

Диаграммно-стрелочные формулы инвариантов узлов четвёртого порядка

С. В. АЛЛЁНОВ

Коломенский государственный
педагогический институт
e-mail: allenov@list.ru

УДК 515.162.8

Ключевые слова: инварианты Васильева, диаграммно-стрелочные формулы.

Аннотация

В работе рассмотрены явные диаграммно-стрелочные формулы инвариантов Васильева четвёртого порядка, которые были анонсированы разными авторами. Мы показываем, что эти формулы не задают инвариантов узлов.

Abstract

S. V. Allionov, Arrow-diagram formulas for fourth-order invariants of knots, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 5, pp. 3–17.

In this paper, we study explicit arrow-diagram formulas for fourth-order Vassiliev invariants of knots announced by several authors. We show that, in fact, these formulas do not determine any knot invariants.

1. Введение

В 1994 году О. Я. Виро и М. Б. Поляком [8] были построены явные диаграммно-стрелочные формулы инвариантов Васильева второго и третьего порядков, определённые по диаграмме Гаусса узла. Более того, была анонсирована комбинаторная формула одного из трёх базисных инвариантов четвёртого порядка, полное доказательство которой было предложено О.-П. Остлундом [7] в 1997 году. Комбинаторные формулы для двух других базисных инвариантов четвёртого порядка были анонсированы С. Д. Тюриной [4] в 1999 году.

В данной работе мы показываем, что анонсированные формулы не определяют инвариантов Васильева четвёртого порядка. Во всех случаях строится свой контрпример: мы указываем диаграмму узла и третье движение Рейдемейстера в ней, относительно которого формула не инвариантна.

Составлена таблица значений всех инвариантов до четвёртого порядка включительно для узлов с не более чем девятью двойными точками. Она получена непосредственным вычислением инвариантов по их определению и может быть

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 5, с. 3–17.

© 2005 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

использована для проверки диаграммно-стрелочных формул. Данная работа является продолжением [1].

Итак, вопрос о явных комбинаторных формулах базисных инвариантов четвёртого порядка по-прежнему остаётся открытым. Однако отметим, что, согласно теореме М. Н. Гусарова, существуют представления любого инварианта Васильева порядка n в виде диаграммно-стрелочной формулы:

$$V_n(K) = \sum a_i \langle A_i, \mathcal{G} \rangle,$$

где A_i — стрелочные диаграммы различного комбинаторного типа с не более чем n стрелками. Выражение $\langle A_i, \mathcal{G} \rangle$ означает алгебраическое число вхождений стрелочной диаграммы A_i в гауссову диаграмму $\mathcal{G}$ узла.

Общие гомологические методы получения комбинаторных формул описаны в [10]. Однако автор пишет: «Данные методы оставляют возможности для неточностей, но, к счастью, мы всегда можем проверить наши вычисления, после чего у ошибок не остаётся шансов выжить». Таким образом, предъявление явных комбинаторных формул для инвариантов конечного порядка остаётся актуальной задачей.

2. Комбинаторные формулы

Приведём формулировки утверждений, которые мы опровергаем в настоящей работе, и объясним способы подсчёта по диаграммно-стрелочным формулам.

Утверждение 1 ([8]). Если $\mathcal{G}$ — диаграмма Гаусса узла K , то

$$V_4^1(K) = \langle A, \mathcal{G} \rangle, \quad (1)$$

где $V_4^1(K)$ — аддитивный чётный инвариант Васильева порядка 4, который принимает значение 0 на тривиальном узле, значение 3 на трилистнике и значение 2 на узле «восьмёрка» (узел типа 4_1), и стрелочный полином A имеет вид

$$A = \begin{array}{c} \text{Diagram 1} + 6 \cdot \text{Diagram 2} + 2 \cdot \text{Diagram 3} + 3 \cdot \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + 2 \cdot \text{Diagram 6} + 2 \cdot \text{Diagram 7} + \text{Diagram 8} - \\ - \text{Diagram 9} + \text{Diagram 10} + \text{Diagram 11} + \text{Diagram 12} + 2 \cdot \text{Diagram 13} + 2 \cdot \text{Diagram 14} + \text{Diagram 15} + \text{Diagram 16} \end{array} \quad (2)$$

Утверждение 2 ([4]). Пусть W_4 — произвольная весовая система четвёртого порядка, принимающая нулевое значение на хордовой диаграмме Diagram 17 . Тогда следующая формула задаёт инвариант Васильева четвёртого порядка:

$$V_4(K) = \frac{1}{2} W_4(\text{Diagram 18}) \langle \text{Diagram 19}, \mathcal{G} \rangle + \frac{1}{4} W_4(\text{Diagram 20}) \langle \text{Diagram 21} + \text{Diagram 22}, \mathcal{G} \rangle + \\ + \frac{1}{2} W_4(\text{Diagram 23}) \langle \text{Diagram 24} + \text{Diagram 25}, \mathcal{G} \rangle + \frac{1}{4} W_4(\text{Diagram 26}) \langle \text{Diagram 27} + \text{Diagram 28} + \text{Diagram 29} + \text{Diagram 30}, \mathcal{G} \rangle + \\ + \frac{1}{4} W_4(\text{Diagram 31}) \langle \text{Diagram 32} + \text{Diagram 33} + \text{Diagram 34} + \text{Diagram 35}, \mathcal{G} \rangle + \frac{1}{4} W_4(\text{Diagram 36}) \langle \text{Diagram 37} + \text{Diagram 38}, \mathcal{G} \rangle, \quad (3)$$

где $\mathcal{G}$ — диаграмма Гаусса узла K .

Базисные инварианты $V_4^2(K)$ и $V_4^3(K)$, дополнительные к $V_4^1(K)$, получаются применением различных базисных весовых систем W_4^2 и W_4^3 к хордовым диаграммам.

3. Стрелочные и гауссовы диаграммы

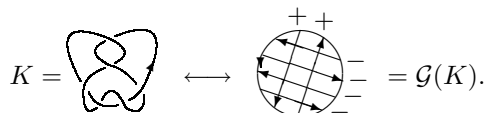
Будем рассматривать ориентированные узлы — гладкие ориентированные вложения окружности S^1 в пространство $\mathbb{R}^3$.

Напомним, что *гауссова диаграмма* является удобным способом кодирования узла и строится по его плоской диаграмме — проекции общего положения этого узла на некоторую плоскость $\Pi^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Отметим на ориентированной окружности прообразы всех двойных точек плоской диаграммы. Пары, соответствующие одной двойной точке, соединим хордой. Теперь в каждой двойной точке укажем, какая ветвь узла проходит выше, какая ниже. Для этого ориентируем хорду от прообраза прохода к прообразу перехода. Каждой полученной стрелке поставим в соответствие знак $\pm$ в зависимости от типа перекрёстка в соответствующей двойной точке диаграммы узла:



Таким образом ориентированному узлу K ставится в соответствие *диаграмма Гаусса* $\mathcal{G}(K)$. На рисунке изображён узел 6_1 и соответствующая ему диаграмма Гаусса:



Определение 1. *Стрелочной диаграммой* называют ориентированную окружность с несколькими ориентированными хордами кратности 1 или 2. Хорды кратности 2 обозначают на рисунке двойной стрелкой.

Будем рассматривать стрелочные диаграммы с точностью до комбинаторного расположения стрелок, т. е. две стрелочные диаграммы эквивалентны, если существует гомеоморфное отображение окружности в окружность с сохранением ориентаций стрелок и их кратностей, переводящее одну стрелочную диаграмму в другую.

Определение 2. Пусть $\mathcal{G}$ — диаграмма Гаусса. Говорят, что стрелочная диаграмма A есть *поддиаграмма* $\mathcal{G}$, если определено вложение $P: A \rightarrow \mathcal{G}$, переводящее окружность в окружность и каждую стрелку A в стрелку $\mathcal{G}$ с сохранением их ориентаций.

Знаком поддиаграммы называется произведение знаков её стрелок. Двойной стрелке соответствует знак плюс.

Обозначим $\langle A, \mathcal{G} \rangle$ алгебраическую сумму знаков всех различных поддиаграмм стрелочного типа A в диаграмме Гаусса $\mathcal{G}$. Два вложения стрелочной диаграммы A в $\mathcal{G}$ различны, если различны образы стрелок или их кратности. Например:

$$\left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array}, \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} \right\rangle = -2, \quad \left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \end{array}, \begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \end{array} \right\rangle = 3.$$

Положим, что для целочисленной формальной линейной комбинации поддиаграмм $\sum_{i=1}^k a_i A_i$ по определению выполняется равенство

$$\left\langle \sum_{i=1}^k a_i A_i, \mathcal{G} \right\rangle = \sum_{i=1}^k a_i \langle A_i, \mathcal{G} \rangle.$$

4. Инварианты Васильева, хордовые диаграммы и весовые системы

В [2] В. А. Васильев определил класс инвариантов, выделяемый некоторым свойством конечности.

Определение 3. *Сингулярным узлом* $\mathcal{K}: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ называют погружение ориентированной окружности в $\mathbb{R}^3$, допускающее конечное число двойных точек с трансверсальным пересечением ветвей.

Каждый инвариант узлов $V: K \rightarrow k$ со значениями в поле k можно индуктивно продолжить до инварианта сингулярных узлов по правилу

$$V \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) = V \left(\begin{array}{c} \nearrow \nearrow \\ \nwarrow \nwarrow \end{array} \right) - V \left(\begin{array}{c} \nearrow \nwarrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right)$$

(основное соотношение Васильева).

Определение 4. Инвариант V называется *инвариантом Васильева порядка не выше n* , если он принимает значение 0 на любом сингулярном узле с числом двойных точек, большим, чем n , т. е.

$$V_n(\mathcal{K}_m) = 0 \quad \text{для любых } m > n.$$

Линейное пространство над k инвариантов Васильева порядка не выше n обозначим $\mathcal{V}_n$.

Пусть $\mathcal{K}_n$ — сингулярный узел с n двойными точками. Поставим ему в соответствие хордовую диаграмму $D(\mathcal{K}_n) \in \mathcal{D}_n$. На окружности отметим прообразы каждой двойной точки узла (их будет $2n$). Пары точек окружности, соответствующие одной и той же двойной точке узла, соединим хордой.

Хордовые диаграммы можно определить независимо от сингулярных узлов.

Определение 5. *Хордовой диаграммой* порядка n называется ориентированная окружность с n хордами (различными парами точек) на ней, рассматриваемыми с точностью до сохраняющего ориентацию диффеоморфизма окружности.

Пусть $\mathcal{D}_n$ — линейное пространство хордовых диаграмм с n хордами. Суммой хордовых диаграмм назовём формальную линейную комбинацию над полем k характеристики 0. Будем рассматривать поля $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Рассмотрим следующее линейное фактор-пространство:

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{D}_n / \left\langle \begin{array}{c} \text{[Diagram: Circle with 4 chords forming a square]} \\ \text{[Diagram: Circle with 4 chords forming a square]} - \text{[Diagram: Circle with 4 chords forming a square]} + \text{[Diagram: Circle with 4 chords forming a square]} - \text{[Diagram: Circle with 4 chords forming a square]} \end{array} \right\rangle,$$

где факторизация производится по пространству, порождённому указанными элементами $\mathcal{D}_n$, пунктирные линии означают, что здесь могут лежать концы других хорд, при условии, что они одни и те же на всех диаграммах соотношения. На участках окружности, изображённых сплошной линией, все концы хорд уже указаны.

Пространство $\mathcal{A}_4$ порождается семью нетривиальными хордовыми диаграммами вида

$$\text{[Diagram: Circle with 4 chords forming a square]} = a; \quad \text{[Diagram: Circle with 4 chords forming a square]} = b; \quad \text{[Diagram: Circle with 4 chords forming a square]} = c; \quad \text{[Diagram: Circle with 4 chords forming a square]} = d; \quad \text{[Diagram: Circle with 4 chords forming a square]} = e; \quad \text{[Diagram: Circle with 4 chords forming a square]} = f; \quad \text{[Diagram: Circle with 4 chords forming a square]} = g.$$

Из четырёхчленного соотношения следует, что пространство $\mathcal{A}_4$ трёхмерное. В качестве базисных выберем диаграммы $\{a, d, g\}$, тогда получим следующие равенства:

$$b = -a + d, \quad c = 2a - 3d + g, \quad e = -a + 2d, \quad f = a - 2d + g.$$

Непосредственным следствием определения инвариантов Васильева является тот факт, что значение инварианта $V(\mathcal{K})$ порядка не выше n на сингулярном узле $\mathcal{K}$ с n самопересечениями зависит только от хордовой диаграммы узла $\mathcal{K}$.

Определение 6. Линейная функция $W_n: \mathcal{D}_n \rightarrow k$ называется *весовой системой* порядка n , если она обращается в нуль на

$$\text{[Diagram: Circle with 4 chords forming a square]} \quad \text{и} \quad \text{[Diagram: Circle with 4 chords forming a square]} - \text{[Diagram: Circle with 4 chords forming a square]} + \text{[Diagram: Circle with 4 chords forming a square]} - \text{[Diagram: Circle with 4 chords forming a square]},$$

т. е. определена на $\mathcal{A}_n$.

Весовые системы образуют конечномерное векторное пространство весовых систем $\mathcal{W}_n$, которое сопряжено пространству хордовых диаграмм $\mathcal{A}_n$.

Три базисных весовых системы порядка 4, двойственные указанному базису $\{a, d, g\}$ в $\mathcal{A}_4$, задаются следующей таблицей:

							
W_4^1	0	0	1	0	0	1	1
W_4^2	1	-1	2	0	-1	1	0
W_4^3	0	1	-3	1	2	-2	0

5. Контрпримеры

Для доказательства неинвариантности формул достаточно показать, что они дают различные значения при движениях Рейдемейстера на некоторых узлах. Далее приведены примеры таких узлов и движений.

Рассматриваются ориентированные диаграммы узлов K , полученные из диаграмм некоторых табличных узлов [3] заменой типа некоторых перекрёстков. Соответствующие им диаграммы Гаусса обозначены $\mathcal{G}$. Все перекрёстки плоских диаграмм как-то нумеруются (например, в соответствии с выбранной ориентацией узла). Каждому пронумерованному перекрёстку в K соответствует стрелка в $\mathcal{G}$ с тем же номером. Дополнительно указывается знак, отвечающий типу перекрёстка диаграммы узла, он же соответствует знаку стрелки на диаграмме Гаусса.

Стрелочную поддиаграмму A в диаграмме Гаусса $\mathcal{G}$ будем описывать номерами стрелок, которые их образуют. Стрелки кратности два будем кодировать дублирующимся номером.

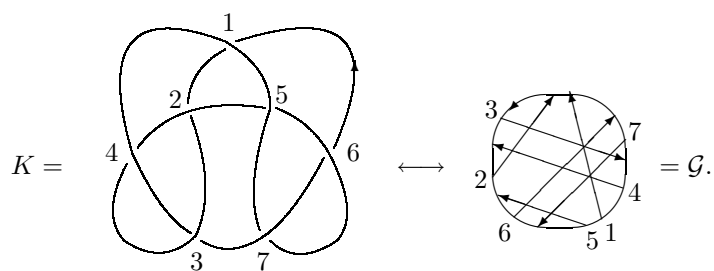
Все возможные вложения стрелочных диаграмм формулы в диаграмму Гаусса $\mathcal{G}$ узла будем выписывать с указанием типа стрелочной диаграммы и её знака. В соответствии с формулой вычислим значение инвариантов.

Далее рассмотрим диаграмму $\tilde{K}$ узла, полученную применением к диаграмме K третьего движения Рейдемейстера. Вычислим соответствующие значения инвариантов по описанной выше схеме. В соответствии с теоремой Рейдемейстера [9] диаграммы эквивалентных узлов можно связать последовательностью движений Рейдемейстера. Сравним значения инвариантов, вычисленные до и после третьего движения Рейдемейстера. Если значения разные, то это показывает, что формулы не задают инвариантов узлов.

5.1. Опровержение формулы Виро—Поляка для инварианта четвёртого порядка

Докажем, что указанная в разделе 2 формула (1) не задаёт инварианта четвёртого порядка. Покажем неинвариантность формулы при третьем движении Рейдемейстера для правого трилистника. Пусть узел 3_1^* задан диаграммой K

с семью пересечениями. Соответствующая диаграмма Гаусса $\mathcal{G}$ и диаграмма K приведены на рисунке:



Эта диаграмма получена из табличной диаграммы узла 7_7 сменой «прохода» на «переход» в первом перекрёстке. Типам перекрёстков, помеченным 1, 3, 4, 6, 7, отвечает знак плюс, а перекрёсткам 2, 5 — знак минус.

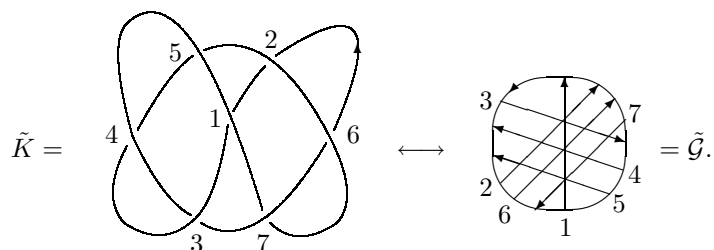
Все возможные вложения стрелочных диаграмм формул (1), (2) в диаграмму Гаусса $\mathcal{G}$ выпишем в виде таблицы:

	: -2347; +3467; -3567;
	: +1347; +1367;
	: -2467; -3457;
	: +1334; +1667; -2334; -2377; +2247; +3346; +3447; -3356; +3557; +3677; +4667; -5667;
	: -1357;
	: +1137; +1337; +1377;
	: +2357;
	: +2356.

Значение $V_4^1(\mathcal{G})$, вычисленное по формулам (1), (2), равно

$$V_4^1(\mathcal{G}_1) = 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 4.$$

Рассмотрим диаграмму $\tilde{K}$ после третьего движения Рейдемейстера, применённого к перекрёстками 1, 2, 5 диаграммы узла K :



Вычислим соответствующие значения инварианта по формулам (1), (2):

$$\begin{aligned}
 \textcircled{+} &: -2347; +2357; +3467; -3567; \\
 \textcircled{+} &: -1237; +1347; -1357; +1367; \\
 \textcircled{+} &: -1267; -2467; +2567; -3457; \\
 \textcircled{+} &: +1227; -2334; +2335; -2377; +2247; -2257; \\
 &+1334; -1335; +1667; +3346; +3447; -3356; \\
 &+3557; +3677; +4667; -5667; \\
 \textcircled{+} &: +1137; +1337; +1377.
 \end{aligned}$$

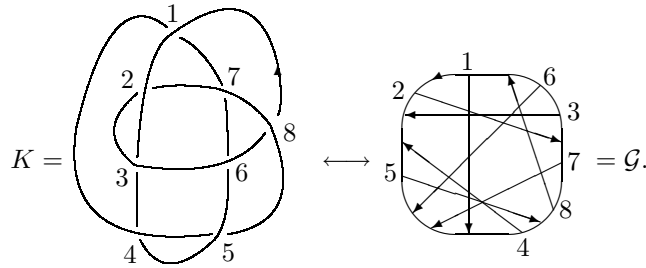
Получаем значение инварианта

$$V_4^1(\tilde{\mathcal{G}}) = 6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 3.$$

Приведённые вычисления показывают неинвариантность формулы при третьем движении Рейдемейстера, т. е. приведённая формула (1) не задаёт инварианта четвёртого порядка.

5.2. Опровержение формулы Тьюриной для двух инвариантов четвёртого порядка

Докажем неинвариантность формулы (3) при третьем движении Рейдемейстера для задания диаграммы с восемью двойными точками связной суммы двух левых трилистников. Пусть узел K задан диаграммой



Эта диаграмма получена из табличной диаграммы узла 8_{21} сменой «прохода» на «переход» в первом перекрёстке. Всем типам перекрёстков диаграммы узла, кроме 6, отвечает знак минус, а перекрёстку 6 — знак плюс.

Выпишем все возможные вложения стрелочных диаграмм формулы (3) в диаграмму Гаусса $\mathcal{G}$ узла в виде таблицы:

$$\begin{aligned}
 \text{[Diagram 1]} &: +2357; +2458; \\
 \text{[Diagram 2]} &: -2467; \\
 \text{[Diagram 3]} &: +2478; \\
 \text{[Diagram 4]} &: +1258; +3578; \\
 \text{[Diagram 5]} &: -2568; \\
 \text{[Diagram 6]} &: -2468; \\
 \text{[Diagram 7]} &: +1245; +2378; -2456; -2678; \\
 \text{[Diagram 8]} &: +1345; -3456; -4568; +4578; \\
 \text{[Diagram 9]} &: +1238; -1268.
 \end{aligned}$$

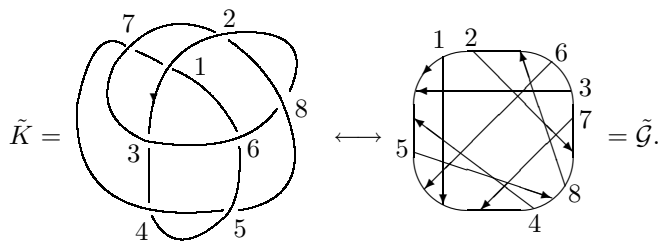
Формула (3) для значения $V_4(\mathcal{G})$ даёт равенство

$$\begin{aligned}
 V_4(\mathcal{G}) &= \frac{1}{2}W_4(a) \cdot 2 + \frac{1}{4}W_4(d) \cdot 2 + \frac{1}{4}W_4(e) \cdot (-2) + \frac{1}{4}W_4(f) \cdot 0 = \\
 &= W_4(a) + \frac{1}{2}W_4(d) - \frac{1}{2} \cdot W_4(e).
 \end{aligned}$$

Применив базисные весовые системы W_4^2 и W_4^3 порядка 4, получим значения соответствующих инвариантов:

$$V_4^2(\mathcal{G}) = \frac{3}{2} \text{ и } V_4^3(\mathcal{G}) = -\frac{1}{2}.$$

Рассмотрим диаграмму $\tilde{K}$ узла, полученную применением к диаграмме K третьего движения Рейдемейстера с использованием перекрёстков 1, 2, 7:



Вычислим соответствующие значения инварианта по формуле (3). Для этого выпишем все возможные вложения стрелочных диаграмм формулы в диаграмму Гаусса $\tilde{\mathcal{G}}$:

$$\begin{aligned}
& \text{Diagram 1} : +2458; \\
& \text{Diagram 2} : +1578; \\
& \text{Diagram 3} : +3578; \\
& \text{Diagram 4} : +1238; \quad -1268; \quad -2568; \quad +2578; \\
& \text{Diagram 5} : -2468; \quad +2478; \\
& \text{Diagram 6} : -2456; \quad +2457; \\
& \text{Diagram 7} : +1345; \quad -3456; \quad -4568; \quad +4578.
\end{aligned}$$

Вычислим значение инварианта:

$$V_4(\tilde{\mathcal{G}}) = \frac{1}{2}W_4(a) \cdot 1 + \frac{1}{4}W_4(d) \cdot 2 + \frac{1}{4}W_4(e) \cdot 0 = \frac{1}{2}W_4(a) + \frac{1}{2}W_4(d).$$

Применяя базисные весовые системы W_4^2 и W_4^3 порядка 4, получим

$$V_4^2(\tilde{\mathcal{G}}) = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad V_4^3(\tilde{\mathcal{G}}) = \frac{1}{2}.$$

Мы видим, что формула (3) не задаёт инвариантов узлов, если в качестве весовой системы W_4 берётся базисная весовая система W_4^2 или базисная весовая система W_4^3 .

Заметим, что табличные значения инварианта четвёртого порядка связной суммы трилистников равны $V_4^2(3_1 \# 3_1) = 1$ и $V_4^3(3_1 \# 3_1) = 0$ и не совпадают ни с одним из полученных по формуле (3) значений.

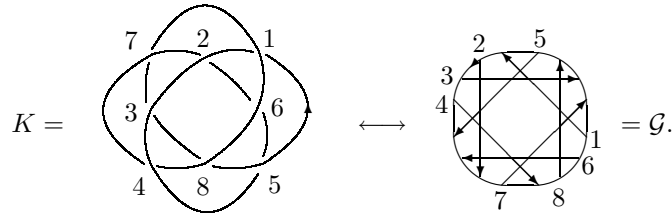
Найдём разность полученных значений и запишем её в базисе $\{a, d, g\}$:

$$V_4(\mathcal{G}_1) - V_4(\mathcal{G}_2) = W_4(a) + \frac{1}{2}W_4(d) - \frac{1}{2}W_4(e) - \frac{1}{2}W_4(a) - \frac{1}{2}W_4(d) = W_4(a) - W_4(d).$$

Таким образом, остаётся возможность получить инвариант, если взять весовую систему, удовлетворяющую равенству $W_4(a) = W_4(d)$. Пусть $\hat{W}_4(a) = \hat{W}_4(d)$ и $\hat{W}_4(g) = 0$. Такая весовая система четвёртого порядка определяется однозначно и равна $\hat{W}_4 = W_4^2 + W_4^3$.

Покажем, что и при выборе такой весовой системы формула (3) не задаёт инварианта узлов.

Рассмотрим правый трилистник, заданный диаграммой K с восемью пересечениями:



Эта диаграмма получена из табличной диаграммы узла 8_{18} сменой «прохода» на «переход» в третьем и шестом перекрёстках. Типам перекрёстков, помеченным 1, 3, 4, 5, 6, 7, отвечает знак плюс, а перекрёсткам 2, 8 — знак минус.

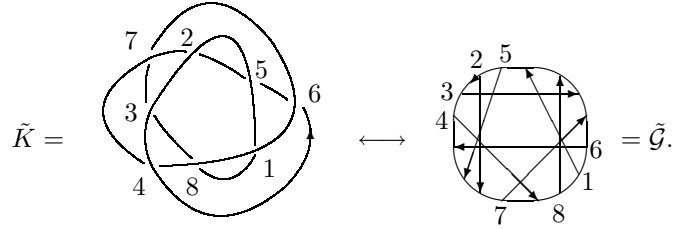
Выпишем все возможные вложения стрелочных диаграмм формулы в диаграмму Гаусса $\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned}
 \text{⊗} &: +1457; \\
 \text{⊗} &: -1237; +2378; -2567; +2568; -3578; -4568; \\
 \text{⊗} &: -1234; -1267; +1268; -1468; +2348; -3458; \\
 \text{⊗} &: +1345; \\
 \text{⊗} &: +1357; +1467; +4567; \\
 \text{⊗} &: -1235; -1358; -2467; -4678.
 \end{aligned}$$

Вычислим значение $\hat{V}_4(\mathcal{G})$ по формуле (3), применив весовую систему $\hat{W}_4$:

$$\hat{V}_4(\mathcal{G}) = \frac{1}{2}\hat{W}_4(c) \cdot 1 + \frac{1}{4}\hat{W}_4(d) \cdot (-4) + \frac{1}{4}\hat{W}_4(e) \cdot 4 + \frac{1}{4}\hat{W}_4(f) \cdot (-4) = \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим диаграмму $\tilde{K}$, полученную из K применением третьего движения Рейдемейстера к перекрёсткам 1, 5, 6:



Выпишем все возможные вложения стрелочных диаграмм формулы в диаграмму Гаусса $\tilde{\mathcal{G}}$:

$$\begin{aligned}
 \text{⊗} &: -3578; +3571; +2378; -1237; \\
 \text{⊗} &: -3458; +3451; +2348; -1234; \\
 \text{⊗} &: -4567; -2467; -4678; +1467.
 \end{aligned}$$

Вычислим соответствующее значение по формуле:

$$V_4(\tilde{\mathcal{G}}) = 0.$$

Таким образом, формула (3) не определяет ни одного инварианта четвёртого порядка при любом выборе ненулевой весовой системы.

6. Таблица значений инвариантов Васильева

Приведём значения инвариантов Васильева до четвёртого порядка включительно для табличных узлов с не более чем девятью двойными точками. Значения считались вручную, использовались определение инвариантов конечного порядка и основное соотношение Васильева.

Большинство значений инвариантов четвёртого порядка совпадает со значениями, полученными по формулам Виро—Поляка для V_4^1 и Тюриной для V_4^2 и V_4^3 . Однако указанные выше контрпримеры и другие различия доказывают, что эти формулы не определяют инвариантов узлов.

K	V_2	V_3	V_4^1	V_4^2	V_4^3
3_1	1	-1	3	0	0
3_1^*	1	1	3	0	0
4_1	-1	0	2	1	$-\frac{3}{2}$
5_1	3	-5	25	0	0
5_2	2	-3	13	0	$-\frac{1}{2}$
6_1	-2	1	7	4	$-\frac{11}{2}$
6_2	-1	1	3	3	-5
6_3	1	0	0	-1	$\frac{5}{2}$
$3_1 \# 3_1^*$	2	0	6	1	0
$3_1 \# 3_1$	2	-2	6	1	0
7_1	6	-14	98	0	0
7_2	3	-6	32	-1	$-\frac{1}{2}$
7_3	5	11	73	1	-3
7_4	4	8	50	2	-5
7_5	4	-8	46	-1	1
7_6	1	-2	8	0	$-\frac{3}{2}$
7_7	-1	-1	-1	0	1
$3_1 \# 4_1$	0	-1	5	0	$-\frac{3}{2}$
8_1	-3	3	13	10	-13
8_2	0	1	3	6	$-\frac{21}{2}$
8_3	-4	0	30	14	-19
8_4	-3	1	21	11	-17
8_5	-1	-3	1	9	-14
8_6	-2	3	7	9	$-\frac{27}{2}$
8_7	2	2	4	-3	7

K	V_2	V_3	V_4^1	V_4^2	V_4^3
8_8	2	1	5	-1	$\frac{7}{2}$
8_9	-2	0	14	8	-14
8_{10}	3	3	15	0	3
8_{11}	-1	2	2	6	$-\frac{19}{2}$
8_{12}	-3	0	14	7	$-\frac{17}{2}$
8_{13}	1	1	-1	-3	6
8_{14}	0	0	4	3	-6
8_{15}	4	-7	37	1	$\frac{1}{2}$
8_{16}	1	-1	-1	-3	6
8_{17}	-1	0	6	4	$-\frac{15}{2}$
8_{18}	1	0	4	2	$-\frac{7}{2}$
8_{19}	5	10	60	0	$\frac{5}{2}$
8_{20}	2	-2	8	0	1
8_{21}	0	1	-1	3	$-\frac{9}{2}$
$4_1 \# 4_1$	-2	0	4	3	-3
$3_1 \# 5_1$	4	-6	28	3	0
$3_1^* \# 5_1$	4	-4	28	3	0
$3_1 \# 5_2$	3	-4	16	2	$-\frac{1}{2}$
$3_1^* \# 5_2$	3	-2	16	2	$-\frac{1}{2}$
9_1	10	-30	270	0	0
9_2	4	-10	62	-4	1
9_3	9	26	228	3	$-\frac{15}{2}$
9_4	7	-19	151	1	-7
9_5	6	15	115	4	$-\frac{23}{2}$
9_6	7	-18	134	-3	$\frac{9}{2}$
9_7	5	-12	78	-4	$\frac{7}{2}$
9_8	0	-2	8	1	-4
9_9	8	-22	180	0	-2
9_{10}	8	22	188	6	-14
9_{11}	4	9	57	1	$-\frac{11}{2}$
9_{12}	1	-3	15	-1	-2
9_{13}	7	18	142	3	$-\frac{15}{2}$
9_{14}	-1	-2	-6	0	$\frac{5}{2}$
9_{15}	2	5	25	-1	$-\frac{5}{2}$

K	V_2	V_3	V_4^1	V_4^2	V_4^3
9 ₁₆	6	14	94	-3	6
9 ₁₇	-2	0	6	2	-2
9 ₁₈	6	-15	107	-2	$\frac{1}{2}$
9 ₁₉	-2	-1	3	1	$\frac{1}{2}$
9 ₂₀	2	-4	20	-1	-1
9 ₂₁	3	6	36	2	$-\frac{13}{2}$
9 ₂₂	-1	1	1	-1	2
9 ₂₃	5	-11	69	-2	3
9 ₂₄	1	-2	6	1	$-\frac{5}{2}$
9 ₂₅	0	-1	11	2	$-\frac{13}{2}$
9 ₂₆	0	-1	-5	0	$\frac{3}{2}$
9 ₂₇	0	-1	3	1	$-\frac{5}{2}$
9 ₂₈	1	0	-2	0	$\frac{3}{2}$
9 ₂₉	1	-2	2	-2	$\frac{7}{2}$
9 ₃₀	-1	-1	5	2	-4
9 ₃₁	2	-2	8	0	1
9 ₃₂	-1	-2	-2	3	$-\frac{7}{2}$
9 ₃₃	1	-1	3	0	0
9 ₃₄	-1	0	2	1	$-\frac{3}{2}$
9 ₃₅	7	-18	150	9	$-\frac{39}{2}$
9 ₃₆	3	7	39	-2	-1
9 ₃₇	-3	-1	13	5	-5
9 ₃₈	6	-14	98	0	0
9 ₃₉	2	4	24	2	-7
9 ₄₀	-1	1	3	3	-5
9 ₄₁	0	1	-9	-3	$\frac{15}{2}$
9 ₄₂	-2	0	10	5	-8
9 ₄₃	1	2	14	2	$-\frac{13}{2}$
9 ₄₄	0	-1	-1	-2	$\frac{7}{2}$
9 ₄₅	2	-4	20	-1	-1
9 ₄₆	-2	3	3	6	$-\frac{15}{2}$
9 ₄₇	-1	-2	-6	0	$\frac{5}{2}$
9 ₄₈	3	5	29	3	-6
9 ₄₉	6	14	102	3	-6

K	V_2	V_3	V_4^1	V_4^2	V_4^3
$4_1 \# 5_1$	2	-5	27	-2	$-\frac{3}{2}$
$4_1 \# 5_2$	1	-3	15	-1	-2
$3_1 \# 6_1$	-1	0	10	2	$-\frac{11}{2}$
$3_1^* \# 6_1$	-1	2	10	2	$-\frac{11}{2}$
$3_1 \# 6_2$	0	0	6	2	-5
$3_1^* \# 6_2$	0	2	6	2	-5
$3_1 \# 6_3$	2	-1	3	0	$\frac{5}{2}$

Литература

- [1] Аллёнов С. В., Лексин В. П. О диаграммных формулах инвариантов узлов // Тр. МИРАН им. В. А. Стеклова. — 2006. — Т. 252 (в печати).
- [2] Васильев В. А. Топология дополнений к дискриминантам. — М.: Фазис, 1997.
- [3] Математическая энциклопедия. — М.: Советская энциклопедия, 1985.
- [4] Тюрина С. Д. Диаграммные формулы типа Виро—Поляка для инвариантов конечного порядка // Успехи мат. наук. — 1999. — Т. 54, вып. 3. — С. 187—188.
- [5] Bar-Natan D. On the Vassiliev knot invariants // Topology. — 1995. — Vol. 34. — P. 423—475.
- [6] Lannes J. Sur les invariants de Vassiliev de degré inférieur ou égal à 3 // Enseign. Math. — 1993. — Vol. 39. — P. 295—316.
- [7] Östlund O.-P. A combinatorial approach to Vassiliev knot invariants. — Preprint Uppsala University. — 1997.
- [8] Polyak M., Viro O. Gauss diagram formulas for Vassiliev invariants // Int. Math. Res. Notices. — 1994. — Vol. 11. — P. 445—453.
- [9] Reidemeister K. Knot Theory. — New York: Chelsea Publ., 1948.
- [10] Vassiliev V. A. Combinatorial formulas for cohomology of knot spaces // Moscow Math. J. — 2001. — Vol. 1, no. 1. — P. 91—123.

