

Алгоритм нахождения плоских поверхностей в трёхмерных многообразиях

Е. А. СБРОДОВА

Челябинский государственный университет
e-mail: sbrodova@csu.ru

УДК 515.162.3

Ключевые слова: граничный наклон, плоские поверхности, нормальные поверхности, 3-многообразия.

Аннотация

Под наклоном на крае трёхмерного многообразия M понимается набор нетривиальных попарно непересекающихся и непараллельных простых замкнутых кривых на ∂M . В работе строится алгоритм, выясняющий, содержит ли данное ориентируемое трёхмерное многообразие плоскую существенную поверхность, каждая компонента края которой параллельна одной из кривых заданного наклона.

Abstract

E. A. Sbrodova, The algorithm of finding planar surfaces in three-manifolds, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 4, pp. 197–202.

By a slope in the boundary ∂M of a 3-manifold, we mean the isotopy class α of a finite set of disjoint simple closed curves in ∂M which are nontrivial and pairwise nonparallel. In this paper, we construct an algorithm to decide whether or not a given orientable 3-manifold M contains an essential planar surface whose boundary has a given slope α .

Введение

В работе рассматривается задача алгоритмического нахождения собственных существенных плоских поверхностей в трёхмерных многообразиях. Под плоской поверхностью понимается сфера с дырками. В начале 1960-х годов В. Хакен [1] построил алгоритм, который по данному многообразию и данной простой замкнутой кривой l на его крае выясняет, найдётся ли собственный существенный диск с краем l .

Задача алгоритмического нахождения плоских существенных поверхностей в трёхмерных многообразиях была поставлена в [2]. Там же эта задача была решена для многообразий с краем тор, причём решение опиралось на понятие наклона кривой на торе.

В настоящей работе мы обобщаем это понятие, называя наклоном на крае трёхмерного многообразия M набор $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ нетривиальных попарно непересекающихся и непараллельных простых замкнутых кривых на ∂M .

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 4, с. 197–202.

© 2005 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

Будем говорить, что край собственной поверхности $F \subset M$ имеет наклон α , если каждая компонента ∂F параллельна одной из кривых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. В работе строится алгоритм, выясняющий, содержит ли данное неприводимое гранично неприводимое ориентируемое трёхмерное многообразие плоскую существенную поверхность, край которой имеет заданный наклон.

Автор выражает огромную благодарность С. В. Матвееву за помощь в работе над статьёй.

1. Предварительные сведения

Напомним, что трёхмерное многообразие M с фиксированным графом (одномерным полиэдром) $\Gamma \subset \partial M$ без изолированных вершин называется *многообразием с граничным узором* и обозначается (M, Γ) [3].

Определение 1. Собственная поверхность F в трёхмерном многообразии (M, Γ) с граничным узором называется *чистой*, если $\partial F \cap \Gamma = \emptyset$.

Заметим, что плоская поверхность в трёхмерном ориентируемом многообразии M , край которой имеет заданный наклон $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, существует всегда. Возьмём, например, две кривые на крае ∂M , параллельные кривой α_i из набора α . Эти кривые ограничивают на ∂M кольцо, которое можно изотопно продавить внутрь, оставляя его край неподвижным. Получится плоская поверхность (собственное кольцо), край которой параллелен кривой α_i , т. е. имеет наклон α . Для того чтобы избавиться от таких неинформативных примеров, мы будем рассматривать так называемые *существенные* поверхности.

Определение 2. Собственная поверхность F , лежащая в трёхмерном неприводимом гранично неприводимом многообразии (M, Γ) с граничным узором, называется *существенной*, если:

- 1) F несжимаема, т. е. край любого такого диска $D \subset M$, что $D \cap F = \partial D$, является тривиальной кривой на F ;
- 2) F гранично несжимаема, т. е. для любого такого чистого диска $D \subset M$, что ∂D есть объединение двух дополнительных дуг $l = D \cap F$ и $l_1 = D \cap \partial M$, дуга l отсекает от поверхности F чистый диск;
- 3) F отлична от сферы и чистого диска.

В случае пустого узора это определение совпадает с классическим (см. [2]).

Напомним основные сведения из теории нормальных поверхностей Хаке-на. Собственная поверхность в триангулированном многообразии, находящаяся в общем положении, называется *нормальной*, если её пересечение с любым тетраэдром состоит из дисков, каждый из которых является либо треугольником, отсекающим одну из вершин тетраэдра, либо четырёхугольником, рассекающим тетраэдр на две части, по две вершины в каждой. Таким образом, нормальная поверхность естественным образом разбивается на диски *разрешённого* типа: треугольники и четырёхугольники (связные компоненты её пересечения с тетраэдрами триангуляции).

Допустим, что нормальные поверхности F_1 и F_2 в триангулированном многообразии M таковы, что для любого тетраэдра Δ^3 любые два четырёхугольника из $(F_1 \cap \Delta^3) \cup (F_2 \cap \Delta^3)$ имеют одинаковые типы, т. е. пересекают одни и те же ребра тетраэдра. Тогда определена *геометрическая сумма* поверхностей F_1 и F_2 . Она строится так. Сначала нужно изотопно пошевелить поверхности F_1 , F_2 так, чтобы для любого тетраэдра Δ^3 триангуляции многообразия M любые диски $\alpha \subset F_1 \cap \Delta^3$, $\beta \subset F_2 \cap \Delta^3$ либо не пересекались, либо пересекались ровно по одной дуге. Затем вдоль каждой дуги пересечения нужно разрезать поверхности и склеить полученные части попарно так, чтобы образовались непересекающиеся диски разрешённого типа (треугольники и четырёхугольники). Построенная таким образом нормальная поверхность называется *геометрической суммой* поверхностей F_1 , F_2 и обозначается $F_1 + F_2$.

Нормальная поверхность в триангулированном многообразии M называется *фундаментальной*, если её нельзя представить в виде геометрической суммы двух непустых поверхностей из M . Фундаментальных поверхностей в триангулированном многообразии конечное число, и существует процедура, их перечисляющая (см. [3]).

2. Построение алгоритма

Определение 3. *Наклоном* на крае трёхмерного многообразия M называется набор $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ нетривиальных попарно непересекающихся и непараллельных простых замкнутых кривых на ∂M .

Будем говорить, что край собственной поверхности $F \subset M$ имеет *наклон* $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, если каждая компонента края ∂F параллельна одной из кривых наклона. Таким образом, ∂F должен состоять из k_i копий каждой кривой α_i , $1 \leq i \leq n$, где $k_1, k_2, \dots, k_n$ — некоторые неотрицательные целые числа.

Доказательство существования алгоритма базируется на методе Хакена нахождения поверхностей в трёхмерном многообразии M , обладающих некоторым свойством P . В нашем случае свойство P состоит в том, что собственная поверхность $F \subset M$ является существенной плоской поверхностью, край которой имеет заданный наклон α . Обозначим класс существенных поверхностей в многообразии (M, Γ) , край которых имеет заданный наклон α , через $\mathcal{E}_\alpha(M, \Gamma)$. Напомним основные этапы метода Хакена.

1. Нужно триангулировать данное многообразие M .
2. Нужно доказать, что если поверхность $F \subset M$, обладающая свойством P , существует, то существует нормальная поверхность $F_N \subset M$, обладающая свойством P .
3. Нужно доказать, что если существует нормальная поверхность $F_N \subset M$ со свойством P , то существует фундаментальная поверхность $F_F \subset M$ со свойством P .

Как правило, третий этап метода Хакена является самым сложным. В нашем случае трудность состоит в том, что при геометрическом суммировании двух по-

верхностей наклон граничных кривых суммарной поверхности может отличаться от наклонов граничных кривых исходных поверхностей. Идея преодоления этой трудности состоит в рассмотрении специальных триангуляций.

Лемма 1. Пусть $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ — наклон на крае трёхмерного ориентируемого многообразия M . Тогда существуют такая триангуляция T многообразия M и такой набор симплициальных колец $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ на ∂M , что выполнены следующие условия:

- 1) каждая кривая α_i заключена в кольцо A_i ;
- 2) кольца попарно не пересекаются;
- 3) триангуляция любого кольца A_i устроена таким образом, что все вершины и одно ребро каждого треугольника этой триангуляции лежат на крае ∂A_i .

Доказательство. Обозначим через N регулярную окрестность объединения кривых $\bigcup_i \alpha_i$ в M . Тогда N состоит из n непересекающихся колец, по одному кольцу A_i для каждой кривой α_i . Каждое кольцо триангулируем таким образом, чтобы все вершины и одно из рёбер каждого треугольника лежали на крае кольца. Искомая триангуляция T получится продолжением триангуляции колец на все многообразие M . $\square$

Лемма 2. Пусть $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ — наклон на крае трёхмерного ориентируемого неприводимого гранично неприводимого многообразия M , триангулированного так, чтобы выполнялись условия 1—3 леммы 1. Обозначим через Γ граничный узор, состоящий из тех рёбер триангуляции ∂M , которые не пересекают кривых наклона. Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Если существует плоская поверхность $F \in \mathcal{F}_\alpha(M, \emptyset)$, то существует чистая поверхность $F_C \in \mathcal{F}_\alpha(M, \Gamma)$, изотопная F .
2. Если существует чистая плоская поверхность $F_C \in \mathcal{F}_\alpha(M, \Gamma)$, то существует нормальная чистая поверхность $F_N \in \mathcal{F}_\alpha(M, \Gamma)$, изотопная F_C .
3. Если существует чистая нормальная плоская поверхность $F_N \in \mathcal{F}_\alpha(M, \Gamma)$, то существует чистая фундаментальная поверхность $F_F \in \mathcal{F}_\alpha(M, \Gamma)$, которая является либо сферой с дырками, либо проективной плоскостью с дырками.

Доказательство.

1. Предположим, что найдётся существенная плоская поверхность $F \subset M$, край которой имеет наклон $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$. По условию край многообразия M триангулирован так, что каждая кривая α_i лежит в симплициальном кольце $A_i \subset \partial M$. Изотопно пошевелим поверхность F так, чтобы компоненты края ∂F , параллельные каждой кривой α_i , лежали в кольце A_i и не пересекали ∂A_i . Так как граничный узор Γ состоит лишь из тех рёбер триангуляции края ∂M , которые не лежат внутри колец, то полученная поверхность $F_C \subset (M, \Gamma)$, изотопная F , является чистой. Очевидно, что поверхность F_C лежит в классе $\mathcal{F}_\alpha(M, \Gamma)$.

2. Предположим, что найдётся чистая плоская поверхность $F_C \in \mathcal{F}_\alpha(M, \Gamma)$. Тогда, так как (M, Γ) неприводимо и гранично неприводимо, существует нормальная чистая поверхность, изотопная данной (см. [3, предложение 3.3.24]).

3. Докажем более общее утверждение: если существует чистая нормальная поверхность $F_N \in \mathcal{F}_\alpha(M, \Gamma)$, которая является либо сферой с дырками, либо проективной плоскостью с дырками, то существует фундаментальная чистая поверхность $F_F \in \mathcal{F}_\alpha(M, \Gamma)$, которая является либо сферой с дырками, либо проективной плоскостью с дырками.

Среди всех чистых нормальных поверхностей, изотопных F_N , выберем такую, которая пересекает рёбра триангуляции в наименьшем числе точек (минимальную поверхность). Предположим, что поверхность F_N не фундаментальна. Тогда её можно представить в виде суммы $F_N = F_1 + F_2$ двух связных поверхностей F_1, F_2 (см. [3, лемма 3.3.30]). Так как F_N является минимальной существенной поверхностью, то в силу теоремы Джейко, которая справедлива и для многообразий с граничным узором (см. [3, теорема 4.1.36]), поверхности F_1 и F_2 являются существенными поверхностями.

В нашей триангуляции многообразия M компоненты края ∂F_N , параллельные α_i , лежат в симплициальном кольце A_i и пересекают каждый треугольник триангуляции A_i по дуге, параллельной ребру, лежащему на крае кольца. При геометрическом суммировании нескольких таких дуг получим такое же число дуг того же типа. Поэтому наклон края ∂F_N совпадает с наклоном краев ∂F_1 и ∂F_2 и $k = k_1 + k_2$, где k, k_1, k_2 — числа компонент края поверхностей F_N, F_1, F_2 соответственно. При геометрическом суммировании эйлерова характеристика тоже аддитивна (т. е. $\chi(F_N) = \chi(F_1) + \chi(F_2)$). Поэтому $\chi(\hat{F}_N) = \chi(\hat{F}_1) + \chi(\hat{F}_2)$, где поверхность $\hat{F}_i$ получается из F_i заклеиванием дисками всех граничных кривых ∂F_i .

Пусть F_N является сферой с дырками. Тогда $\hat{F}_i$ — сфера и $\chi(\hat{F}_N) = 2$. Так как эйлерова характеристика связной поверхности не превосходит 2, то возможны только два случая: $2 = 2 + 0$ и $2 = 1 + 1$.

В первом случае одна из поверхностей (пусть $\hat{F}_1$) является сферой. Тогда F_1 является существенной сферой с дырками, у которой число точек пересечения с рёбрами триангуляции (рёберная сложность) меньше, чем у поверхности F_N . Во втором случае обе поверхности $\hat{F}_1$ и $\hat{F}_2$ являются проективными плоскостями. Тогда F_1 и F_2 являются существенными проективными плоскостями с дырками, у которых рёберная сложность меньше, чем у поверхности F_N .

Пусть F_N является проективной плоскостью с дырками, тогда $\hat{F}_i$ — проективная плоскость и $\chi(\hat{F}_N) = 1$. Возможны только два случая: $1 = 2 - 1$ и $1 = 1 + 0$.

В первом случае одна из поверхностей (пусть $\hat{F}_1$) является сферой. Тогда F_1 является существенной сферой с дырками и рёберная сложность поверхности F_1 меньше, чем у поверхности F_N . Во втором случае одна из поверхностей (пусть $\hat{F}_1$) является проективной плоскостью. Тогда F_1 является существенной проективной плоскостью с дырками, у которой рёберная сложность меньше, чем у поверхности F_N .

Таким образом, если F_N не фундаментальна, то при разложении её в геометрическую сумму двух поверхностей по крайней мере одно из слагаемых лежит в классе $\mathcal{F}_\alpha(M, \Gamma)$ и является либо сферой с дырками, либо проективной плоскостью с дырками. Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока это возможно. Процесс конечен, так как при каждом шаге рёберная сложность поверхности строго уменьшается. В результате мы получим чистую фундаментальную поверхность $F_F \in \mathcal{F}_\alpha(M, \Gamma)$, которая является либо сферой с дырками, либо проективной плоскостью с дырками. $\square$

Теорема. Существует алгоритм, который по данному неприводимому гранично неприводимому компактному ориентируемому трёхмерному многообразию M и данному наклону $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ на ∂M выясняет, содержит ли M существенную плоскую существенную поверхность $F \subset M$, край которой имеет наклон α .

Доказательство. Алгоритм состоит из следующих шагов.

1. Нужно триангулировать многообразие M так, чтобы выполнялись условия 1—3 леммы 1. Затем задать граничный узор Γ , состоящий из тех рёбер триангуляции ∂M , которые не пересекают кривых наклона.
2. Найти все чистые фундаментальные поверхности (их конечное число).
3. Выяснить, найдутся ли в списке чистых фундаментальных поверхностей существенные сферы с дырками или существенные проективные плоскости с дырками. Из леммы 2 следует, что если такие поверхности есть, то многообразие M содержит плоскую существенную поверхность, если нет, то в данном многообразии существенных плоских поверхностей нет.

Прокомментируем пункт три. Для выяснения, является ли поверхность сферой с дырками или проективной плоскостью с дырками, достаточно знать её эйлерову характеристику и число компонент края. Условие существенности поверхности проверяется алгоритмически (см. [3]). В случае, если среди чистых фундаментальных поверхностей найдётся существенная проективная плоскость P с дырками, нужно взять в многообразии (M, Γ) край регулярной окрестности поверхности P . Получим плоскую поверхность, которая, так же как и P , будет существенной. $\square$

Исследования автора поддержаны грантами INTAS № 03-51-3663, «Университеты России» № 04.01.046, РФФИ-Урал № 04-01-96014.

Литература

- [1] Haken W. Theorie der Normalflächen // Acta Math. — 1961. — Vol. 105. — P. 245—375.
- [2] Jaco W., Sedgwick E. Decision problems in the space of Dehn fillings. — 1998. — [arXiv:math.GT/9811031](https://arxiv.org/abs/math.GT/9811031).
- [3] Matveev S. Algorithmic Topology and Classification of 3-Manifolds. — Berlin: Springer, 2003.