

Полный топологический инвариант потоков Морса—Смейла и разложений на ручки трёхмерных многообразий

А. ПРИШЛЯК

Киевский национальный университет
e-mail: prishlyak@yahoo.com

УДК 517.91

Ключевые слова: потоки Морса—Смейла, топологическая эквивалентность, классификация.

Аннотация

Построен топологический инвариант для канонического разложения на простые и круглые ручки, которое задано потоком Морса—Смейла на трёхмерном многообразии. Доказано, что потоки топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда одинаковы их инварианты.

Abstract

A. Prishlyak, Complete topological invariants of Morse–Smale flows and handle decompositions of 3-manifolds, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 4, pp. 185–196.

We construct a topological invariant for the canonical decomposition on prime and round handles associated with a Morse–Smale flow on a closed 3-manifold. We prove that the flows are topologically equivalent if and only if their invariants coincide.

1. Введение

В 1973 г. Пеиксото [17] построил полный топологический инвариант потока Морса—Смейла на замкнутом ориентированном двухмерном многообразии. Существует много работ, в которых его конструкция совершенствовалась и предлагались новые подходы, например [1, 5, 9, 15, 16, 20].

Власенко [4] и независимо Бонатти и Ланжевин [14] построили топологический инвариант диффеоморфизма Морса—Смейла на замкнутом двумерном многообразии.

Топологические инварианты динамических систем Морса—Смейла на трёхмерных многообразиях известны только для некоторых классов систем [7, 8, 10, 13, 15, 19].

Для потоков Морса—Смейла без замкнутых траекторий Смейл построил разложения на ручки. Для потоков с замкнутыми траекториями Азимов построил

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 4, с. 185–196.

© 2005 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

разложения на круглые ручки. В [9] построены каноническое разложение на ручки для трёхмерного потока Морса—Смейла и схема потока как объединение границ ручек. С использованием схем доказан критерий топологической эквивалентности потоков. Однако этот критерий не является конструктивным, поскольку он требует, чтобы меридианы круглых ручек отображались в меридианы, а меридианы могут быть выбраны бесконечно многими разными способами.

Цель этой работы — ввести дополнительный инвариант, который бы отвечал за возможность продолжения гомеоморфизмов с границ круглых ручек на их внутренности. Мы называем этот инвариант τ -инвариантом.

Рассматриваются потоки Морса—Смейла только на ориентированных трёхмерных многообразиях. Общий случай может быть легко получен из этого с использованием двухлистных накрытий.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 даются основные определения и приводятся известные свойства потоков Морса—Смейла и разложений на ручки. В разделе 3 обсуждаются условия, необходимые для продолжения гомеоморфизма с границы круглой ручки внутрь её. В разделе 4 мы даём критерий эквивалентности оснащённых графов, которые появились в предыдущем разделе. В разделе 5 мы доказываем критерий топологической эквивалентности потоков Морса—Смейла.

2. Основные определения и обозначения

Пусть M — замкнутое трёхмерное многообразие и X — поток на нём. Поток X является потоком Морса—Смейла, если он удовлетворяет следующим условиям:

- 1) X имеет конечное число критических элементов (особых точек и замкнутых траекторий) и все они являются невырожденными (гиперболическими);
- 2) устойчивые и неустойчивые многообразия критических элементов пересекаются трансверсально;
- 3) множество неблуждающих точек потока X есть объединение особых точек и замкнутых траекторий.

Два потока X и Y на многообразии M являются топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм $h: M \rightarrow M$, который отображает траектории поля X на траектории поля Y и сохраняет их ориентацию.

Обозначим через $v(x)$ и $u(x)$ устойчивое и неустойчивое многообразие критического элемента x . Если x и y — критические элементы, такие что $\dim v(x) = \dim u(y) = 2$ и $v(x) \cap u(y) \neq \emptyset$, тогда по [3] существует последовательность седловых замкнутых траекторий $\beta_1, \dots, \beta_n$, такая что

$$v(x) \cap u(\beta_1) \neq \emptyset, \quad v(\beta_k) \cap u(\beta_{k+1}) \neq \emptyset, \quad v(\beta_n) \cap u(y) \neq \emptyset.$$

Обозначим через m максимальное число элементов β_k во всех таких последовательностях и положим $\text{beh}(y | x) = m + 1$. Тогда $\text{beh}(y | x) = 0$, если

$v(x) \cap u(y) = \emptyset$. Мы скажем, что поток имеет beh , равный s , если s является максимальным значением $\text{beh}(y | x)$.

Число $\text{beh}(y) = \max_x \text{beh}(y | x)$ называется высотой замкнутой орбиты индекса 1. Так, замкнутая орбита имеет высоту 0, если её устойчивые многообразия не пересекают неустойчивых многообразий замкнутых траекторий индекса 1. Замкнутая траектория имеет высоту 1, если её устойчивые многообразия пересекают неустойчивые многообразия траекторий индекса 0 и не пересекают неустойчивые многообразия других замкнутых траекторий индекса 1 и т. д. Далее мы предполагаем, что X и X' — потоки Морса—Смейла на замкнутом ориентированном трёхмерном многообразии M .

Пусть $a_1, \dots, a_k$ и $a'_1, \dots, a'_k$ — особые точки индекса 0 потоков X и X' соответственно, и пусть $b_1, \dots, b_n$ и $b'_1, \dots, b'_n$ — особые точки индекса 1. Через γ_j^i , $j = 1, \dots, m(i)$, мы обозначим замкнутые траектории высоты i .

Пусть K — объединение устойчивых многообразий следующих критических элементов:

- 1) особых точек индексов 0 и 1,
- 2) замкнутых траекторий индекса 0.

Особые точки индекса 1 будем называть нижними точками, а их неустойчивые многообразия нижними многообразиями.

Рассмотрим регулярную окрестность $U(K)$ множества K . Пусть $\Phi = \partial U(K)$ — граница этой окрестности для потока X , и пусть Φ' — соответствующая граница поля X' .

Особые точки индекса 2 и замкнутые траектории индекса 1 будем называть верхними критическими элементами; их устойчивые многообразия будем называть верхними многообразиями. Кривые, которые получаются в результате пересечения Φ с нижними многообразиями, будем называть нижними кривыми, а пересечения Φ с верхними многообразиями — верхними кривыми.

Заметим, что все нижние кривые замкнутые (они гомеоморфны окружностям), а верхние кривые могут быть как замкнутыми, так и не замкнутыми. Более того, бесконечное число открытых кривых может соответствовать одному верхнему критическому элементу.

Поверхность Φ вместе с нижними и верхними кривыми называется диаграммой потока. Две диаграммы называются гомеоморфными, если существует гомеоморфизм поверхности Φ , который отображает нижние и верхние кривые на нижние и верхние кривые соответственно.

Предложение 1 ([9]). Если потоки Морса—Смейла на трёхмерных многообразиях топологически эквивалентны, то их диаграммы гомеоморфны.

Если потоки не имеют замкнутых орбит, то существование гомеоморфизма диаграмм является также достаточным условием топологической эквивалентности потоков [8].

Однако в общем случае это не верно и, кроме того, трудно проверить существование гомеоморфизма между диаграммами с бесконечным числом некомпактных кривых.

Далее нашей целью будет построение на основе диаграммы поверхности Φ и вложенного в неё графа G и определение дополнительной информации, которая вместе с парой (Φ, G) даст полный инвариант потока. Для выражения этой информации удобно использовать разложения на простые и круглые ручки.

Многообразие M' получено из многообразия M с помощью приклеивания k -ручки (или ручки индекса k) $H = D^k \times D^{3-k}$, если $M' = M \cup_{\varphi} H$, где $\varphi: S^{k-1} \times D^{3-k} \rightarrow \partial M$ — вложение. $D^k \times 0$ называется средним диском, а $0 \times D^{3-k}$ — косредним диском.

Многообразие M' получено из M с помощью приклеивания круглой k -ручки H , если 1) существуют расслоения над S^1 , E^k и F^{2-k} , 2) вложение $\varphi: \partial E^k \times_{S^1} F^{2-k} \rightarrow \partial M$ таково, что $M' = M \cup_{\varphi} H$, где $H = E^k \oplus F^{2-k}$. $E^k \times 0$ называется средним кольцом, а $0 \times F^{2-k}$ — косредним кольцом.

Разложение на ручки многообразия M — это последовательность

$$D^3 = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_k = M,$$

где M_i получено из M_{i-1} с помощью приклейки простой или круглой ручки.

Мы построим такое разложение на ручки, что средние и косредние диски (кольца) лежат на устойчивых и неустойчивых многообразиях соответствующих критических элементов. Упорядочим критические элементы так, что для всех i выполняются следующие условия: особая точка индекса i меньше замкнутой траектории индекса i , которая, кроме того, меньше особых точек индекса $i+1$; для замкнутых траекторий индекса 1 $\gamma_j^i < \gamma_j^{i+1}$. Обозначим критические элементы через $x_0, x_1, \dots, x_n$ ($x_0 < x_1 < \dots < x_n$). Тогда построим разложение на ручки следующим способом: ручка H_0 есть замкнутая регулярная окрестность $U(x_0)$ наименьшего критического элемента x_0 , $H_i = \text{cl}\left(U(v(x_i)) \setminus \bigcup_{k < i} U_k\right)$, $i = 1, \dots, n$.

Заметим, что поверхность Φ можно рассматривать как границу объединения ручек, которые соответствуют критическим элементам индекса 0 и критическим точкам индекса 1. Поскольку устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются трансверсально, то можно выбрать окрестности $U(v(x_i))$ настолько малыми, что все пересечения средних и косредних дисков и колец с основаниями 2-ручек и круглых 1-ручек, а также с боковыми стенками 1-ручек и круглых 1-ручек были бы параллельными. Это означает, что можно ввести структуру прямого произведения $S^1 \times [-1, 1]$ так, что эти пересечения имеют вид $\{s_i\} \times [-1, 1]$.

Если поток не имеет замкнутых траекторий, то все разложения на ручки, которые имеют параллельные пересечения, являются изоморфными и могут быть заданы, с точностью до изоморфизма, с помощью диаграммы. В случае потока, который имеет замкнутые траектории высоты не меньше 2, уменьшение окрестностей их устойчивых многообразий увеличивает число пересечений между средними и косредними дисками или кольцами у ручек меньшего порядка. Идея построения канонического разложения на ручки состоит в выборе на каждом шаге ручек как максимальных окрестностей, для которых выполняется свойство параллельных пересечений. Если построенные разложения на

ручки являются изоморфными, то комплексы, которые состоят из границ ручек, изоморфны, и при этом изоморфизм отображает меридианы круглых ручек на меридианы. Как и в предложении 1, различный выбор простых 0- и 1-ручек и круглых 0-ручек приводит к изоморфным разложениям на ручки.

Далее мы рассматриваем канонические разложения на ручки и схемы, которые являются объединениями границ ручек, как в [9].

3. О продолжении гомеоморфизмов с торов на полнотория

Пусть T — граница круглой ручки и $G = T \cap S^{(1)}$, где $S^{(1)}$ — 1-остов схемы, рассматриваемой как стратифицированное множество. Зафиксируем ориентацию на T . Пусть $Z = \{z_i\}$ — множество самонепересекающихся циклов графа G . Зададим ориентацию на каждом из этих циклов и ориентацию на меридиане w тора T . Поставим в соответствие каждому ориентированному циклу z_i целое число α_i , равное алгебраическому числу точек пересечения с w . Пусть β_i равно алгебраическому числу точек пересечения z_i с v , взятое по модулю α_i , где v — параллель на торе T . Таким образом, мы имеем пару отображений $\alpha, \beta: Z \rightarrow \mathbb{Z}$. Если задан изоморфизм графов $\phi: G_1 \rightarrow G_2$, то он индуцирует пару отображений $\phi^*(\alpha_1), \phi^*(\beta_1): Z_2 \rightarrow \mathbb{Z}$ из пары отображений $\alpha_1, \beta_1: Z_1 \rightarrow \mathbb{Z}$.

Лемма 1. Пусть T_1 и T_2 — границы полноторий, $G_i \subset T_i$, $i = 1, 2$, — вложенные графы. Предположим, что изоморфизм графов $\phi: G_1 \rightarrow G_2$ продолжается до гомеоморфизма торов, который сохраняет их ориентации. Тогда он может быть продолжен (возможно, через другой гомеоморфизм торов) до гомеоморфизма полноторий тогда и только тогда, когда $\phi^*(\alpha_1) = \alpha_2$, $\phi^*(\beta_1) = \beta_2$.

Доказательство.

Необходимость очевидна.

Для доказательства достаточности мы построим гомеоморфизм тора, который отображает отмеченный цикл в отмеченный цикл. Возможны три принципиально различных случая.

1. Все циклы графа гомотопны 0. Это эквивалентно тому, что граф гомотопен 0. Тогда для каждого $i = 1, 2$ одна из компонент связности дополнения $T_i \setminus G_i$ имеет род 1. Зафиксируем выбранный цикл в каждой из таких компонент (рода 1). Тогда легко построить гомеоморфизм между этими компонентами, который отображает выбранные циклы в выбранные циклы (разрезая компоненту по выбранному циклу, мы сведём задачу к продолжению гомеоморфизма с границы сферы с дырками на её внутренность). На других компонентах $T_i \setminus G_i$ определим гомеоморфизм, который удовлетворяет условиям леммы. Так как все эти гомеоморфизмы совпадают на рёбрах графа, они индуцируют гомеоморфизм тора, переводящий выбранный цикл в выбранный. Существование такого гомеоморфизма является достаточным условием продолжения гомеоморфизма внутри полнотория.

2. Существуют циклы, не гомотопные 0, но все они гомотопны между собой. Это означает, что существует замкнутая кривая γ , которая гомотопна этим циклам и которая не пересекает граф.

Пара α, β определяется алгебраическими числами пересечения кривой γ с выбранным циклом и параллелью. Поскольку образ выбранного цикла T_1 и выбранный цикл на торе T_2 имеют одинаковые числа пересечений при гомеоморфизме торов $h: T_1 \rightarrow T_2$, они отличаются друг от друга, с точностью до гомотопии, на скручивание Дена вдоль кривой γ . Так как эти гомеоморфизмы Дена есть гомеоморфизмы поверхностей, оставляющие графы неподвижными, мы получим гомеоморфизм торов, отображающий выбранный цикл в выбранный. Следовательно, он может быть продолжен до гомеоморфизма полнотория.

3. Существует два или более циклов, которые не гомотопны друг другу и не гомотопны 0. Достаточно рассмотреть два таких цикла и соответствующие числа α_i . Используя их, мы можем воспроизвести выбранный цикл однозначно с точностью до гомотопии. Поскольку числа α_i соответственных циклов равны, то гомеоморфизм торов отображает выбранные циклы в выбранные циклы, что и нужно было показать.

Замечание. Нет необходимости вычислять отображение β в третьем случае.

Существует принципиальное различие между первыми двумя случаями и третьим. Оно состоит в том, что в третьем случае гомеоморфизм торов продолжается до гомеоморфизмов полноторий, а в первых двух случаях гомеоморфизм торов заменяется на другой гомеоморфизм, который продолжается до гомеоморфизмов полноторий.

В первом случае граф разбивает тор на части, одна из которых имеет род 1 (т. е. тор с дырками). Обозначим её через L . Тогда L является одновременно частью границы круглой 0-ручки и частью границы какой-то круглой 2-ручки (потому что для других типов ручек их граница состоит из двумерных стратов рода 0). Для меридиана круглой 2-ручки по отношению к круглой 0-ручке определена пара чисел (α, β) , как выше. Тогда эта пара является инвариантом потока. Для удобства положим $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ для других типов пересечений круглых 0- и 2-ручек.

Во втором случае можно осуществить скручивание Дена вдоль γ перед продолжением гомеоморфизмов торов. В этом случае возможно, что кривая γ будет негомотопна 0 в другом торе. Это означает, что скручивание Дена вдоль кривой γ изменяет гомеоморфизм этого тора, что может оказаться нежелательным. Поэтому есть необходимость введения дополнительного инварианта, который бы отслеживал эту ситуацию. Если кривая γ гомотопна 0 или выбранной кривой во втором торе, то скручивание Дена вдоль неё не влияет на возможность продолжения гомеоморфизма второго тора. Поэтому мы будем рассматривать ситуацию, в которой алгебраическое число пересечений кривой γ с обоими меридианами не равно 0. Мы выберем на каждом из двух торов замкнутую кривую ω , которая пересекает γ в одной точке, такую что для гомотопического

класса меридиана m имеем $[m] = k[\gamma] + l[\omega]$, где $0 \leq k < |l|$. Тогда условие гомотопности меридианов может быть заменено условием гомотопности кривых ω и равенством пар чисел (k, l) . Заметим, что $m = \omega$ для круглой 1-ручки.

Если существует две гомотопные кривые γ и γ' в разных компонентах связности дополнения $T \setminus G$ на границе круглой ручки, то одновременное осуществление скручиваний Дена вдоль γ и γ' с противоположными ориентациями не изменяет гомотопического класса кривых m и ω . Кроме того, алгебраическое число точек пересечений кривой ω данного тора с кривыми ω других торов изменяется, но их сумма остаётся неизменной. Рассмотрим граф L , вершины которого соответствуют обычным или круглым ручкам, содержащим области D , гомеоморфные кольцам из случая 2. Рёбра графа соответствуют этим областям. Упорядочение ручек задаёт естественную ориентацию рёбер графа L . Каждому ребру графа поставим в соответствие число μ , равное алгебраическому числу точек пересечения кривых ω в соответствующих областях или ∞ , если кривая ω гомотопна 0 в границе одной из двух ручек, которым она принадлежит. Здесь мы берём первой ту кривую ω , порядок чьей ручки меньше. Операция одновременного скручивания вдоль кривых γ и γ' порождает некое отношение эквивалентности на множестве чисел μ , которое более детально будет рассмотрено в следующем разделе.

Зафиксируем по одной точке на каждой компоненте границы ∂D . Будем требовать, чтобы кривые ω пересекали ∂D только в этих точках. Для двух кривых ω_1 и ω_2 , которые пересекают ∂D , будем использовать их изотопию к кривым с такими свойствами: если выбрать параллельную ориентацию на компонентах края ∂D и ориентацию $\omega_1 \cup \omega_2 \cap D$, то ориентации совпадут в точках $\omega_1 \cup \omega_2 \cap \partial D$ и будут противоположными в других точках.

4. Эквивалентность оснащённых графов

В этом разделе мы рассматриваем ориентированные графы, один конец каждого ребра которых есть источник или сток. Будем называть такие графы MS-графами. Кроме ситуации, описанной выше (граф L), такие графы являются основным инвариантом потока Морса—Смейла без замкнутых траекторий на замкнутой поверхности. В этом случае их вершины есть неподвижные точки, а рёбра — сепаратрисы. Вершины MS-графа, которые не являются источниками или стоками, будем называть сёдлами. В графе L каждой круглой 0-ручке соответствует источник графа L и круглой 2-ручке соответствует сток, а каждое седло графа L соответствует круглой 1-ручке (кроме того, круглые 1-ручки могут соответствовать источникам или стокам L).

Ориентированный граф называется оснащённым, если каждому ребру поставлено в соответствие целое число или ∞ . Это число или ∞ называется оснащением ребра, а набор оснащений рёбер — оснащением графа. Таким образом, оснащение графа — это отображение множества рёбер в множество $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Оснащённый граф подобен графу с раскрашенными рёбрами.

Два оснащения MS-графа называются эквивалентными, если одно может быть получено из другого при помощи следующих операций:

- 1) одновременного прибавления целого числа k к оснащениям двух рёбер при условии, что начало одного является концом другого и, следовательно, эта вершина является седлом. Рёбра с таким свойством будем называть последовательными;
- 2) прибавления целого числа k к оснащению одного ребра и $-k$ к оснащению инцидентного ребра при условии, что эти рёбра не являются соседними.

Лемма 2. Пусть два оснащения MS-графа содержат рёбра с оснащением ∞ . Тогда они являются эквивалентными в том и только в том случае, когда их наборы рёбер с оснащением ∞ совпадают.

Доказательство.

Необходимость. Операции 1) и 2) не изменяют набор рёбер с оснащением ∞ .

Достаточность. Покажем, что при условиях леммы для любого ребра с конечным оснащением n число n может быть заменено на любое целое число k без изменения оснащений остальных рёбер. Ввиду связности графа существует путь $\{e_1, \dots, e_m\}$, который начинается в этом ребре и заканчивается в ребре с оснащением ∞ . Применяя последовательно операции 1) и 2) с числами k и $-k$ к парам рёбер $(e_1, e_2), (e_2, e_3), \dots, (e_{m-1}, e_m)$, мы получим достаточные условия леммы.

Основная цель этого раздела — установление критерия эквивалентности оснащённых MS-графов. Будем предполагать, что графы связные и не содержат рёбер с оснащением ∞ . Мы разобьём все MS-графы на три типа и сформулируем критерий эквивалентности для каждого типа.

1. Графы первого типа есть MS-графы без сёдел. Они допускают только вторую операцию, которая, как легко видеть, не изменяет сумму оснащений всех рёбер.

Лемма 3. Два оснащённых графа первого типа топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые суммы оснащений всех рёбер.

Доказательство.

Необходимость очевидна.

Достаточность. Зафиксируем какое-нибудь ребро e . Аналогично лемме 2, для любого ребра e_1 , выбрав путь между этим ребром и ребром e , мы можем изменить оснащение ребра e_1 на произвольное целое число n так, что оснащение ребра e будет изменено на $-n$, а оснащения остальных рёбер будут сохранены. Так, используя операцию 2) для первого оснащения, мы изменим оснащения всех рёбер (кроме, быть может, ребра e) на необходимые значения, изменяя при этом оснащение e на разности соответствующих оснащений. В результате мы можем получить из первого оснащения, оснащение, которое совпадает со вторым везде, кроме, быть может, ребра e . Так как суммы оснащений всех рёбер одинаковы, то оснащения равны и на ребре e .

Следствие. Оснащение графа первого типа эквивалентно оснащению графа, у которого у всех рёбер, кроме одного фиксированного ребра e , оснащения равны 0.

2. MS-граф G принадлежит ко второму типу, если существует цикл (возможно, неориентированный), который имеет нечётное количество сёдел (G рассматривается как ориентированный граф). Очевидно, что сёдла цикла являются сёдлами MS-графа (обратное, вообще говоря, не верно). Существование такого цикла эквивалентно существованию самонепересекающегося цикла, который имеет нечётное число рёбер.

Лемма 4. Два оснащённых графа второго типа эквивалентны тогда и только тогда, когда равны по модулю 2 (т. е. имеют одинаковую чётность) суммы оснащений всех их рёбер.

Доказательство.

Необходимость. Каждая из операций 1) и 2) не изменяет сумму всех оснащений по модулю 2.

Достаточность. Пусть e — ребро самонепересекающегося цикла

$$\omega = \{e, e_1, \dots, e_m\}$$

с нечётным числом сёдел. Как в предыдущей лемме, используя операции 1) и 2), мы можем перейти от первого оснащения к оснащению, которое совпадает со вторым на всех рёбрах, кроме ребра e , на котором разность оснащений чётная. Последовательно изменяя оснащения на 1 или -1 с помощью допустимых операций к парам рёбер $(e, e_1), (e_1, e_2), \dots, (e_m, e)$, изменим оснащение ребра e на 2, оставляя оснащения других рёбер неизменными. Таким способом мы можем сделать оснащение ребра e равным оснащению соответствующего ребра на втором графе.

3. Оставшиеся графы имеют третий тип. Разрежем граф по сёдлам. Тогда, в силу отсутствия цикла второго типа, компоненты полученного графа можно разбить на две группы так, что любые два последовательных ребра попадут после разрезания в разные группы. Одну из групп назовём первой, а оставшуюся второй. Сумму оснащений в группе назовём суммарным оснащением группы.

Лемма 5. Два оснащения графа третьего типа эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую разность суммарных оснащений первой и второй групп.

Доказательство.

Необходимость. Если два соседних ребра принадлежат одной группе, то к ним может быть применена операция 2). Эта операция не изменяет суммарного оснащения группы. Если соседние рёбра принадлежат к разным группам, то к ним может быть применена операция 1). Эта операция не изменяет разницы суммарных оснащений групп.

Доказательство достаточности аналогично проведённым в предыдущих леммах. Используя допустимые операции, можно из первого оснащения получить

оснащение, которое совпадает со вторым везде, кроме, быть может, одного ребра. Условия леммы гарантируют, что оснащения совпадают и на этом ребре.

В случае несвязных графов оснащения будут эквивалентными, если они эквивалентны для каждой компоненты связности.

5. Критерий эквивалентности потоков Морса—Смейла

В предыдущих разделах мы построили набор инвариантов, который отвечает за возможность продолжения гомеоморфизмов с границ круглых ручек на их внутренности. Мы назовём этот набор τ -инвариантом. Таким образом, τ -инвариант состоит из:

- 1) пар чисел (α, β) для каждой пары круглых 0- и 2-ручек, которые пересекаются по поверхности рода 1 при ориентации этой поверхности, выбранной как ориентация границы круглой 0-ручки;
- 2) пар чисел (α, β) для меридианов круглых ручек типа 2, пар (k, l) для кривых ω и класса эквивалентности графа L ;
- 3) чисел α_i для каждого самонепересекающегося цикла на границе круглой ручки типа 3.

Теорема. Пусть X и X' — потоки Морса—Смейла на трёхмерном многообразии M . Топологическая эквивалентность двух потоков Морса—Смейла X и X' , которая сохраняет порядок критических элементов, существует тогда и только тогда, когда существует изоморфизм их схем, сохраняющий τ -инвариант.

Замечание. В отличие от условия гомотопности выделенных циклов, условия этой теоремы являются конструктивными, т. е. они позволяют за конечное время проверить два потока на топологическую эквивалентность.

Доказательство.

Необходимость следует из построения и результатов предыдущих разделов.

Достаточность. Так же, как в [8], гомеоморфизм комплекса K , возможно после того как он будет изменён, продолжается на каждую обычную ручку и, таким образом, продолжается на многообразие M^3 без окрестностей замкнутых траекторий. Покажем, что если τ -инварианты эквивалентны, то гомеоморфизмы с границ окрестностей круглых ручек продолжаются внутрь этих окрестностей.

В случае 1 из определения τ -инварианта, используя отображение наследования, гомеоморфизмы торов можно подправить до таких, что образы границ дисков, которые пересекают замкнутую траекторию в одной точке, гомотопны таким же. Здесь используется то, что соответствующие числа (τ -инварианты) равны. Получается, что эти границы отличаются на скручивание Дена вдоль линии пересечения нижней траектории с тором. Подправляя гомеоморфизмы диаграмм с использованием изотопии кривой, которая есть пересечением неустойчивого

многообразия этой нижней траектории со схемой, мы осуществим необходимые скручивания Дена. Тогда, как и в случаях 2 и 3, границы дисков отображаются в кривые, гомотопные границам дисков, а значит, они и сами есть границы таких дисков.

Используя отображение последования, продолжим гомеоморфизмы с торов на диски, а затем вдоль траекторий и на все полнотория. Таким образом мы получим необходимый гомеоморфизм многообразий.

Я бы хотел поблагодарить Владимира Шарко и Игоря Власенко за плодотворные научные беседы, способствовавшие появлению этой работы.

Литература

- [1] Арансон С. Х., Гринес В. З. Топологическая классификация полей на замкнутых двумерных многообразиях // Успехи мат. наук. — 1986. — Т. 41, № 1. — С. 149—169.
- [2] Арансон С. Х., Гринес В. З. Топологическая классификация каскадов на замкнутых двумерных многообразиях // Успехи мат. наук. — 1990. — Т. 45, № 1. — С. 1—35.
- [3] Афраймович В. С., Шильников Л. П. Об особых множествах систем Морса—Смейла // Тр. ММО. — 1973. — Т. 28. — С. 181—214.
- [4] Власенко И. Полный инвариант диффеоморфизма Морса—Смейла на двумерных многообразиях // Некоторые вопросы современной математики. Т. 25 / под ред. В. В. Шарко. — Киев: Ин-т математики НАНУ, 1998. — С. 60—93.
- [5] Омешков А. А., Шарко В. В. О классификации потоков Морса—Смейла на двумерных многообразиях // Мат. сб. — 1998. — Т. 189, № 8. — С. 93—140.
- [6] Пришляк А. О. О вложенных в поверхность графах // Успехи мат. наук. — 1997. — Т. 52, № 4. — С. 211—212.
- [7] Пришляк А. О. Векторные поля Морса—Смейла с конечным числом особых траекторий на трёхмерных многообразиях // Докл. НАН Украины. — 1998. — Т. 6. — С. 43—47.
- [8] Пришляк А. О. Векторные поля Морса—Смейла без замкнутых траекторий на трёхмерных многообразиях // Мат. заметки. — 2002. — Т. 71, № 2. — С. 230—235.
- [9] Пришляк А. О. Топологическая эквивалентность функций и векторных полей Морса—Смейла на трёхмерных многообразиях // Топология и геометрия. Труды Украинского мат. конгресса. 2001. — Киев, 2003. — С. 29—38.
- [10] Уманский Я. Л. Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности трёхмерных динамических систем Морса—Смейла с конечным числом особых траекторий // Мат. сб. — 1990. — Т. 181, № 2. — С. 212—239.
- [11] Asimov D. Round handles and non-singular Morse—Smale flows // Ann. Math. — 1975. — Vol. 102. — P. 41—54.
- [12] Asimov D. Notes on the topology of vector fields and flows // Visualization 93. — San Jose, CA, 1993. — P. 1—23.
- [13] Beguin F., Bonatti C. Flots de Smale en dimension 3: Présentation finie de voisinages invariants d'ensembles selles // Topology. — 2002. — Vol. 41. — P. 119—162.

- [14] Bonatti C., Langevin R. Difféomorphismes de Smale des surfaces. — Paris: Astérisque, 1998. — (Soc. Math. France; Vol. 250).
- [15] Fleitas G. Classification of gradient-like flows in dimension three // Bol. Soc. Brasil Mat. — 1975. — Vol. 2, no. 6. — P. 155—183.
- [16] Frank J. Symbolic dynamics in flows on three-manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. — 1983. — Vol. 279. — P. 231—236.
- [17] Peixoto M. On the classification of flows on two-manifolds // Dynamical Systems / M. Peixoto, ed. — Academic Press, 1973. — P. 389—419.
- [18] Plachta L. The combinatorics of gradient-like flows and foliations on closed surfaces. I. Topological classification // Topology Appl. — 2003. — Vol. 128, no. 1. — P. 63—91.
- [19] De Rezende K. Smale flow on the three-sphere // Trans. Amer. Math. Soc. — 1987. — Vol. 303, no. 1. — P. 283—310.
- [20] Wang X. The C-algebras of Morse—Smale flows on two-manifolds // Ergodic Theory Dynam. Systems. — 1990. — Vol. 10. — P. 565—597.