

Дикие замощения $\mathbb{R}^3$ со сферическими границами*

Т.-М. ТАН

Университет Сянтаня, Китай
e-mail: tmtang@xtu.edu.cn

УДК 515.163+515.125

Ключевые слова: трёхмерные упаковки, дикие плитки, сморщенные кубы, сфера Артина—Фокса.

Аннотация

Рассматриваются замощения $\mathbb{R}^3$ областями с дико вложенными сферическими границами. Пересматривается конструкция замощения топологически сложными сморщенными кубами. Затем строится бесконечное семейство дико вложенных клеточных замощений с дикими точками типа Артина—Фокса. Наконец, даётся условие на множество точек дикости, показывающее, что некоторые дикие клетки не могут давать замощений. Предложен ряд наблюдений для дальнейшего изучения.

Abstract

T.-M. Tang, Wild tiles in $\mathbb{R}^3$ with spherical boundaries, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 4, pp. 203—211.

Wildly embedded tiles in $\mathbb{R}^3$ with spherical boundary are discussed. The construction of the topologically complicated, crumpled cube tiles is reviewed. We construct an infinite family of wildly embedded, cellular tiles with Fox—Artin-type wild points. Finally, a condition on the set of wild points on a cellular tile is given to show that certain wild cells cannot be tiles. Several observations are recorded for further investigations.

1. Введение

Замощение $\mathcal{T}$ пространства $\mathbb{R}^3$ — это счётное семейство замкнутых подмножеств T_i в $\mathbb{R}^3$, $i \in \mathbb{N}$, с дизъюнктивными внутренностями, объединение которых даёт $\mathbb{R}^3$. Сами T_i называются плитки. Как обычно, мы ограничиваемся связными компактными T_i с $T_i = \overline{T_i^\circ}$. Замощение $\mathcal{T}$ называется *моноэдральным* (диэдральным), если каждое T_i конгруэнтно множеству T (одному из двух множеств T, T'), называемых *протоплитками* $\mathcal{T}$. В этом случае мы говорим, что $\mathcal{T}$ замощает $\mathbb{R}^3$. Замощение $\mathcal{T}$ *решёточное*, если каждая плитка в $\mathcal{T}$ получена переносом фиксированной плитки на точку некоторой решётки. Плитка клеточная, если это клетка. 2-сфера, вложенная в $\mathbb{R}^3$, *ручная*, или ручным образом

*Работа поддержана Научно-исследовательским фондом Департамента образования провинции Хунань (04C680).

вложенная, если она имеет тот же тип вложения, что и единичная сфера. Иначе она *дикая*, или *дико вложенная*.

Вопрос, какую форму может иметь плитка в $\mathbb{R}^3$, вызвал интерес. Этот вопрос рассматривается в работах [1, 2, 6, 9–14]. По мнению автора, работы Адамса [1, 2] и Куперберга [9] наиболее интересны. Рассуждая различно, они представили много неклоточных замощений $\mathbb{R}^3$. Более общий результат Адамса говорит, что каждое компактное 3-подмногообразие в $\mathbb{R}^3$ с непустым и связным краем может быть представлено как протоплитка моноэдрального замощения $\mathbb{R}^3$ без изменения типа вложения. Заметим, что форма плитки зависит от её топологического типа и её вложения. Поскольку эти авторы рассматривали ручные плитки, их внимание было сфокусировано на заузленности. Адамс [2], Куперберг [9, 10], Ох [11] и Шмитт [12, 13] разрабатывали это направление.

Используя методы Адамса и Куперберга, Тан [15] построил два типа дико вложенных замощений. Во-первых, каждый сморщенный куб (см. раздел 2) имеет (дикое) вложение, которое может замостить $\mathbb{R}^3$. Многие из этих плиток топологически сложны. Во-вторых, клеточное рогатое тело имеет вложение (представителя его типа вложения), которое может замостить $\mathbb{R}^3$. Поэтому в [15] представлен только один дикий клеточный тип. Эти конструкции использованы для возмущения полиэдральных замощений по Адамсу для получения новых диких плиток.

Мы опишем построение замощений сморщенными кубами в разделе 2. В разделе 3 мы строим бесконечно много диких клеточных плиток с различными типами вложений. Следовательно, эти замощения различны в том смысле, что не существует гомеоморфизма $\mathbb{R}^3$, который отображает плитки одного из них на плитки другого. Это дикие клетки Фокса—Артина с двумя особыми точками [7] и их вариации по Альфорду и Боллу [3]. В разделе 4 мы находим необходимое условие на множество диких точек клетки, которая может быть плиткой.

2. Сморщенные кубы как плитки

Пусть $h: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^3$ — вложение. *Сморщенный куб* есть замыкание дополнения к $\mathbb{S}^3 \setminus h(\mathbb{S}^2)$. Нам понадобятся три факта о сморщенных кубах. Во-первых, они могут быть топологически сложными. Например, фундаментальная группа неклоточного рогатого тела является бесконечно порождённой [4]. Неклоточное тело Фокса—Артина локально неодносвязно в точке (точках) дикости. Во-вторых, имеется большое разнообразие сморщенных кубов. Например, рогатое тело Фокса—Артина с n дикими точками локально неодносвязно в n точках. Тем самым эти объекты с различными n не гомеоморфны. В-третьих, имеет место следующая теорема Хозея—Лайнингера (см., например, [5, с. 330]).

Теорема Хозея—Лайнингера. Пусть K — сморщенный куб. Тогда имеется такое вложение $h: K \rightarrow \mathbb{S}^3$, что $\mathbb{S}^3 \setminus h(K)^\circ$ — клетка.

Вот несколько примеров, которые иллюстрируют эту теорему (рис. 1). Для клеточного рогатого тела достаточно перекладывания его как стандартного шара. Для не клеточного рогатого тела не нужно никакого перекладывания. Для дикой клетки с одной внешней и одной внутренней дикими точками по Фоксу—Артину достаточно отсечь внешнюю дикую точку.

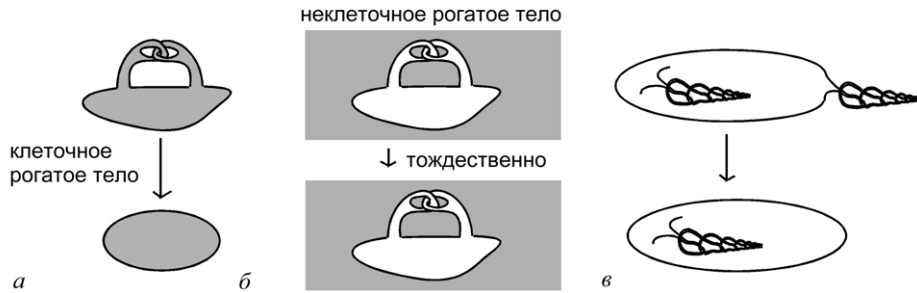


Рис. 1. Иллюстрации к теореме Хозея—Лайнингера:

а — перекладывание клеточного рогатого тела, представленного самосцепленным двойным тором; б — замыкание дополнения не клеточного рогатого тела уже есть клетка; в — перекладывание (ограниченной) дикой клетки с одной внутренней и одной внешней дикими точками

Простое следствие теоремы Хозея—Лайнингера гласит, что каждый сморщенный куб порождает замощение.

Теорема 2.1. Пусть K сморщенный куб. Имеется такое его вложение h в $\mathbb{R}^3$, что $h(K)$ порождает моноэдральное замощение $\mathbb{R}^3$.

Доказательство. По теореме Хозея—Лайнингера K имеет такое вложение $h(K)$, что $\mathbb{S}^3 \setminus h(K)^\circ$ есть клетка. Пусть $S := \partial h(K)$. Запишем $h(K)$ как $S \cup \text{Int } S$.

Пусть B — замкнутый куб и $(S \cup \text{Int } S) \subset B^\circ$ (рис. 2, а). Пусть C — «экватор» ∂B , равноудалённый от верха и низа B , как на рисунке. Пусть $p, q \in C$ взяты на противоположных сторонах B так, что когда мы поместим две копии B рядом, с общей стороной, содержащей p одной копии и q другой, точки p и q не совпадут.

Пусть Σ — слой $\{x \in \mathbb{R}^3, 1 \leq \|x\| \leq 2\}$. Пусть Σ_1 и Σ_2 — внутренняя и внешняя компоненты $\partial \Sigma$. Так как $\mathbb{S}^3 \setminus \text{Int } S$ — клетка, $B \setminus \text{Int } S$ гомеоморфно Σ . Пусть $f: B \setminus \text{Int } S \rightarrow \Sigma$ — гомеоморфизм. Так как $f(C)$ — простая замкнутая кривая на Σ_2 , теорема Шенфлиса утверждает, что имеется гомеоморфизм $\varphi: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$, такой что $\varphi(f(C))$ — большой круг на Σ_2 . Продолжим φ до гомеоморфизма $g: \Sigma \rightarrow \Sigma$, например $g(x) = (\|x\|/2)\varphi(2x/\|x\|)$ для $x \in \Sigma$.

Пусть A — кольцо и $g(f(C))$ — компонента его края, $A := \{tx: x \in g(f(C)), t \in [1/2, 1]\}$ (рис. 2, б). Пусть $D_p, D_q \subset \Sigma_2$ — дизъюнктные замкнутые диски с центрами в $g(f(p))$ и $g(f(q))$, такие что $f^{-1}g^{-1}(D_p)$ и $f^{-1}g^{-1}(D_q)$ на смежных копиях куба дизъюнктны (рис. 2, в). Построим две трубки T_p, T_q , соединяющие Σ_1 и Σ_2 : $T_p := \{tx: x \in D_p, t \in [1/2, 1]\}$, $T_q := \{tx: x \in D_q, t \in [1/2, 1]\}$.

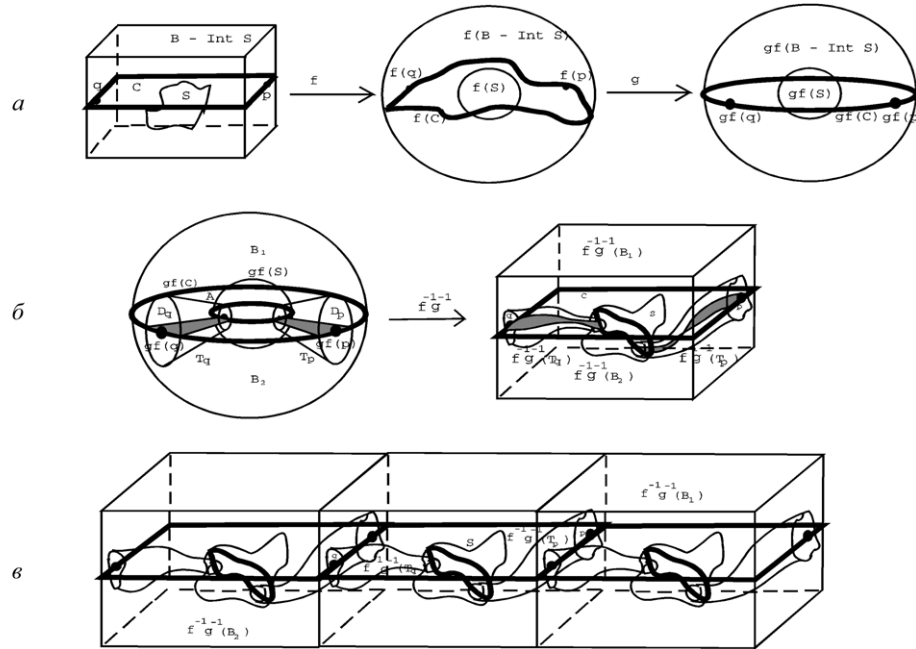


Рис. 2.

$a - B \setminus \text{Int } S$ гомеоморфно сферическому слою. $\text{Int } S$, $\text{Int } f(S)$ и $\text{Int } gf(S)$ не части диаграммы; $б -$ снова $\text{Int } S$ не часть рисунка. Серым отмечены места пересечения трубок с кольцом A и их образы при $f^{-1}g^{-1}$. A и $f^{-1}g^{-1}(A)$ не затушёваны; $в - \text{Int } S$ есть часть диаграммы. Протоплитка есть объединение сморщенного куба $K = (S \cup \text{Int } S)$, $f^{-1}g^{-1}(T_p)$, $f^{-1}g^{-1}(T_q)$ и $f^{-1}g^{-1}(B_i)$, $i = 1, 2$, в трёх смежных кубах, как отмечено. $f^{-1}g^{-1}(A)$ не затушёвано. Три копии f и g не должны вызывать недоразумений

Кольцо A делит $\Sigma \setminus (T_p \cup T_q)$ на две части, их замыкания обозначены B_1 и B_2 . Это клетки.

Перенесём эту конструкцию назад на $B \setminus f S$ (см. рис. 2, б). B разложено на два сморщенных куба $S \cup \text{Int } S$, трубки $f^{-1}g^{-1}(T_p)$ и $f^{-1}g^{-1}(T_q)$ и 3-клетки $f^{-1}g^{-1}(B_i)$, $i = 1, 2$. Их объединения дизъюнкты.

Поместим копии B рядом (см. рис. 2, в). Интересующая нас протоплитка состоит из вложенного сморщенного куба $(S \cup \text{Int } S)$, трубок $f^{-1}g^{-1}(T_p)$ и $f^{-1}g^{-1}(T_q)$, прикрепленных к нему, 3-клеток $f^{-1}g^{-1}(B_1)$ справа и $f^{-1}g^{-1}(B_2)$ слева. Заметим, что тут участвуют по три копии f и g . Плитка гомеоморфна $S \cup \text{Int } S$. $\square$

Следствием теоремы является то, что отношения смежности между плитками не определяют замощения. Когда два сморщенных куба не гомеоморфны, два замощения, имеющие их в качестве протоплиток, неэквивалентны в том смысле, что не найдётся гомеоморфизма $\mathbb{R}^3$, который отобразит плитки одного на плитки другого. Однако, поскольку конструкция теоремы 2.1 работает для любого

сморщенного куба, существует соответствие между плитками двух замощений, такое что отношения соседства между соответствующими плитками те же. Иначе говоря, географические карты соседей на границах соответствующих плиток гомеоморфны. Отметим, что в плоском клеточном замощении отношения сопряжённости определяют замощение ввиду эквивалентности между комбинаторной и топологической эквивалентностями (см. [8]).

3. Бесконечно много диких клеточных плиток

В [15] мы построили одну клеточную дикую плитку — клеточное рогатое тело. В следующей теореме построено бесконечно много таких примеров, каждый с дикими точками типа Фокса—Артина или его обобщения.

Теорема 3.1. *Имеется бесконечно много диких клеточных плиток в $\mathbb{R}^3$ с различными типами вложения. Каждая служит протоплиткой моноэдрального решётчатого замощения $\mathbb{R}^3$.*

Доказательство. Проведём наше доказательство в три шага.

Шаг 1. Мы начнём с построения дикой клеточной плитки по типу Фокса—Артина. Напомним, что дикая дуга Фокса—Артина строится так, как изображено на рис. 3, а, её хвост стягивается в точку. Утолщим её, чтобы получить 3-клетку (рис. 3, б).

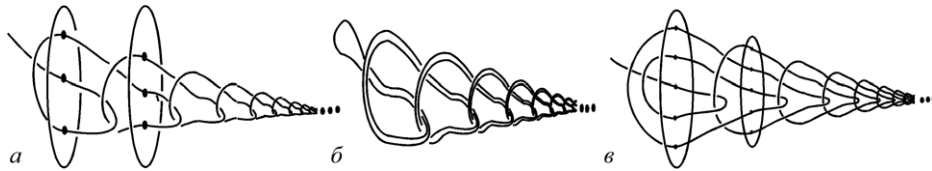


Рис. 3.

Напоминание: часть между двумя вспомогательными дисками a повторяется и продуцирует дикую дугу Фокса—Артина. Утолщим её, чтобы получить дикую клетку б. На в — одно из многих обобщений a по Альфорду—Боллу, получаемое увеличением числа нитей между дисками

Разделим её на верхнюю и нижнюю клетки S_1 , S_2 , отмеченные белым и светло-серым соответственно (рис. 4, а). Подождём их так, чтобы они касались на перекрестиях (рис. 4, б). Вставим $S_1 \cup S_2$ между двумя кубами C_1 и C_2 с общей гранью, расположив их, как показано на рис. 4, в. Заметим, что часть S_1 лежит ниже этой грани, а часть S_2 выше.

Ситуация описывается рис. 5, а, на котором треугольный блок представляет S_1 или S_2 . Отметим, что дополнение к объединению двух клеток в каждом из двух кубов $C_i \setminus (S_1 \cup S_2)$ остаётся клеткой. Для этого критично, чтобы хвосты S_1 и S_2 становились тоньше и тоньше. Соединим теперь S_1 и смещённую копию $C_1 \setminus (S_1 \cup S_2)$ трубкой, идущей вдоль границ кубов, тем самым модифицируя их (см. рис. 5, б). Это даёт множество с одной дикой точкой. Подобным образом

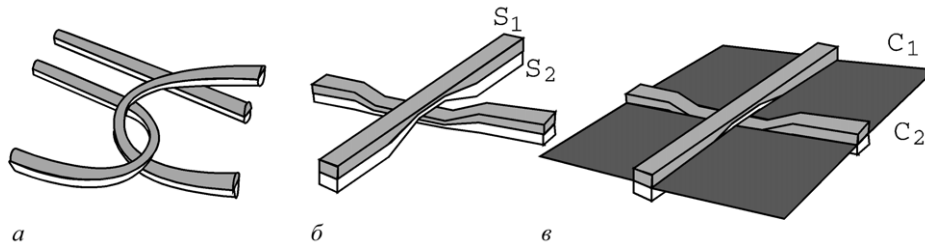


Рис. 4.

a — дикая клетка разделена на две, S_1 и S_2 . Здесь нарисована часть между двумя дисками из рис. 3, a ; b — сожмём две клетки так, чтобы перекрестия стали так, как показано. Поставим их между двумя кубами C_1 и C_2 с общей гранью, расположенными, как показано на $в$

получается и картина на рис. 5, $в$. Заметим, что эти картины не зеркальные отражения друг друга, хотя их представления диаграммами таковы. (S_1 и S_2 обвивают друг друга, но треугольные блоки диаграммы нет). Они не конгруэнтны. Они образуют множество двух протоплиток диэдральных замощений $\mathbb{R}^3$. Они гомеоморфны, но отражение не есть гомеоморфизм.

Шаг 2. Модифицируем описанную конструкцию, чтобы получить моноэдральное решётчатое замощение клеткой с двумя дикими точками Фокса—Артина, следующим образом. Поместим $S_1 \cup S_2$ в двух кубах с общей половиной грани (рис. 6, a). Как и на шаге 1, мы построим две протоплитки диэдрального замощения. Соединим их трубкой вдоль границы кубов (рис. 6, b). Это плитка со сферической границей и двумя дикими точками типа Фокса—Артина. Она служит протоплиткой моноэдральному решётчатому замощению $\mathbb{R}^3$.

Шаг 3. Проведём такое же построение с обобщениями Альфорда—Болла дикой дуги Фокса—Артина [3]. Рис. 3, $в$ показывает одно такое обобщение,

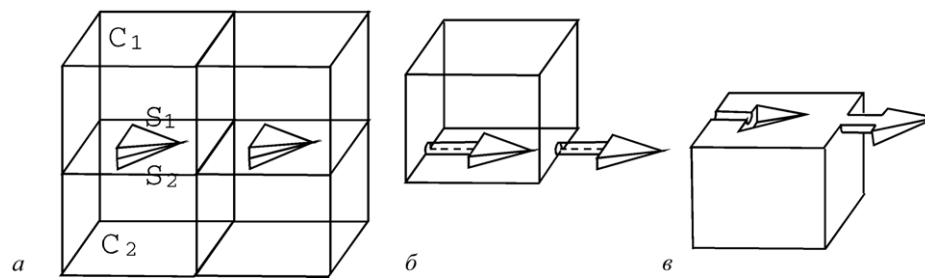


Рис. 5.

a — схематическая диаграмма, указывающая расположение диких клеток и «кубов». Треугольный блок показывает S_1 или S_2 ; b и $в$ — две протоплитки диэдрального замощения. Первая есть $\{C_1 \setminus [(S_1 \cup S_2) \cup \text{трубка}_1]\} \cup S'_1 \cup \text{трубка}'_1$, где обозначения S'_1 , трубка_1 и $\text{трубка}'_1$ понятны сами собой

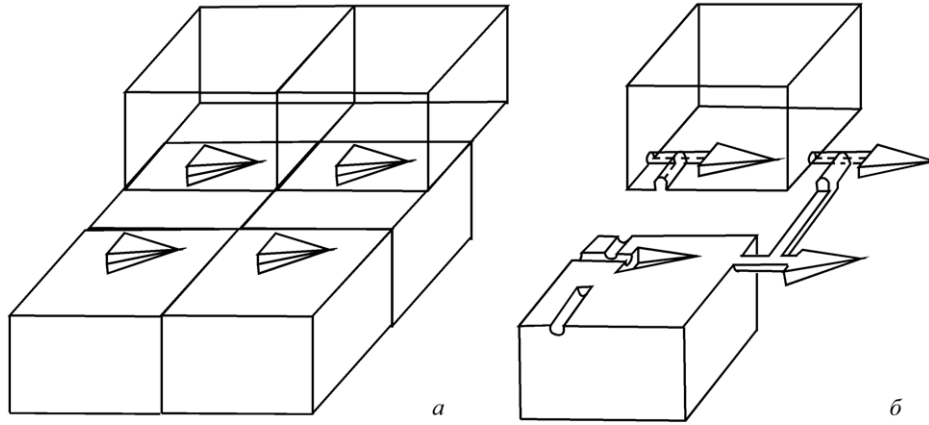


Рис. 6.

a — поместите кубы и дикие клетки, где указано; b — клеточная протоплитка моноэдрального решётчатого замощения с двумя дикими точками типа Фокса—Артина

и мы получим бесконечно много других, увеличивая число нитей между двумя вспомогательными дисками. Действуя как и раньше, мы получим бесконечное семейство плиток, диких в двух точках. Они имеют различный тип вложения [3]. Каждая из них есть протоплитка моноэдрального решётчатого замощения $\mathbb{R}^3$. $\square$

Подобно [15, раздел 4], мы можем возмутить полиэдральные плитки клетками Фокса—Артина, вкладывая их между кубами, чтобы получить ещё более дикие плитки.

Простота конструкции теоремы 3.1 позволяет нам описать пересечение плиток вблизи точки дикости. На рис. 7 соседи S_1 (светло-серый) вблизи точки



Рис. 7.

Топологическая картина соседей S_1 , рассматриваемая со стороны S_1 вблизи точки дикости — центра квадрата

дикости — S_2 (белый), C_1 (тёмно-серый) и C_2 (чёрный) — раскрашены по детальному рассмотрению рис. 4, в. Так как S_1 , S_2 , C_1 , C_2 являются частями

четырёх различных плиток, это географическая карта соседей плитки, содержащей S_1 , вблизи её точки дикости. Эта картина остаётся справедливой для всех построенных клеточных плиток Альфорда—Болла. Она показывает, что плитка пересекает некоторых (у нас всех) соседей по бесконечному количеству кусков и что точка дикости есть пересечение всех четырёх плиток. Было бы интересно знать, в какой мере эти утверждения остаются справедливыми в общем случае.

4. Одно условие на точки дикости дикой клеточной плитки

Мы даём условие на множество точек дикости клеточной плитки. Оно позволяет не рассматривать некоторые дикие клетки как клеточные плитки. Напомним некоторые определения и теоремы (см., например, [5]). Пусть $S = \partial T$ — граница клеточной плитки и $p \in S$. $\text{Int } S$ ($\text{Ext } S$) локально односвязно в точке p , если для каждого открытого множества W , содержащего p , найдётся открытое множество V , такое что $p \in V \subset W$ и каждое отображение границы единичного 2-диска ∂D в $V \cap \text{Int } S$ ($V \cap \text{Ext } S$) продолжается до отображения D в $W \cap \text{Int } S$ ($W \cap \text{Ext } S$). Теорема Бинга говорит, что S ручная, если как $\text{Int } S$, так и $\text{Ext } S$ локально односвязны во всех точках S . Мы назовём p точкой дикости S , если это не так в p . Пусть U — открытое подмножество S . Скажем, что U бицилиндрично, если существует вложение $\varphi: U \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$, такое что $\varphi(u, 0) = u$ для $u \in U$. Очевидно, что если $U \subset S$ бицилиндрично, то ни одна $p \in U$ не является точкой дикости для S .

Теорема 4.1. *Множество точек дикости клеточной плитки T нигде не плотно в $S = \partial T$.*

Доказательство. Заметим, что если $p \in S$ принадлежит в точности двум плиткам, тогда p не является точкой дикости S . В этом случае, поскольку плитки являются клетками, легко видеть, что U бицилиндрично.

Допустим, напротив, что множество точек дикости для T плотно в некотором U , открытом в S . Лемма показывает, что множества точек, принадлежащих по меньшей мере трём плиткам, плотно в U . Простое рассуждение показывает, что существуют такие три плитки T_i , $i = 1, 2, 3$, что множество точек, общих для всех трёх, плотно в некотором открытом подмножестве U , допустим, без потери общности, что это само U . Но тогда эти точки и, значит, U содержатся внутри $T_1 \cup T_2$ и не лежат в T_3 , противоречие. $\square$

Это условие запрещает некоторым диким клеткам быть плитками. Например, можно создать точки дикости типа Фокса—Артина на клетке T в точках с диадическими координатами в $[0, 1] \times [0, 1]$ на некотором координатном пятне в ∂T . Тогда T не может быть плиткой. Было бы интересно найти более строгие условия на множество диких точек.

Литература

- [1] Adams C. C. Tilings of space by knotted tiles // *Math. Intelligencer*. — 1995. — Vol. 17, no. 2. — P. 41–51.
- [2] Adams C. C. Knotted tilings // *The Mathematics of Long-Range Aperiodic Order* / R. V. Moody, ed. — Kluwer Academic, 1997. — P. 1–8.
- [3] Alford W. R., Ball B. J. Some almost polyhedral wild arcs // *Duke Math. J.* — 1963. — Vol. 30. — P. 33–38.
- [4] Blankinship W. A., Fox R. H. Remarks on certain pathological open subsets of 3-space and their fundamental groups // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1950. — Vol. 1. — P. 618–624.
- [5] Burgess C. E., Cannon J. W. Embeddings of surfaces in $\mathbb{E}^3$ // *Rocky Mountain J. Math.* — 1971. — Vol. 1. — P. 259–344.
- [6] Debrunner H. E. Tiling three-space with handlebodies // *Studia Sci. Math. Hungar.* — 1986. — Vol. 21. — P. 201–202; 52–54.
- [7] Fox R. H., Artin E. Some wild cells and spheres in three dimensional spaces // *Ann. of Math.* — 1948. — Vol. 49. — P. 979–990.
- [8] Grunbaum B., Shephard G. C. *Tilings and Patterns*. — New York: W. H. Freeman and Company, 1987.
- [9] Kuperberg W. Knotted lattice-like space fillers // *Discrete Comput. Geom.* — 1995. — Vol. 13. — P. 561–567.
- [10] Kuperberg W. Tiling the solid torus, the 3-cube and the 3-sphere with congruent knotted tori // *Intuitive Geometry (Budapest, 1995)*. — Budapest: Janos Bolyai Math. Soc., 1997. — P. 399–406. — (Bolyai Soc. Math. Stud.; Vol. 6).
- [11] Oh S. Knotted solid tori decomposition of B^3 and S^3 // *J. Knot Theory Ramifications*. — 1996. — Vol. 5, no. 3. — P. 405–416.
- [12] Schmitt P. Another space-filling trefoil knot // *Discrete Comput. Geom.* — 1995. — Vol. 13. — P. 603–607.
- [13] Schmitt P. Space filling knots // *Beitr. Algebra Geom.* — 1997. — Vol. 38, no. 2. — P. 307–313.
- [14] Schulte E. Space fillers of higher genus // *J. Combin. Theory. Ser. A*. — 1994. — Vol. 68. — P. 438–453.
- [15] Tang T.-M. Crumpled cube and solid horned sphere space fillers // *Discrete Comput. Geom.* — 2004. — Vol. 31, no. 3. — P. 421–433.

