$ ,  $\deg u = 1$ . Положим

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Положим теперь  $R' = \mathbb{Z}_2[u, t]$ , при этом алгебра  $A$  приобретает вид  $A' = R'[x]/(X^2 - u^2X - t)$ , где  $\deg X = 2$ ,  $\deg t = 4$ . В этом случае матрица  $\mathfrak{J}$  является скалярной, и уравнения (10), (11) выполняются автоматически.

Таким образом, мы приходим к следующему заключению.

**Теорема 10.** *Пара алгебр  $(R', A')$  вместе с умножением  $M$ , отображением  $\Delta$ , заданному по правилу*

$$\Delta(1) = 1 \otimes X + X \otimes 1 - u^2 1 \otimes 1, \quad \Delta(X) = X \otimes X + t 1 \otimes 1,$$

*и скалярным отображением  $\mathfrak{J}$ , имеющим вид (14), задают инвариантную теорию гомологий для виртуальных зацеплений.*

## Литература

- [1] Мантуров В. О. Полином Хованова для виртуальных узлов // Докл. РАН. — 2004. — Т. 398, № 1. — С. 15–18.
- [2] Мантуров В. О. Доказательство гипотезы В. А. Васильева о планарности сингулярных зацеплений // Изв. РАН. Сер. мат. — 2005. — Т. 69, № 5. — С. 169–178.
- [3] Мантуров В. О. Теория узлов // Регулярная и хаотическая динамика. — М.; Ижевск: РХД, 2005.
- [4] Bar-Natan D. On Khovanov's categorification of the Jones polynomial // Algebr. Geom. Topol. — 2002. — Vol. 2, no. 16. — P. 337–370.
- [5] Bar-Natan D. Khovanov's homology for tangles and cobordisms. — 2004. — arXiv:math.GT/0410495.
- [6] Jacobsson M. An invariant of link cobordisms from Khovanov's homology theory. — 2002. — arXiv:math.GT/0206303.
- [7] Jones V. F. R. A polynomial invariant for links via Neumann algebras // Bull. Amer. Math. Soc. — 1985. — Vol. 129. — P. 103–112.
- [8] Kauffman L. H. State models and the Jones polynomial // Topology. — 1987. — Vol. 26. — P. 395–407.
- [9] Kauffman L. H. Virtual knot theory // European J. Combin. — 1999. — Vol. 20, no. 7. — P. 662–690.
- [10] Khovanov M. A categorification of the Jones polynomial // Duke Math. J. — 1997. — Vol. 101, no. 3. — P. 359–426.
- [11] Khovanov M. A functor-valued invariant of tangles. — 2001. — arXiv:math.QA/0103190.

- [12] Khovanov M. Link homology and Frobenius extensions. — 2004. — [arXiv:math.GT/0411447](https://arxiv.org/abs/math/0411447).
- [13] Manturov V. O. Kauffman-like polynomial and curves in 2-surfaces // J. Knot Theory Ramifications. — 2003. — Vol. 12, no. 8. — P. 1145—1153.