

Решение перестроечных задач в размерности 4 с помощью теории контролируемых перестроек

Ф. ХЕГЕНБАРТ

Миланский университет,
Милан, Италия

e-mail: friedrich.hegenbarth@mat.unimi.it

Д. РЕПОВШ

Университет Любляны,
Любляна, Словения

e-mail: dusan.repovsguest.arnes.si

УДК 515.162.4

Ключевые слова: двойственность Пуанкаре, комплекс Пуанкаре, ε - δ -перестройка, контролируемая перестройка, теорема о диске, хорошая фундаментальная группа, препятствие Уолла к перестройке, спектральная последовательность Атьи—Хирцебруха.

Аннотация

В этой статье последовательность Раницкого, Педерсена и Квинна в теории управляемых перестроек применена к решению задач четырёхмерных перестроек в случае, когда неизвестно, является ли хорошей фундаментальная группа. В наших примерах речь идёт о свободных неабелевых фундаментальных группах, фундаментальных группах поверхностей и специальных группах узлов. Используя результаты нашей предыдущей статьи (совместной с Спадажари), мы приводим общий результат, из которого следуют наши примеры.

Abstract

F. Hegenbarth, D. Repovš, Solving four-dimensional surgery problems using controlled theory, *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, vol. 11 (2005), no. 4, pp. 221—236.

In this paper, the controlled surgery sequence of Ranicki, Pedersen, and Quinn is applied to the solution of surgery problems in dimension four when the fundamental group is not known to be good. Our examples concern free non-Abelian fundamental groups, surface fundamental groups, and special knot groups. Using results from our earlier paper (joint with Spaggiari), we state a general result from which our examples follow.

1. Введение

Задача перестройки записывается в виде диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \nu_M & \xrightarrow{b} & \xi \\ \downarrow & & \downarrow \\ M^n & \xrightarrow{f} & X^n \end{array},$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 4, с. 221—236.

© 2005 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

где M^n есть n -многообразие, ν_M — стабильное нормальное расслоение вложения $M^n \subset \mathbb{R}^{n+l}$ (l велико), ξ — l -расслоение над n -мерным комплексом Пуанкаре X (в смысле Уолла [21]), f — отображение степени 1 и $b: \nu_M \rightarrow \xi$ — морфизм расслоений над f (послойный изоморфизм). Мы предполагаем, что M^n есть замкнутое топологическое многообразие размерности n .

Имеется очевидное понятие бордизма между такими перестроечными задачами. Дизъюнктное объединение определяет сумму классов эквивалентности. Определённая таким образом группа бордизмов обозначается $\Omega_n(X, \xi)$. Далее, ν_M и ξ — это топологические $\mathbb{R}^l$ -расслоения. Если мы возьмём «объединение» всех $\Omega_n(X, \xi)$ относительно всех возможных $\mathbb{R}^l$ -расслоений ξ над X , мы получим множество, находящееся во взаимно-однозначном соответствии с $[X, G/\text{TOP}]$. Это биективное соответствие не канонично. Оно зависит от фиксации определённой задачи перестроек, или, что эквивалентно, от TOP-редукции нормального расслоения Спивака над X (см. [21, § 10]). Так что мы имеем такое соответствие лишь при условии, что есть хотя бы одна перестроечная задача с носителем X .

Для любой задачи перестроек (f, b) , как описано выше, имеется вполне определённое перестроечное препятствие в группе Уолла $\Theta(f, b) \in L_n(\pi_1(X))$, для которого $\Theta(f, b) = 0$, если (f, b) нормально кобордантно

$$\begin{array}{ccc} \nu_N & \xrightarrow{c} & \xi \\ \downarrow & & \downarrow \\ N^n & \xrightarrow{g} & X \end{array},$$

где g есть простая гомотопическая эквивалентность. В случае $n \geq 5$ это условие необходимо и достаточно. Если $n \geq 5$ и $\Theta(f, b) = 0$, строится нормальный кобордизм между (f, b) и (g, c) с помощью последовательности перестроек.

Препятствие к перестройке $\Theta(f, b) \in L_n(\pi_1(X))$ определяет отображение

$$\Theta: [X, G/\text{TOP}] \rightarrow L_n(\pi_1(X)).$$

Группа Уолла зависит только от фундаментальной группы X и характеристики ориентируемости $w: \pi_1(X) \rightarrow \{\pm 1\}$, которую мы будем игнорировать.

Для $n \geq 5$ теория перестроек выражается точной последовательностью

$$\mathcal{S}(X) \xrightarrow{\eta} [X, G/\text{TOP}] \xrightarrow{\Theta} L_n(\pi_1(X)),$$

где $\mathcal{S}(X)$ есть множество со структурой. Элемент $\mathcal{S}(X)$ представлен простой гомотопической эквивалентностью $h: M \rightarrow X$, и $h: M \rightarrow X$ эквивалентно $h': M' \rightarrow X$, если имеется гомеоморфизм $\phi: M' \rightarrow M$, такой что $h \circ \phi$ гомотопен h' . Отображение η связывает с каждой (простой) гомотопической эквивалентностью её нормальный инвариант: пусть $h^{-1}: X \rightarrow M$ обозначает гомотопически обратный для $h: M \rightarrow X$, $\xi = (h^{-1})^*(\nu_M)$. Заметим, что $h^*(\xi) = (h^{-1} \circ h)^*(\nu_M) \cong \nu_M$. Тогда $\eta[h: M \rightarrow X]$ есть задача перестройки

$$\begin{array}{ccc} \nu_M \cong h^*(\xi) & \xrightarrow{\bar{h}} & \xi \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{h} & X \end{array},$$

где $\bar{h}$ есть каноническое отображение. Перестроечная последовательность может быть продолжена влево отображением $L_{n+1}(\pi_1(X)) \rightarrow \mathcal{S}(X)$, но это не будет рассматриваться в нашей статье.

Неизвестно, существует ли в общей ситуации эта последовательность в размерности $n = 4$. По результату Фридмана это так для 4-комплексов Пуанкаре с «хорошими» фундаментальными группами (см. [7–10, 14]). Однако в размерности 4 имеется контролируемая перестроечная последовательность (см. [16]). Мы подробно расскажем об этом в разделе 3. Группа препятствий для перестроек в этой последовательности зависит не только от $\pi_1(X)$, но также от топологии пространства X , а точнее — от контролирующего отображения $p: X \rightarrow B$, которое должно удовлетворять UV^1 -свойству. UV^1 -свойство не инвариант гомотопического типа X . Для данного X может существовать гомотопически эквивалентный комплекс Пуанкаре Y , для которого можно построить хорошее UV^1 -отображение $Y \rightarrow B$. Следовательно, нам нужно получить преобразование начальной перестроечной задачи

$$\begin{array}{ccc} \nu_M & \xrightarrow{b} & \xi \\ \downarrow & & \downarrow \\ M^n & \xrightarrow{f} & X^n \end{array}$$

в задачу с образом Y без изменения перестроечного препятствия $\Theta(f, b)$. Оно хорошо известно и, в действительности, получается из формулы для перестроечного препятствия композиции нормальных отображений (см. [21, глава 17Н, лемма 2], [19, предложение 43] или [12, с. 322]). Так как этот момент базисный в размерности 4 (в [21, с. 264] говорится: «Это, очевидно, базисный результат, который следовало обсудить в этой книге раньше»), мы дадим его доказательство (иное, чем доказательства, упомянутые выше) в разделе 2.

В разделе 4 мы построим примеры UV^1 -отображений, которые будут использованы в разделе 5 для формулировки и доказательства главных результатов этой статьи.

2. Инвариантность перестроечных препятствий при гомотопической эквивалентности

Нас интересуют лишь четырёхмерные перестройки, и мы можем ограничить обсуждение случаем $n = 2k$. Пусть дана перестроечная задача

$$\begin{array}{ccc}
\nu_M & \xrightarrow{b} & \xi \\
\downarrow & & \downarrow \\
M^n & \xrightarrow{f} & X^n
\end{array} \quad (*)$$

Пусть Y^n — другой n -комплекс Пуанкаре и $h: X \rightarrow Y$ — (простая) гомотопическая эквивалентность. Наша задача — использовать h , чтобы преобразовать её в перестроечную задачу

$$\begin{array}{ccc}
\nu_M & \xrightarrow{c} & \eta \\
\downarrow & & \downarrow \\
M^n & \xrightarrow{g} & Y
\end{array}$$

($g = h \circ f$ и отображение расслоений c ещё следует определить) так, чтобы $\Theta(g, c) = \Theta(f, b)$ при отождествлении $L_n(\pi_1(Y)) \leftrightarrow L_n(\pi_1(X))$, индуцированном $h_*: \pi_1(X) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Y)$.

Допустим, что f k -связно. Тогда $[\pi_{k+1}(f), \lambda, \nu] \in L_n(\pi_1(X))$ представляет $\theta(f, b)$, где

$$\begin{aligned}
\lambda: \pi_{k+1}(f) \times \pi_{k+1}(f) &\rightarrow \Lambda = \mathbb{Z}[\pi_1(X)], \\
\mu: \pi_{k+1}(f) &\rightarrow \Lambda / \{a - (-1)^k \bar{a} \mid a \in \Lambda\} = Q_k -
\end{aligned}$$

формы пересечения и самопересечения. Операция $\bar{a}$ обозначает каноническую антиинволюцию в Λ . Чтобы определить $c: \nu_M \rightarrow \eta$, мы выберем гомотопически обратный $h^{-1}: Y \rightarrow X$ и гомотопии

$$\begin{aligned}
H: X \times I &\rightarrow X \quad \text{между } h^{-1} \circ h \text{ и } \text{Id}_X, \\
G: Y \times I &\rightarrow Y \quad \text{между } h \circ h^{-1} \text{ и } \text{Id}_Y.
\end{aligned}$$

Пусть $\eta = (h^{-1})^*(\xi)$, а $c: \nu_M \rightarrow \eta$ есть композиция

$$\nu_M \xrightarrow{b} \xi \cong h^*(\eta) \xrightarrow{\bar{h}} \eta,$$

где $\bar{h}$ — каноническое отображение и изоморфизм $\xi \cong h^*(\eta)$ индуцирован изоморфизмом $H^*(\xi) \cong \xi \times I$, тождественным при $t = 0$ (т. е. $H_0^*(\xi) = \xi \times 0$, $H_1^*(\xi) = (h^{-1} \circ h)^*(\xi) = h^*(\eta)$). Тогда

$$\begin{array}{ccccc}
\nu_M \times I & \xrightarrow{b \times 1} & \xi \times I \cong H^*(\xi) & \xrightarrow{\bar{H}} & \xi \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
M \times I & \xrightarrow{f \times 1} & X \times I & \xrightarrow{H} & X
\end{array}$$

есть нормальный кобордизм между

$$\begin{array}{ccc}
\nu_M \xrightarrow{b} \xi & & \nu_M \xrightarrow{b} \xi \cong h^*(\eta) \\
\downarrow & & \downarrow \\
M \xrightarrow{f} X & \text{и} & M \xrightarrow{f} X
\end{array},$$

значит, препятствия к перестройке совпадают. Следовательно, можно допустить, что $\xi = h^*(\eta)$ и $c: \nu_M \rightarrow \eta$ есть композиция $c = \bar{h} \circ b$. Так как $h: X \rightarrow Y$ есть простая гомотопическая эквивалентность, гомоморфизм

$$h_*: \pi_{k+1}(f) \rightarrow \pi_{k+1}(h \circ f)$$

есть изоморфизм, сохраняющий предпочтённый базис и форму пересечения. Значит, единственное отличие может возникнуть в формах самопересечения $\mu: \pi_{k+1}(f) \rightarrow Q_k$ и $\mu': \pi_{k+1}(f) = \pi_{k+1}(h \circ f) \rightarrow Q_k$.

Однако для того чтобы определить препятствие к перестройке, мы сначала должны провести перестройки ниже средней размерности. В этой области перестройки используют оснащённые вложения $S^p \times D^{n-p} \rightarrow M$, определённые с помощью $b: \nu_M \rightarrow \xi$. Поэтому различные отображения расслоений могут дать различные Λ -модули $\pi_{k+1}(f)$. Более того, форма самопересечения μ определяется выбором для элементов $x \in \pi_{k+1}(f)$ оснащённых погружений типа

$$\begin{array}{ccc} S^k \times D^k & \hookrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^{k+1} \times D^k & \longrightarrow & X \end{array}.$$

Эти оснащённые погружения определены с помощью $b: \nu_M \rightarrow \xi$. Это делается так. Пусть $x \in \pi_{p+1}(f)$ представлено диаграммой

$$\begin{array}{ccccc} S^p & \xrightarrow{\varphi} & M & \xleftarrow{\quad} & \nu_M \\ \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow \\ D^{p+1} & \xrightarrow{\psi} & X & \xleftarrow{\quad} & \xi \end{array}. \quad (**)$$

Можно допустить, что $p \leq n - 2$. Осуществим вложение $M^n \subset \mathbb{R}^{n+l}$ при большом l , следовательно,

$$\tau_M \oplus \nu_M = \varepsilon_M^{n+l}.$$

Тогда имеем каноническим образом

$$\varphi^*(\tau_M) \oplus \varphi^*(\nu_M) = \varepsilon_{S^p}^{n+l} = \tau_{S^p} \oplus \varepsilon_{S^p}^{n+l-p}.$$

Но из диаграммы (**) мы получим изоморфизм

$$\varphi^*(\nu_M) = \psi^*(\xi)|_{S^p} \cong \varepsilon_{S^p}^l.$$

Всё вместе даёт послойный изоморфизм

$$\begin{array}{ccc} \tau_{S^p} \oplus \varepsilon_{S^p}^{n+l-p} & \longrightarrow & \tau_M \oplus \varepsilon_M^l \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^p & \xrightarrow{\varphi} & M \end{array},$$

который может быть дестабилизирован единственным образом до

$$\begin{array}{ccc} \tau_{S^p} \oplus \varepsilon^{n-p} & \longrightarrow & \tau_M \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^p & \xrightarrow{\varphi} & M \end{array},$$

поскольку $p \leq n - 2$ (так что $\pi_p(BO(n)) \xrightarrow{\cong} \pi_p(BO)$). По теореме Хефлигера—Хирша это определяет погружение $S^p \times D^{n-p} \looparrowright M$, единственное с точностью до регулярной гомотопии.

Теперь ясно, что мы получим то же регулярное погружение $S^p \times D^{n-p} \looparrowright M$ с помощью диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} S^p & \xrightarrow{\varphi} & M & \xleftarrow{\quad} & \nu_M \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow b \\ D^{p+1} & \xrightarrow{\psi} & X & \xleftarrow{\quad} & \xi \\ & \searrow & \downarrow h & & \downarrow \bar{h} \\ & & Y & \xleftarrow{\quad} & \eta \end{array} \quad (**')$$

Это завершает доказательство того, что $\Theta(f, b) = \Theta(h \circ f, c)$, т. е. композиция с гомотопической эквивалентностью $X \rightarrow Y$ определяет задачу перестройки с образом Y и с тем же препятствием к перестройке.

Если $\Theta(f, b) = 0$, то существует предпочтённый Λ -базис $\{e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_r\}$ (после стабилизации), такой что $\lambda(e_i, f_j) = \delta_{ij}$, $\lambda(x, y) = 0$ для всех иных пар x, y из $\{e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_r\}$ и $\mu(e_i) = \mu(f_i) = 0$, $i = 1, \dots, r$. С помощью трюка Уитни ($k \geq 3$) получаем, что регулярный гомотопический класс погружений $S^k \times D^k \looparrowright M$ для любого e_i содержит вложение, на котором производятся перестройки для достижения гомотопической эквивалентности.

3. Теория управляемых перестроек

В этом разделе мы опишем контролируруемую перестроечную последовательность Педерсена—Квина—Раницкого (см. [16]). Её преимущество в том, что она сохраняет размерность 4. Затем мы объясним, как использовать её, чтобы получить четырёхмерные задачи перестройки.

Группы Уолла для тривиальной группы такие:

$$L_n(\{1\}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n \equiv 0 \pmod{4}, \\ \mathbb{Z}_2, & n \equiv 2 \pmod{4}, \\ 0, & n \text{ нечётное.} \end{cases}$$

Существует 4-периодический Ω -спектр $\mathbb{L}$, для которого $\pi_n(\mathbb{L}) = L_n$ (см. [15, 17] или [20] с алгебраическим подходом). $\mathbb{L}$ -гомологии пространства B могут быть посчитаны с помощью спектральной последовательности Атьи—Хирцебруха

$$E_{pq}^2 = H_p(B, \pi_q(\mathbb{L})) \Rightarrow H_{p+q}(B, \mathbb{L}).$$

Пространство B будет контрольным пространством, и оно должно быть компактным метрическим ANR конечной размерности. Следовательно, оно гомотопически эквивалентно конечному комплексу (согласно гипотезе Борсука, доказанной Уэстом [22]). Значит, чтобы посчитать $H_n(B, \mathbb{L})$, мы можем допустить, что B есть конечный комплекс. В действительности, беря его регулярную окрестность в некотором $\mathbb{R}^l$, мы можем считать, что B есть триангулированное многообразие. Любой n -цикл x , представляющий элемент $[x] \in H_n(B, \mathbb{L})$, является семейством перестроечных задач

$$x(\sigma): \begin{array}{ccc} \nu_{M_\sigma} & \xrightarrow{b_\sigma} & \xi_\sigma \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_\sigma & \xrightarrow{f_\sigma} & X_\sigma \end{array},$$

где σ — симплекс в B и $\dim M_\sigma = n - \dim \sigma$, вместе с базисным отображением $X_\sigma \rightarrow \sigma^*$ (σ^* — клетка, двойственная к σ). Условие цикла и тот факт, что B — многообразие, дают возможность склеить эти задачи в одну глобальную перестроечную задачу

$$\begin{array}{ccccc} \nu_M & \xrightarrow{b} & \xi & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ M & \xrightarrow{f} & X & \longrightarrow & B \end{array}$$

над B . В этих обозначениях определено *отображение ассамблеи*

$$A: H_n(B, \mathbb{L}) \rightarrow L_n(\pi_1(B)),$$

для которого $A([x])$ — образ $\Theta(f, b) \in L_n(\pi_1(X)) \rightarrow L_n(\pi_1(B))$ (см. [15, глава 3] и [20, глава 12]).

Допустим, что дано отображение $p: X \rightarrow B$ n -комплекса Пуанкаре в B . По теореме Коэна [4] можно допустить, что p трансверсально любому σ^* , $\sigma \in B$. Пусть $X_\sigma = p^{-1}(\sigma^*)$. Предположим, что дано некоторое нормальное отображение степени 1

$$\begin{array}{ccc} \nu_M & \xrightarrow{b} & \xi \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

такое что $p \circ f$ трансверсально регулярно для любого $\sigma^* \subset B$. Мы получим для него семейство x перестроечных задач

$$x(\sigma): \begin{array}{ccc} \nu_{M_\sigma} & \xrightarrow{b_\sigma} & \xi_\sigma \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_\sigma & \xrightarrow{f_\sigma} & X_\sigma \end{array},$$

где σ — симплекс в B , и также отображение $X_\sigma \rightarrow \sigma^*$. Заметим, что $\dim M_\sigma = n - |\sigma| = \dim X_\sigma$. Это определяет отображение

$$\Theta_B: [X, G/\text{TOP}] \rightarrow H_n(B, \mathbb{L}).$$

Эта конструкция показывает, что если $p_*: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(B)$ — изоморфизм, то $A \circ \Theta_B = \Theta$ и для данного $[f, b] \in [X, G/\text{TOP}]$ элемент $\Theta_B([f, b]) \in H_n(B, \mathbb{L})$ есть более сильное препятствие, чем $\Theta([f, b])$.

Если $\Theta_B([f, b]) = 0$, то перестройка может быть выполнена и даст гомотопические эквивалентности для всех индивидуальных задач перестройки $x(\sigma)$ при $n \geq 5$. Это так, поскольку $\Theta_B([f, b]) = 0$ эквивалентно тому, что $x(\sigma)$ нормально ограничивает некоторую перестроечную задачу $y(\sigma)$ над σ^* для любого симплекса $\sigma \subset B$. Это работает также и для $n = 4$, если фундаментальные группы хорошие для всех $x(\sigma)$. Семейство $\{y(\sigma) \mid \sigma \subset B\}$ может быть собрано вместе в нормальную перестроечную задачу

$$\begin{array}{ccc} \nu_N & \longrightarrow & \xi \\ \downarrow & & \downarrow \\ N^{n+1} & \longrightarrow & X \end{array}$$

которая ограничивает (f, b) .

Положим $\Theta_B([f, b]) = 0 \in H_n(B, \mathbb{L})$. Мы допустим, что $p: X \rightarrow B$ удовлетворяет $\pi_1(X) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B)$. Вместо того чтобы пытаться склеить вместе следы индивидуальных перестроечных задач на $x(\sigma)$, будем делать малые контролируемые перестройки на глобальной задаче (f, b) так, чтобы возможно было их рассматривать как перестроечные над некоторыми σ . Выполнение контролируемых перестроек ведёт к группе препятствий к контролируемым перестройкам $L_n(B, p, \varepsilon, \delta)$. Конечно, если это препятствие исчезает, мы также получим (простую) гомотопическую эквивалентность (с помощью контролируемой теоремы Гуревича—Уайтхеда).

Тогда существует отображение ассамблеи $A_{Y_a}: H_n(B, \mathbb{L}) \rightarrow L_n(B, p, \varepsilon, \delta)$, определённое Ямасаки [23], и можно доказать, что оно является изоморфизмом для подходящих ε, δ . Это было сделано недавно Педерсеном, Квинном и Раницким [16]. Альтернативный подход предложен Ферри [6]. Доказательства даны в предположении, что $p: X \rightarrow B$ имеет свойство UV^1 (или $UV^1(\delta)$) для достаточно малого δ , т. е. локальные перестроечные задачи $x(\sigma)$ все имеют тривиальные фундаментальные группы. Это также оказывается возможным в размерности 4 (см. работы Квинна). Общий случай, когда локальная фундаментальная группа нетривиальна, или даже непостоянна, остаётся нерешённым (см. [24] по поводу трудностей общего случая).

Прежде чем сформулировать результат [16], напомним определение UV^1 -отображения.

Определение. Говорят, что непрерывное отображение $p: X \rightarrow B$, где B — метрическое пространство с метрикой d , есть $UV^1(\delta)$ -отображение, $\delta > 0$, если каждая коммутативная диаграмма непрерывных отображений

$$\begin{array}{ccc} K_0 & \xrightarrow{x_0} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ K & \xrightarrow{\alpha} & B \end{array}.$$

где K есть 2-комплекс и $K_0 \subset K$ — его подкомплекс, может быть дополнена отображением $\bar{\alpha}: K \rightarrow X$, таким что $\bar{\alpha}|_{K_0} = \alpha_0$ и $d(p\bar{\alpha}(u), \alpha(u)) < \delta$ для любого $u \in K$. UV^1 -отображение есть $UV^1(\delta)$ -отображение для любого $\delta > 0$.

Это то определение, которое используется в контролируемой топологии и алгебре. Имеется другой аспект UV^1 -отображений, полезный для приложений, который будет объяснён в разделе 4.

Замечание. $UV^1(\delta)$ -свойство отображения p сильно зависит от топологии и метрики пространства B . Замены B , которые мы делали ранее, чтобы геометрически определить отображение ассамблеи, его нарушают. Выполняя контролируемые перестройки, нужно сохранять свойство $UV^1(\delta)$ отображения. Имеется также спектральное определение отображения ассамблеи, данное, к примеру, в [20, § 12].

Теорема 3.1 (ε - δ -перестроечная последовательность [16]). Пусть B — конечномерный компактный метрический ANR и $n \geq 4$. Тогда имеется $\varepsilon_0 > 0$, зависящее от B и n , такое что для каждого $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, найдётся $\delta > 0$ со следующим свойством.

Если X^n есть (замкнутое) n -многообразие, $p: X \rightarrow B$ есть $UV^1(\delta)$ -отображение, то контролируемая перестроечная последовательность

$$H_{n+1}(B, \mathbb{L}) \rightarrow \mathcal{S}_{\varepsilon, \delta}(X, p) \xrightarrow{\eta} [X, G/\text{TOP}] \xrightarrow{\Theta_B} H_n(B, \mathbb{L})$$

точна.

Здесь $\mathcal{S}_{\varepsilon, \delta}(X, p)$ — классы эквивалентности (M, g) , M — замкнутое n -многообразие, $g: M \rightarrow X$ — δ -гомотопическая эквивалентность над $p: X \rightarrow B$ (т. е. существуют гомотопически обратный $g^{-1}: X \rightarrow M$ и гомотопии $H: M \times I \rightarrow M$ и $G: X \times I \rightarrow X$ между $g^{-1} \circ g$ и Id_M , $g \circ g^{-1}$ и Id_X , такие что $\{(p \circ f \circ H(x, t)) \mid t \in I\} \subset B$ и $\{(p \circ G(y, t)) \mid t \in I\} \subset B$ имеют диаметры меньше δ для любых $x \in M$, $y \in X$ соответственно). Два элемента (M, g) , (M', g') эквивалентны, если существует гомеоморфизм $h: M \rightarrow M'$, такой что диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{h} & M' \\
 g \searrow & & \swarrow g' \\
 & X &
 \end{array}$$

ε -коммулативна над $p: X \rightarrow B$ (т. е. $d(pg(x), pg'h(x)) < \varepsilon$ для любого $x \in M$).

Это отношение рефлексивно и симметрично. Его транзитивность составляет часть теоремы.

Нужно заметить, что доказательство, данное в [16], справедливо также, когда X^n есть δ -комплекс Пуанкаре для достаточно малого δ . В частности, это так, когда X^n есть обобщённое n -многообразие. Отображение $H_{n+1}(B, \mathbb{L}) \rightarrow [X, G/\text{TOP}]$ служит контролируемой версией реализации препятствия для перестройки по Уоллу. В условиях теоремы ясно, что мы имеем следующую коммутативную диаграмму (теперь мы рассматриваем только случай $n = 4$):

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{S}_{\varepsilon, \delta}(X) & \xrightarrow{\eta} & [X, G/\text{TOP}] & \xrightarrow{\Theta_B} & L_4(B, \mathbb{L}) \\
 \downarrow & & \parallel & & \downarrow A_B \\
 \mathcal{S}(X) & \xrightarrow{\eta} & [X, G/\text{TOP}] & \xrightarrow{\Theta} & L_4(\pi_1(B))
 \end{array}$$

Левое вертикальное отображение даётся забыванием ε, δ .

Это ведёт к следующей программе. Для данной 4-мерной перестроечной задачи

$$\begin{array}{ccc}
 \nu_M & \xrightarrow{b} & \xi \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M^n & \xrightarrow{f} & X^n
 \end{array}$$

с препятствием к перестройке $\mathcal{O}$ построить B (как в теореме) и отображение $p: X \rightarrow B$, такое что

- 1) p есть UV^1 ,
- 2) A_B инъективно.

Тогда можно выполнить перестройку на (f, b) и получить δ -гомотопическую эквивалентность над B . Отметим два крайних случая:

- а) $p: X \rightarrow \{*\}$,
- б) $p = \text{Id}: X \rightarrow X$,

где в а) p (вообще говоря) не есть UV^1 , а в б) A_B (вообще говоря) не инъективно. Таким образом, B должно быть «хорошо сбалансированным» между $\{*\}$ и X .

Мы дадим примеры в разделе 4. Для общего многообразия X^4 конструкции такого $p: X \rightarrow B$, по-видимому, нет. Нужно упомянуть, что в [18] предложен подход к решению четырёхмерной перестроечной задачи общего положения над 4-комплексом Пуанкаре X с исчезающим общим перестроечным препятствием.

4. Примеры UV^1 -отображений

Приводимые здесь примеры не слишком сложные, но с помощью результатов [2, 3, 11] они ведут к интересным результатам. Сперва мы опишем альтернативный аспект UV^1 -отображений. Подмножество $A \subset X$ имеет UV^1 -свойство, если для каждой его окрестности U найдётся другая его окрестность V , такая что $V \subset U$, $\pi_1(V) \rightarrow \pi_1(U)$ нулевое для любой начальной точки в V и любые две точки $x, y \in V$ могут быть соединены дугой в U . Следующая теорема — это специальный случай теоремы об аппроксимативном поднятии (см. [5, с. 126]).

Теорема 4.1. Пусть X — метрическое пространство и G — непрерывное UV^1 -разбиение X (т. е. каждый член $A \in G$ есть UV^1 -подмножество). Пусть $B = X/G$ и $p: X \rightarrow B$ — проекция. Тогда p есть UV^1 -отображение.

В качестве следствия немедленно получаем лемму 4.2.

Лемма 4.2. Пусть M^n — n -многообразие, гомеоморфное связной сумме $M_1^n \# M_2^n$. Если $h: M \rightarrow M_1 \# M_2$ — гомеоморфизм, то композиция

$$p: M \xrightarrow{h} M_1 \# M_2 \xrightarrow{c} M_1 \vee M_2$$

есть UV^1 -отображение, где c — коллапсирующее отображение и $n \geq 3$.

Доказательство. Прообразы точек относительно c являются отдельными точками или S^{n-1} , что даёт UV^1 -разбиение. $\square$

Лемма 4.3. Пусть M гомеоморфно связной сумме $M_1 \# M_2$ и $\pi_1(M_2) = \{1\}$. Если $h: M \rightarrow M_1 \# M_2$ — гомеоморфизм, то $p: M \xrightarrow{h} M_1 \# M_2 \xrightarrow{c} M_1$ есть UV^1 -отображение, где c — коллапсирующее отображение.

Доказательство повторяет предыдущее. $\square$

Лемма 4.4. Пусть $p: X \rightarrow B$ — расслоение между многообразиями с односвязными слоями. Тогда p есть UV^1 -отображение.

Доказательство. Мы можем использовать трубчатые окрестности слоёв, чтобы увидеть, что $\{p^{-1}(b) \mid b \in B\}$ есть UV^1 -разбиение. $\square$

Так как композиция UV^1 -отображений снова есть UV^1 -отображение, мы, в частности, имеем такое утверждение.

Лемма 4.5. Пусть M^4 гомеоморфно $\left(\#_1^r S^1 \times S^3\right) \# M'$, $\pi_1(M') = \{1\}$. Тогда композиция p

$$M \xrightarrow{h} \left(\#_1^r S^1 \times S^3\right) \# M' \xrightarrow{c_1} \#_1^r S^1 \times S^3 \xrightarrow{c_2} \bigvee_1^r S^1 \times S^3 \xrightarrow{c_3} \bigvee_1^r S^1$$

есть UV^1 -отображение. Здесь c_1 , c_2 , c_3 — очевидные коллапсирующие отображения и проекция.

Для следующего примера пусть дана конечно представимая группа π , реализованная как фундаментальная группа 2-комплекса K . Можно вложить K в $\mathbb{R}^5$ (вообще говоря, в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 5$) и взять край N его регулярной окрестности. Тогда N есть 4-многообразие (вообще говоря, $(n-1)$ -многообразие) и ретракция окрестности определяет отображение $p: N \rightarrow K = B$.

Лемма 4.6. Допустим, что π есть фундаментальная группа дополнения к торическому узлу. Тогда описанная конструкция даёт UV^1 -отображение $p: N \rightarrow K = B$.

Доказательство. Мы применим теорему 3.1 и покажем, что прообразы точек являются хорошо вложенными 2-сферами.

Итак, пусть k — торический узел типа (k, l) . Тор делит S^3 на полнотория T и T^* , причём $k \subset T \cap T^* = S^1 \times S^1$. Пусть $M = S^3 \setminus \dot{N}(k)$, где $N(k)$ — малая трубчатая окрестность вокруг $k \subset S^3$. Спайн M состоит из подкомплексов $S \subset T$ и $S^* \subset T^*$, которые пересекаются по окружности в $T \cap T^* = S^1 \times S^1$, параллельной узлу k .

Если рассмотреть срезы полноторий T и T^* , картины S и S^* соответственно получатся такие, как на рис. 1 (где мы взяли $(k, l) = (3, 2)$, т. е. узел трилистника).

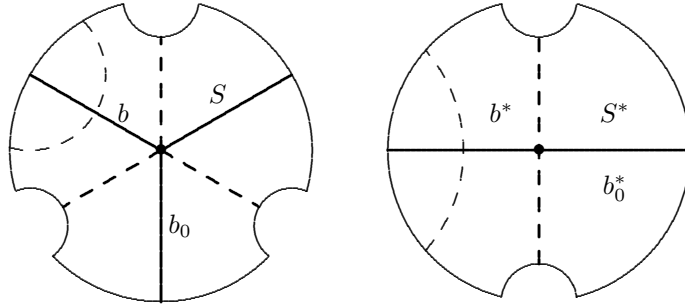


Рис. 1

Если $c: M \rightarrow S \cup S^* = B$ — коллапсирующее отображение, то для $b \in S$ $c^{-1}(b)$ есть букет конечного числа сегментов, пересекающихся в точке b (пунктированные сегменты). Аналогично для $b^* \in S^*$.

Теперь мы рассмотрим вложение $B \subset \mathbb{R}^5$, заданное цепочкой

$$B \subset M \subset S^3 \subset S^3 \times D^1 \subset \mathbb{R}^4 \subset \mathbb{R}^5.$$

Тогда край регулярной окрестности $B \subset \mathbb{R}^5$ есть

$$\partial(M \times D^2) = \partial M \times D^2 \cup M \times \partial D^2 = X$$

и окрестностное коллапсирование есть композиция проекции $M \times D^2 \xrightarrow{\pi} M$ с c , т. е.

$$p = c \circ \pi|_X: X \rightarrow B.$$

Тогда довольно легко заметить, что $p^{-1}(b)$ есть PL 2-сфера, значит, p есть UV^1 -отображение. $\square$

5. Результаты

Крушкаль и Ли доказали следующую теорему.

Теорема 5.1 ([13]). Пусть X — четырёхмерный комплекс Пуанкаре со свободной неабелевой группой, и допустим, что форма пересечения X происходит от целочисленной формы. Пусть $f: M \rightarrow X$ — нормальное отображение степени 1, где M — замкнутое 4-многообразие. Тогда исчезновение препятствия Уолла влечёт, что f нормально бордантно (простой) гомотопической эквивалентности.

Это замечательно, поскольку предполагается, что теорема о диске неверна для таких фундаментальных групп (см. [9]).

Доказательство. Этот результат можно легко понять, если использовать контролируемые перестройки вместе с результатом из [2]: так как форма пересечения $\lambda: H_2(X, \Lambda) \times H_2(X, \Lambda) \rightarrow \Lambda$, где $\Lambda = \mathbb{Z}[\pi_1(X)]$, продолжает форму $H_2(X, \mathbb{Z}) \times H_2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$, из [2, теорема 1] следует, что X (просто) гомотопически эквивалентно $Y = \left(\#_1^r S^1 \times S^3 \right) \# M'$ с $\pi_1(M') = \{1\}$.

Преобразуем перестроечную задачу в задачу с образом Y и с нулевым препятствием к перестройке (как объяснялось в разделе 2). Тогда по лемме 4.5 найдётся UV^1 -отображение $p: Y \rightarrow \bigvee_1^r S^1 = B$.

Хорошо известный факт, что $A: H_4(B, \mathbb{L}) \xrightarrow{\cong} L_4(\pi_1(B))$ (см. [1]), завершает доказательство. $\square$

Теорема 5.2. Пусть X есть спинорный 4-комплекс Пуанкаре, и допустим, что он имеет ту же фундаментальную группу, что и замкнутая ориентируемая асферичная поверхность. Допустим, что форма Λ -пересечений продолжает $\mathbb{Z}$ -форму пересечения (как в теореме 5.1). Тогда любое нормальное отображение $f: M \rightarrow X$ степени 1 с исчезающим препятствием Уолла нормально бордантно (простой) гомотопической эквивалентности.

Доказательство. Из [3, теорема 4.6] следует, что X (просто) гомотопически эквивалентен $F \times S^2 \# M' = Y$, F — асферичная поверхность с $\pi_1(X) = \pi_1(F)$, $\pi_1(M') = \{1\}$. Как ранее, мы преобразуем перестроечную задачу в задачу над Y и заметим, что

$$p: Y \xrightarrow{c_1} F \times S^2 \xrightarrow{\pi_F} F = B$$

есть UV^1 -отображение.

Из [1, теорема 18] следует (с использованием спектральной последовательности $H_p(B, \mathbb{L}_q) \Rightarrow H_{p+q}(B, \mathbb{L})$), что $A: H_4(B, \mathbb{L}) \xrightarrow{\cong} L_4(\pi_1(B))$. $\square$

Из леммы 4.6 получаем следующую теорему.

Теорема 5.3. Пусть X — многообразие, построенное как край регулярной окрестности в $\mathbb{R}^5$ 2-комплекса, определённого фундаментальной группой дополнения к торическому узлу. Тогда любая перестроечная задача с образом X и исчезающим препятствием Уолла нормально бордантна (простой) гомотопической эквивалентности.

Доказательство. Пусть B есть спайн и $p: X \rightarrow B$ — UV^1 -отображение из леммы 4.6. Хорошо известно, что B — асферичное пространство с гомологиями $H_p(B) = \mathbb{Z}$ для $p = 0, 1$ и тривиальными иначе. Спектральная последовательность Атьи—Хирцебруха даёт $A: H_4(B, \mathbb{L}) \xrightarrow{\cong} L_4(\pi_1(B))$. $\square$

Более общий результат может быть получен с помощью следующего факта, доказанного в [11, теорема А]. Пусть X — связное замкнутое ориентируемое 4-многообразие с бесконечной фундаментальной группой. Допустим, $G \subset H_2(X, \Lambda)$ есть такой Λ -подмодуль, что:

- 1) G является Λ -свободным и спаривание, сопряжённое с Λ -пересечением, индуцирует $G \xrightarrow{\cong} G^* \equiv \text{Hom}_\Lambda(G, \Lambda)$;
- 2) либо а) $H^2(B\pi_1, \Lambda) = 0$, либо б) $H_2(X, \Lambda)/_G$ Λ -тривиально;
- 3) ограничение формы Λ -пересечения на G продолжено из формы $\mathbb{Z}$ -пересечения.

Тогда X (просто) гомотопически эквивалентно $B \# M'$, где B есть 4-комплекс Пуанкаре, $\pi_1 M' = \{1\}$, M' — 4-многообразие с $H_2(M', \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda = G$. Применение контролируемой перестроечной последовательности даёт следующий результат.

Теорема 5.4. Допустим, что $X, G \subset H_2(X, \Lambda)$ удовлетворяют вышеприведённым условиям. Тогда найдётся $\varepsilon_0 > 0$, такое что для любого $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ имеется $\delta > 0$ и последовательность

$$H_5(B, \mathbb{L}) \rightarrow \mathcal{S}_{\varepsilon, \delta}(X) \rightarrow [X, G/\text{TOP}] \rightarrow H_4(B, \mathbb{L})$$

точна, где $p: X \rightarrow B$ задано леммой 4.3.

Замечание. Теоремы 5.1 и 5.2 являются специальными случаями теоремы 5.4. В теореме 5.1 мы находимся в случае 2а), а случай 2б) применим к теореме 5.2. В обоих случаях мы имеем $A_B: H_4(B, \mathbb{L}) \xrightarrow{\cong} L_4(\pi_1)$.

Эта статья была представлена первым автором на Международной конференции по геометрической топологии, дискретной геометрии и теории множеств, посвящённой столетию Л. В. Келдыш (Москва, 24—28 августа 2004 г.). Эта работа была частично поддержана Министерством образования, науки и спорта Республики Словения, исследовательская программа P1-0292-0101.

Литература

- [1] Cappell S. Mayer—Vietoris sequences in Hermitian K-theory // Batelle Inst. Conf. 1972. — New York: Springer. — (Lect. Notes. Math.; Vol. 343). — P. 478—507.

- [2] Cavicchioli A., Hegenbarth F. On 4-manifolds with free fundamental groups // *Forum Math.* — 1994. — Vol. 6. — P. 415–429.
- [3] Cavicchioli A., Hegenbarth F., Repovš D. Four-manifolds with surface fundamental groups // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1997. — Vol. 349. — P. 4007–4019.
- [4] Cohen M. Simplicial structures and transverse cellularity // *Ann. of Math.* — 1967. — Vol. 85. — P. 218–245.
- [5] Davermann R. J. *Decomposition of Manifolds.* — Orlando: Academic Press, 1986.
- [6] Ferry S. Epsilon-delta surgery over $\mathbb{Z}$. — Preprint. — 2003.
- [7] Freedman M. H. The topology of four-dimensional manifolds // *J. Differential Geom.* — 1982. — Vol. 17. — P. 357–453.
- [8] Freedman M. H., Quinn F. S. *Topology of 4-Manifolds.* — Princeton: Princeton Univ. Press, 1990.
- [9] Freedman M., Teichner P. 4-manifold topology. I. Subexponential groups // *Invent. Math.* — 1995. — Vol. 122. — P. 509–529.
- [10] Freedman M., Teichner P. 4-manifold topology. II. Dwyer's fibration and surgery kernels // *Invent. Math.* — 1995. — Vol. 122. — P. 531–557.
- [11] Hegenbarth F., Repovš D., Spaggiari F. Connected sums of 4-manifolds // *Topology Appl.* — To appear.
- [12] Jones L. Patchspaces: A geometric representation for Poincaré spaces // *Ann. of Math.* — 1973. — Vol. 97. — P. 276–306. Corrigendum: *ibid.* — 1975. — Vol. 102. — P. 183–185.
- [13] Krushkal V., Lee R. Surgery on closed manifolds with free fundamental groups // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 2002. — Vol. 133. — P. 305–310.
- [14] Krushkal V., Quinn F. Subexponential groups in 4-manifold topology // *Geom. Topol.* — 2000. — Vol. 4. — P. 407–430.
- [15] Nicas A. Induction theorems for groups of homotopy manifold structures. — 1982. — (*Mem. Amer. Math. Soc.*; Vol. 267).
- [16] Pedersen E. K., Quinn F., Ranicki A. Controlled surgery with trivial local fundamental groups // *Proc. School on High-Dimensional Manifold Topology, ICTP, Trieste, 2001* / T. Farrell, W. Lück, eds. — Singapore: Word Sci. Press, 2003. — P. 421–426.
- [17] Quinn F. A geometric formulation of surgery // *Topology of Manifolds. Proc. 1969 Georgia Topology Conference.* — Chicago: Markham Press, 1970. — P. 500–511.
- [18] Quinn F. Controlled and low-dimensional topology, and a theorem of Keldysh // *Abstracts of Int. Conf. on Geometric Topology, Discrete Geometry, and Set Theory, dedicated to the centenary of L. V. Keldysh, Moscow, August 24–28, 2004.* — Moscow: Steklov Mathematical Institute, 2004. — P. 8.
- [19] Ranicki A. The algebraic theory of surgery. II. Applications to topology // *Proc. London Math. Soc.* (3). — 1980. — Vol. 40. — P. 193–283.
- [20] Ranicki A. A. *Algebraic L-Theory and Topological Manifolds.* — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.
- [21] Wall C. T. C. *Surgery on Compact Manifolds.* — New York: Academic Press, 1971.
- [22] West J. Mapping Hilbert cube manifolds to ANR's: A solution to a conjecture of Borsuk // *Ann. of Math.* — 1977. — Vol. 106. — P. 1–18.

- [23] Yamasaki M. *L*-groups of crystallographic groups // Invent. Math. — 1987. — Vol. 88. — P. 571—602.
- [24] Yamasaki M. Relatively simple chain complexes. — Preprint. — 2004.