Отображения степени 1 зейфертовых многообразий на гомологическую сферу Пуанкаре

А. А. ПЕРФИЛЬЕВ
Челябинский государственный университет
e-mail: perf@csu.ac.ru

УДК 515.16

Ключевые слова: многообразия Зейферта, отображения степени 1.

Аннотация

Данная статья посвящена проблеме Легран—Вонга—Цишанга о минимальных (в смысле существования отображений степени 1) зейфертовых многообразиях. Основной результат — теорема о том, что множество возможных степеней отображений зейфертова многообразия с базой сфера или тор на многообразие с конечной фундаментальной группой зависит только от вычетов параметров особых слоёв зейфертова многообразия по некоторому модулю. На основании этой теоремы доказана минимальность некоторых зейфертовых многообразий.

Abstract

A. A. Perfilyev, Degree-one maps of Seifert manifolds into the Poincaré homology sphere, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 4, pp. 173—183.

This paper is devoted to the Legrand—Wang—Zieschang problem of minimal (in the sense of degree-one maps) Seifert manifolds. The main result is that the set of all possible map degrees from a Seifert manifold to a manifold with a finite fundamental group whose base is a sphere or a torus depends only on residues of parameters of exceptional fibers of the Seifert manifold. The minimality of some Seifert manifolds is proved by using this theorem.

1. Введение

Вопрос существования отображения степени 1 между двумя данными зейфертовыми многообразиями M и P был поставлен К. Легран, Ш. Вонгом, Х. Цишангом в [3] и решён ими для всех пар M, P, кроме случая, когда M есть зейфертово многообразие с базой сфера и тремя особыми слоями или с базой тор и одним особым слоем, а P — пространство додекаэдра S^3/I^* (гомологическая сфера Пуанкаре).

В данной работе теоретически доказан общий факт: множество возможных степеней отображений зейфертова многообразия с базой тор или сфера на многообразие с конечной фундаментальной группой (в том числе на гомологическую сферу Пуанкаре) зависит только от вычетов параметров особых слоёв зейфертова многообразия по некоторому модулю. Эта периодичность позволяет решать

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 4, с. 173—183.

проблему минимальных зейфертовых многообразий с помощью конечного перебора.

Автор выражает признательность своему научному руководителю С. В. Матвееву за ценные советы в ходе работы над статьёй.

1.1. Степень отображения

Пусть M и P — замкнутые связные ориентированные трёхмерные многообразия. Тогда любое отображение $f\colon M \to P$ индуцирует гомоморфизм групп гомологий $\varphi\colon H_3(M) \to H_3(P)$. Так как $H_1(M) \cong H_1(P) \cong \mathbb{Z}$, гомоморфизм φ есть умножение на целое число.

Определение 1. Степенью отображения f называется целое число $\deg f = \varphi(1)$.

Степень отображения является гомотопическим инвариантом отображения, т. е. степени гомотопных отображений равны. Степень также обладает мультипликативным свойством: степень суперпозиции отображений равна произведению их степеней, причём степень тождественного отображения всегда равна 1, а степень отображения в точку равна 0.

1.2. Минимальные зейфертовы многообразия

Х. Цишангом введено следующее отношение частичного порядка на множестве замкнутых ориентируемых трёхмерных многообразий. Пусть M и P — два таких многообразия. Будем говорить, что $M \geqslant P$, если существует отображение степени 1 из M в P.

Замечание 2. Любое замкнутое ориентируемое трёхмерное многообразие M допускает отображение степени 1 на себя и на сферу S^3, т. е. $M \geqslant M$ и $M \geqslant S^3$.

Определение 3. Зейфертово многообразие M называется *минимальным зейфертовым многообразием* (согласно определению Х. Цишанга), если оно допускает отображения степени 1 только на те зейфертовы многообразия, которые гомеоморфны M или S^3.

В [3] было перечислено множество зейфертовых многообразий, среди которых содержатся все минимальные зейфертовы многообразия, причём для всех многообразий из этого множества, кроме перечисленных в следующей теореме, была доказана минимальность.

Теорема 4 (К. Легран, Ш. Вонг, Х. Цишанг, 1997). *Многообразия следующих четырёх серий не допускают отображений степени 1 ни на какие другие зейфертовы многообразия, кроме себя, S^3 и, возможно, гомологической сферы Пуанкаре S^3/P_{120}:*

(d1) *зейфертовы многообразия*

$$M(T^2; (a, \pm 1)),$$

где a делится на 3, 4 или 5;

(d2) *зейфертовы многообразия*

$$M(S^2; (2^k\alpha_1; \beta_1); (2^k\alpha_2; \beta_2); (2^k\alpha_3; \beta_3)),$$

где $k \neq 1$, *все* a_i *нечётные*, $\alpha_1\alpha_2\beta_3 + \alpha_1\alpha_3\beta_2 + \alpha_2\alpha_3\beta_1 = \pm 1$ *и есть такая пара* i, j $(i \neq j)$, *что* $3 \mid \alpha_i$, $5 \mid \alpha_j$;

(d3) *зейфертовы многообразия*

$$M(S^2; (2\alpha_1; \beta_1); (2\alpha_2; \beta_2); (2\alpha_3; \beta_3))$$

с теми же ограничениями, что в (d2), *и следующим условием*: *если* $n > 1$ — *делитель числа* $2\alpha_i$, *то уравнение* $2x^2(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) \equiv \pm 1 \bmod 4n$ *не имеет решений в целых числах*;

(d4) *гомологические сферы*

$$M(S^2; (2\alpha_1; \beta_1); (3\alpha_2; \beta_2); (5\alpha_3; \beta_3)),$$

где $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \neq \pm 1 \bmod 120$ *и* $49\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \neq \pm 1 \bmod 120$.

Гипотеза 5. Многообразия серий (d1), (d2), (d3) и (d4) являются минимальными зейфертовыми многообразиями.

В 1999 году С. В. Матвеевым в ходе компьютерного эксперимента (см. [2]) была замечена периодическая зависимость между параметрами особых слоёв зейфертовых многообразий и множествами возможных степеней их отображений на сферу Пуанкаре. В [1] была впервые сформулирована теорема о периодичности и приведён набросок её доказательства. В настоящей работе мы докажем эту периодичность и тем самым сведём проверку гипотезы к конечному перебору.

2. Вычисление степени отображения

Пусть M — замкнутое ориентированное связное трёхмерное многообразие, снабжённое клеточным разбиением, в котором присутствует ровно одна вершина v, все клетки ориентированы, и пусть $p\colon \tilde{M} \to M$ — универсальное накрытие. Накрытие p индуцирует клеточное разбиение многообразия $\tilde{M}$, в котором клетками являются компоненты связности прообразов клеток многообразия M. Таким образом, каждой клетке многообразия M соответствует столько клеток в накрывающем пространстве $\tilde{M}$, каков порядок фундаментальной группы $\pi_1(M)$, причём имеет место изоморфизм групп цепей

$$C_*(\tilde{M}; \mathbb{Z}) \cong C_*(M; \mathbb{Z}[\pi_1(M)]).$$

В дальнейшем мы не будем различать клетки и соответствующие им элементы геометрических копредставлений. Клетки же накрывающего многообразия будем обозначать следующим образом: ga_i — прообраз ребра a_i, соответствующий элементу g фундаментальной группы; gR_i — прообраз клетки R_i, соответствующий элементу g фундаментальной группы.

2.1. Определения основных понятий

С. В. Матвеевым был разработан алгоритм вычисления степени отображения одного замкнутого трёхмерного многообразия на другое, использующий следующие понятия: *граничный цикл*, *характеристическая коцепь*, *индуцированное отображение цепей*.

2.1.1. Граничный цикл

Пусть M — замкнутое ориентированное связное трёхмерное многообразие, в клеточном разбиении которого присутствует ровно одна вершина, и пусть $p\colon \tilde{M} \to M$ — универсальное накрытие. Как уже было сказано, накрытие p индуцирует клеточное разбиение многообразия $\tilde{M}$, в котором клетками являются компоненты связности прообразов клеток многообразия M. Пусть $B \subset M$ — трёхмерная клетка многообразия M, тогда её граничным циклом $\partial\tilde{B} \in C_2(\tilde{M};\mathbb{Z})$ называется граница одного из её прообразов $\tilde{B} \subset \tilde{M}$.

Замечание 6. Граничный цикл трёхмерной клетки вычисляется неоднозначно с точностью до умножения слева на любой элемент фундаментальной группы, так как позволяется выбрать любой прообраз клетки в накрывающем пространстве.

Определение 7. Граничным циклом $\partial\tilde{\beta}_M \in C_2(\tilde{M};\mathbb{Z})$ многообразия M называется сумма граничных циклов всех его трёхмерных клеток, взятых с коэффициентом 1, если ориентация клетки совпадает с ориентацией многообразия M, и с коэффициентом -1 в противном случае.

2.1.2. Характеристическая коцепь

Определение 8. Пусть в клеточном разбиении многообразия M есть ровно одна трёхмерная клетка. Характеристическая коцепь

$$\xi_M\colon C^2(\tilde{M};\mathbb{Z}_n) \to \mathbb{Z}_n$$

есть линейный функционал, принимающий значение 1 на каждом граничном цикле $\partial\tilde{\beta}_M$. Другими словами, ξ_M — такая коцепь, что её кограница $\delta\xi_M$ равна 1 на каждой 3-клетке.

2.1.3. Индуцированное отображение цепей

Отображение двумерных цепей, индуцированное отображением f, — это гомоморфизм модулей

$$\tilde{f}_*\colon C_2(M;\mathbb{Z}[\pi_1(M)]) \to C_2(P;\mathbb{Z}[\pi_1(P)]).$$

(Естественно, отображение f должно быть клеточным.) Он может быть описан как отображение цепей, индуцированное отображением f и переводящее $C_2(\tilde{M};\mathbb{Z}) = C_2(M;\mathbb{Z}[\pi_1(M)])$ в $C_2(\tilde{P};\mathbb{Z}) = C_2(P;\mathbb{Z}[\pi_1(P)])$.

В силу линейности индуцированное отображения цепей задаётся образами всех 2-клеток многообразия M по отображению f.

2.2. Вычисление степени отображения

Пусть $f_*\colon \pi_1(M) \to \pi_1(P)$ — гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный отображением $f\colon M \to P$. Тогда степень отображения f, взятая по модулю n, где $n = |\pi_1(P)|$, зависит только от f_*. В то же время любое отображение можно изменить внутри некоторого шара так, что степень отображения изменится на $\pm n$, поэтому в дальнейшем нас будет интересовать не сама степень, а её остаток от деления на n.

Пусть $f\colon M \to P$ — клеточное отображение между двумя замкнутыми трёхмерными многообразиями, причём фундаментальная группа $\pi_1(P)$ конечна и имеет порядок n.

Следующая формула для вычисления степени такого отображения была доказана в работе [2].

Теорема 9. *Степень отображения $f\colon M \to P$ можно вычислить по формуле*

$$\deg f \equiv \xi_P(\tilde{f}_*(\partial\tilde{\beta}_M)) \bmod n.$$

Доказательство. Если представить $\tilde{f}_*(\partial\tilde{\beta}_M)$ в виде суммы граничных циклов многообразия P, то количество слагаемых (с учётом знака) будет степенью отображения f. Предположим теперь, что на группе двумерных цепей $C_2(\tilde{P})$ задан такой линейный функционал $\xi_P\colon C_2(\tilde{P}) \to \mathbb{Z}_n$, что на любом граничном цикле в $\tilde{P}$ он принимает значение 1. Тогда (в силу его линейности) его значение на цепи $\tilde{f}_*(\partial\tilde{\beta}_M)$ и будет этим числом слагаемых, т. е. степенью отображения.

3. Алгоритм вычисления степени отображения

3.1. Граничный цикл зейфертова многообразия

Для вычисления граничного цикла зейфертова многообразия сначала рассмотрим клеточный комплекс, реализующий копредставление $\langle a, t \mid R_1, R_2\rangle$. Здесь $R_1 = at^{-1}a^{-1}t$, $R_2 = w_{\alpha,\beta}(a,t)$, где α и β — пара взаимно простых чисел ($a \geqslant 0$), а $w_{\alpha,\beta}(a,t)$ — слово в образующих a и t, реализующее кривую на торе, образованном клеткой R_1, проходящую α раз вдоль ребра a и β раз вдоль ребра t. В общем случае мы не можем сказать, что $w_{\alpha,\beta}(a,t) = a^\alpha t^\beta$, так как копредставление может оказаться негеометрическим.

Для вычисления слова $w_{\alpha,\beta}$ можно использовать следующее рекурсивное правило:

$$w_{1,0}(a,t) = a, \quad w_{0,\pm1}(a,t) = t^{\pm1},$$
$$w_{\alpha+\beta,\beta}(a,t) = w_{\alpha,\beta}(a,at),$$
$$w_{\alpha,\alpha+\beta}(a,t) = w_{\alpha,\beta}(at,t).$$

В [2] была доказана следующая лемма.

Лемма 10. *Пусть K — клеточный комплекс, реализующий копредставление*

$$\langle a, t \mid R_1, R_2 \rangle,$$

где

$$R_1 = at^{-1}a^{-1}t, \quad R_2 = w_{\alpha,\beta}(a, t).$$

Пусть M — полноторие, полученное приклеиванием трёхмерной клетки B к комплексу K. Тогда

$$\partial\tilde{\beta}_M = -R_1 + (1 - (a^x t^y)^{-1})R_2,$$

где $\alpha y - \beta x = 1$.

Мы будем считать, что зейфертово многообразие M с базой сфера и тремя особыми слоями разбито на клетки в соответствии с геометрическим копредставлением

$$\pi_1(M) \cong \langle a_1, a_2, a_3, t \mid R_j,\ 1 \leqslant j \leqslant 7 \rangle,$$

где

$$R_{2i-1} = a_i t^{-1} a_i^{-1} t, \quad R_{2i} = w_{\alpha_i,\beta_i}(a, t), \quad i = 1, 2, 3, \quad R_7 = a_1 a_2 a_3.$$

В таком разбиении присутствуют одна вершина и четыре трёхмерные клетки, три из которых соответствуют окрестностям особых слоёв и устроены так же, как клетка B в лемме 10, а одна соответствует окрестности регулярного слоя. Образующая t соответствует регулярному слою.

В [2] была построена следующая формула для вычисления граничного цикла.

Теорема 11. *Пусть M — зейфертово многообразие над базой сфера,*

$$M = M(S^2; (\alpha_1, \beta_1); (\alpha_2, \beta_2); (\alpha_3, \beta_3)).$$

Тогда его граничный цикл вычисляется по формуле

$$\partial\tilde{\beta}_M = \sum_{i=1}^{3}(-R_{2i-1} + (a_i^{x_i} t^{y_i} - 1)R_{2i}) + (R_1 + a_1 R_3 + a_1 a_2 R_5 - (1 - t^{-1})R_7).$$

(*Целые числа x_i и y_i таковы, что $\alpha_i y_i - \beta_i x_i = -1$.*)

Доказательство. Граничный цикл многообразия M есть, по определению, сумма граничных циклов его трёхмерных клеток. Первые три слагаемых — это граничные циклы клеток, соответствующих окрестностям особых слоёв, вычисленные в соответствии с леммой 10. Четвёртое слагаемое — граничный цикл клетки, соответствующей окрестности регулярного слоя.

Рассмотрим теперь зейфертово многообразие над базой тор с одним особым слоем:

$$M = M(T^2; (\alpha, \beta)).$$

Клеточное разбиение, которое мы будем использовать, соответствует копредставлению

$$\langle a, t, u, h \mid R_j,\ 1 \leqslant j \leqslant 5 \rangle,$$

где

$$R_1 = at^{-1}a^{-1}t, \quad R_2 = w_{\alpha,\beta}(a,t),$$
$$R_3 = ht^{-1}h^{-1}t, \quad R_4 = ut^{-1}u^{-1}t, \quad R_5 = hu^{-1}h^{-1}ua.$$

В таком разбиении присутствует одна вершина и две трёхмерные клетки, одна из которых соответствует окрестности особого слоя, а другая окрестности регулярного: $(T^2 - D^2) \times S^1$.

Теорема 12. *Пусть M — зейфертово многообразие над базой тор с одним особым слоем*:

$$M = M(T^2; (\alpha, \beta)).$$

Тогда его граничный цикл вычисляется по формуле

$$\partial\tilde{\beta}_M = (-R_1 + (a^x t^y - 1)R_2) + (R_1 + (1-u^{-1})R_3 + (1-h^{-1})R_4 - (1-t^{-1})R_5).$$

(*Целые числа x и y таковы, что $\alpha y - \beta x = -1$.*)

Доказательство. Теорема доказывается аналогично предыдущей, первое слагаемое граничного цикла получается по лемме 10, а второе — граничный цикл клетки, соответствующей окрестности регулярного слоя.

3.2. Вычисление индуцированного отображения двумерных цепей

Пусть $\langle a_1, \ldots, a_r \mid R_1, \ldots, R_q \rangle$ и $\langle b_1, \ldots, b_s \mid Q_1, \ldots, Q_s \rangle$ — геометрические представления фундаментальных групп $\pi_1(M)$ и $\pi_1(P)$ соответственно. Предположим, что гомоморфизм $f_* \colon \pi_1(M) \to \pi_1(P)$ задан набором слов h_i в образующих b_j, представляющих элементы $f_*(a_i)$ группы $\pi_1(P)$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Пусть R — одно из соотношений R_i. Чтобы вычислить образ $f_*(R) \in C_2(P, \mathbb{Z}[\pi_1(P)])$ соответствующей 2-клетки, можно воспользоваться следующим алгоритмом.

1. Заменим в R все a_i на h_i и a_i^{-1} на h_i^{-1}. Получим некоторое слово w над образующими b_j, представляющее нейтральный элемент.
2. Представим w в виде
$$w = \prod_k v_k Q_{i_k}^{\varepsilon_k} v_k^{-1},$$
где $\varepsilon_k = \pm 1$, v_k — слова в образующих b_j.
3. $f_*(R)$ получим в виде «логарифма»
$$\log(w) = \sum_k \varepsilon_k \bar{v}_k Q_{i_k},$$
где $\bar{v}_k$ — образ элемента v_k в группе $\pi_1(P)$.

Второй шаг алгоритма, вообще говоря, неоднозначен, так как слово w можно представить в виде указанного произведения разными способами.

4. Периодичность степеней отображений

Пусть M и P — два многообразия. Обозначим через $D(M,P)$ множество степеней всех непрерывных отображений из M в P.

Теорема 13. *Пусть P — замкнутое связное ориентируемое многообразие, причём $|\pi_1(P)| = n$. Пусть зейфертовы многообразия*

$M = M(S^2; (\alpha_1, \beta_1); (\alpha_2, \beta_2); (\alpha_3, \beta_3))$ *и* $M' = M'(S^2; (\alpha'_1, \beta'_1); (\alpha'_2, \beta'_2); (\alpha'_3, \beta'_3))$

таковы, что $\alpha'_i \equiv \alpha_i \bmod T$, $\beta'_i \equiv \beta_i \bmod T$. Здесь $T = nn'$, n' — наименьшее общее кратное порядков всех элементов группы $\pi_1(P)$. Тогда $D(M', P) = D(M, P)$.

Доказательство. Без ограничения общности можно предположить, что при $i \neq 1$ параметры α'_i, β'_i и α_i, β_i совпадают. Достаточно доказать, что для любого отображения $f\colon M \to P$ найдётся такое отображение $f'\colon M' \to P$, что $\deg f \equiv \deg f' \bmod n$. Воспользуемся геометрическим копредставлением

$$\pi_1(M) = \langle a_1, a_2, a_3, t \mid R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7 \rangle,$$

выписанным по стандартной клеточной структуре на M, как это описано в пункте 3.1. Соотношения этого задания имеют вид

$$R_{2i-1} = a_i t^{-1} a_i^{-1} t, \quad R_{2i} = w_{\alpha_i \beta_i}(a_i, t), \quad i = 1, 2, 3, \quad R_7 = a_1 a_2 a_3.$$

При сделанном предположении геометрическое задание группы $\pi_1(M')$ отличается только одним соотношением:

$$\pi_1(M') = \langle a_1, a_2, a_3, t \mid R_1, R'_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7 \rangle,$$

где

$$R'_2 = w_{\alpha'_i \beta'_i}(a_i, t).$$

Пусть $f\colon M \to P$ — данное отображение. Зададим гомоморфизм

$$\varphi'\colon \pi_1(M') \to \pi_1(P)$$

правилом $\varphi'(a_i) = f_*(a_i)$, $\varphi'(t) = f_*(t)$. Проверка того, что это правило действительно задаёт гомоморфизм, не вызывает затруднений. Действительно, так как $w^T = 1$ для любого элемента $w \in \pi_1(P)$, то $f'_*(R'_2) = f'_*(a_1^{\alpha'_1} t^{\beta'_1}) = f_*(a_1^{\alpha_1} t^{\beta_1}) = 1$. Построим такое отображение $f'\colon M' \to P$, что $f'_* = \varphi'$. Как следует из теоремы 9, для доказательства сравнения $\deg f \equiv \deg f' \bmod n$ достаточно доказать, что $\tilde{f}'_*(\partial\tilde{\beta}_{M'}) \equiv \tilde{f}_*(\partial\tilde{\beta}_M) \bmod n$. При этом сравнимость цепей $\tilde{f}'_*(\partial\tilde{\beta}_{M'}), \tilde{f}_*(\partial\tilde{\beta}_M) \in C_2(P; \mathbb{Z}[\pi_1(P)])$ по модулю n понимается как сравнимость по модулю n их всех соответствующих коэффициентов. Доказательство удобно провести в два шага.

Шаг 1. По теореме 11 цепь $\partial\tilde{\beta}_M$ имеет вид

$$\sum_{i=1}^{3} (-R_{2i-1} + (a_i^{x_i} t^{y_i} - 1) R_{2i}) + (R_1 + a_1 R_3 + a_1 a_2 R_5 - (1 - t^{-1}) R_7),$$

где числа x_i, y_i таковы, что $\alpha_i y_i - \beta_i x_i = -1$, а R_i есть образующие модуля $C_2(M, \mathbb{Z}[\pi_1(M)])$, отвечающие соотношениям R_i. Заметим, что наши задания групп $\pi_1(M)$ и $\pi_1(M')$ отличаются только вторым соотношением и цепь $\partial\tilde{\beta}_{M'}$ имеет аналогичный вид. Поэтому

$$\tilde{f}'_*(\partial\tilde{\beta}_{M'}) - \tilde{f}_*(\partial\tilde{\beta}_M) = (f'_*(a_i^{x'_1} t^{y'_1}) - 1)\tilde{f}'_*(R'_2) - (f_*(a_i^{x_1} t^{y_1}) - 1)\tilde{f}_*(R_2) = \\ = (z-1)(\tilde{f}'_*(R'_2) - \tilde{f}_*(R_2)),$$

где x'_1, y'_1 — любые числа, удовлетворяющие уравнению $\alpha'_i y'_i - \beta'_i x'_i = -1$, и $z = f_*(a_1^{x_1} t^{y_1})$. Мы воспользовались тем, что $f'_*(a_1^{x'_1} t^{y'_1}) = f_*(a_1^{x_1} t^{y_1})$, так как $\alpha'_1 \equiv \alpha_1 \bmod T$, $\beta'_1 \equiv \beta_1 \bmod T$ и в группе $\pi_1(P)$ любой элемент в степени T равен 1.

Шаг 2. Докажем, что $\tilde{f}'_*(R'_2) \equiv \tilde{f}_*(R_2) \bmod n$. Чтобы вычислить $\tilde{f}_*(R_2)$, нужно сделать следующее (см. пункт 3.2).

1. Поставить в соответствие образующим a_i и t групп $\pi_1(M)$ и $\pi_1(M')$ какие-нибудь слова h_i и h в образующих группы $\pi_1(P)$, реализующие элементы $f_*(a_i), f_*(t)$.
2. Заменить каждую образующую a_i или t в слове R_2 на соответствующее слово h_i или h.
3. Представить полученное слово w в виде произведения сопряжений соотношений и их обратных:
$$w = \prod_k v_k Q_{i_k}^{\varepsilon_k} v_k^{-1},$$
где $\varepsilon_k = \pm 1$ и v_k — слова в образующих группы $\pi_1(P)$.
4. Тогда образ $\tilde{f}_*(R_2) \in C_2(P; \mathbb{Z}[\pi_1(P)])$ получается «взятием логарифма»: $f_*(R_2) = \log(w)$, где
$$\log(w) = \sum_k \varepsilon_k \bar{v}_k Q_{i_k}$$
и через $\bar{v}_k$ обозначен образ слова v_k в $\pi_1(P)$.

Выполним эти действия. Пусть слово h_z реализует элемент z, построенный в шаге 1. Поставим в соответствие образующим a_1, t слова $h_z^{-\beta_1}$, $h_z^{\alpha_1}$ соответственно. Тогда

$$\tilde{f}_*(R_2) = \log(w_{\alpha_1,\beta_1}(h_z^{-\beta_1}, h_z^{\alpha_1})) = \log(h_z^{-\beta_1\alpha_1+\beta_1\alpha_1}) = \log(1) = 0.$$

Образ соотношения R'_2 группы $\pi_1(M')$ находится аналогичным образом:

$$\tilde{f}'_*(R'_2) = \log(w_{\alpha'_1,\beta'_1}(h_z^{-\beta_1}, h_z^{\alpha_1})) = \log(h_z^{-\beta_1\alpha'_1+\alpha_1\beta'_1}) = \log(h_z^{kT}),$$

поскольку из условий $\alpha'_1 \equiv \alpha_1 \bmod T$, $\beta'_1 \equiv \beta_1 \bmod T$ следует, что $-\beta_1\alpha'_1 + \alpha_1\beta'_1 = kT$ для некоторого целого числа k.

Докажем, что последний логарифм сравним с нулём по модулю n.

Заметим, что $T = nn'$ и логарифм $\log(h_z^{kn'})$ определён, поскольку в группе $\pi_1(P)$ любой элемент в степени n' равен 1. Поэтому $\log(h_z^{kT}) = n\log(h_z^{kn'})$.

Таким образом, согласно шагам 1 и 2 получаем $\tilde{f}_*(\partial\tilde{\beta}_M) - \tilde{f}'_*(\partial\tilde{\beta}_{M'}) \equiv 0 \bmod n$.

Теорема 14. *Пусть P — замкнутое связное ориентируемое многообразие, причём $|\pi_1(P)| = n$. Пусть*

$$M = M(T^2; (\alpha, \beta)) \quad \text{и} \quad M' = M'(T^2; (\alpha + kT, \beta + lT)) \text{ —}$$

многообразия Зейферта. Здесь $T = nn'$, n' — наименьшее общее кратное порядков всех элементов группы $\pi_1(P)$. Тогда $D(M', P) = D(M, P)$.

Доказательство с небольшими изменениями повторяет доказательство предыдущей теоремы. По теореме 12 граничный цикл многообразия M имеет вид

$$\partial\tilde{\beta}_M = (-R_1 + (a^x t^y - 1)R_2) + (R_1 + (1 - u^{-1})R_3 + (1 - h^{-1})R_4 - (1 - t^{-1})R_5),$$

где

$$R_1 = at^{-1}a^{-1}t, \quad R_2 = w_{\alpha,\beta}(a, t),$$
$$R_3 = ht^{-1}h^{-1}t, \quad R_4 = ut^{-1}u^{-1}t, \quad R_5 = hu^{-1}h^{-1}ua.$$

Пусть отображение $f\colon M \to T$ индуцирует гомоморфизм фундаментальных групп $f_*\colon \pi_1(M) \to \pi_1(P)$. Для доказательства теоремы мы построим аналогичное отображение $f'\colon M' \to P$, такое что $\deg f' \equiv \deg f \bmod n$. Это отображение мы зададим гомоморфизмом $f'_*\colon \pi_1(M) \to \pi_1(P)$, таким что $f'_*(a) = f_*(a)$, $f'_*(t) = f_*(t)$, $f'_*(h) = f_*(h)$, $f'_*(u) = f_*(u)$. (Легко проверить, что f'_* действительно гомоморфизм.)

Геометрическое копредставление группы

$$\pi_1(M') \cong \langle a, t, u, h \mid R_1, R'_2, R_3, R_4, R_5\rangle$$

отличается от копредставления группы $\pi_1(M)$ только одним соотношением R'_2, и мы можем показать, точно как в доказательстве предыдущей теоремы, что $\tilde{f}'_*(R'_2) \equiv \tilde{f}_*(R_2) \bmod n$ и, следовательно, $\xi_P(\tilde{f}'_*(\partial\tilde{\beta}_{M'})) \equiv \xi_P(\tilde{f}_*(\partial\tilde{\beta}_M)) \bmod n$, что по теореме 9 означает сравнимость степеней отображений f' и f по модулю n.

5. Минимальность зейфертовых многообразий

Среди четырёх проблемных для гипотезы Цишанга—Вонга—Легран серий многообразий три — это зейфертовы многообразия над базой сфера с тремя особыми слоями и одна — над базой тор с одним особым слоем. Для решения вопроса о минимальности каждого из этих многообразий необходимо проверить, содержит ли единицу множество его возможных отображений на сферу Пуанкаре S^3/P_{120}. По теоремам 13 и 14 это множество зависит только от вычетов параметров его особых слоёв по модулю nn', где $n = 120$ — это порядок группы P_{120}, а $n' = 60$ — её период, т. е. наименьшее общее кратное порядков всех её элементов. Это означает, что для проверки минимальности многообразий серий (d1), (d2), (d3) и (d4) необходимо проверить существование отображения степени 1 на сферу Пуанкаре для конечного числа многообразий, реализующих все возможные вычеты параметров особых слоёв по модулю $120 \times 60 = 7200$.

Следующие факты доказаны с помощью конечного компьютерного перебора, опирающегося на описанный выше алгоритм вычисления степени отображения и на теорему 13.

Утверждение 15. *Среди зейфертовых многообразий вида*

$$M(S^2; (2\alpha_1; \beta_1); (3\alpha_2; \beta_2); (5\alpha_3; \beta_3)),$$

где все β_i *нечётные и* $\text{НОД}(a_1a_2a_3, 30) = 1$, *отображение степени один на сферу Пуанкаре допускают только те, для которых* $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \pm 1 \bmod 120$ *или* $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \pm 49 \bmod 120$.

Утверждение 16. *Все отображения зейфертовых многообразий вида*

$$M(S^2; (2^k\alpha_1; \beta_1); (2^k\alpha_2; \beta_2); (2^k\alpha_3; \beta_3)),$$

где $k \geqslant 1$, *все* a_i *нечётные,* $\alpha_1\alpha_2\beta_3 + \alpha_1\alpha_3\beta_2 + \alpha_2\alpha_3\beta_1 = \pm 1$ *и есть такая пара* i, j $(i \neq j)$, *что* $3 \mid \alpha_i$, $5 \mid \alpha_j$, *на сферу Пуанкаре имеют чётные степени.*

Исследования автора поддержаны грантами INTAS № 03-51-3663, «Университеты России» № 04.01.046, РФФИ-Урал № 04-01-96014 и Федерального агентства по образованию № А04-2.8-1150.

Литература

[1] Матвеев С. В., Перфильев А. А. Периодичность степеней отображений между многообразиями Зейферта // Докл. РАН. — 2004. — Т. 395, № 4. — С. 449—451.

[2] Hayat-Legrand C., Matveev S., Zieschang H. Computer calculation of the degree of maps into the Poincaré homology sphere // Experiment. Math. — 2001. — Vol. 10, no. 4. — P. 497—508.

[3] Hayat-Legrand C., Wang S., Zieschang H. Minimal Seifert manifolds // Math. Ann. — 1997. — Vol. 308, no. 4. — P. 673—700.