

Новые топологические модели компактов Банаха—Мазура*

С. А. АНТОНЯН

Национальный автономный
университет Мексики

e-mail: antonyan@servidor.unam.mx

УДК 515.122.252

Ключевые слова: компакт Банаха—Мазура, пространство орбит, многообразия гильбертова куба.

Аннотация

Найдены достаточные условия для того, чтобы для действия ортогональной группы $O(n)$ на гильбертовом кубе Q пространство орбит $Q/O(n)$ было гомеоморфно компакт Банаха—Мазура $BM(n)$. Этот результат применён для получения простых топологических моделей $BM(2)$.

Abstract

S. A. Antonyan, New topological models for Banach–Mazur compacta, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 5, pp. 19–31.

Sufficient conditions are given for an action of the orthogonal group $O(n)$ on the Hilbert cube Q in order that the corresponding orbit space $Q/O(n)$ be homeomorphic to the Banach–Mazur compactum $BM(n)$. This result is applied to obtain simple topological models for $BM(2)$.

1. Введение

Исходное определение компактов Банаха—Мазура $BM(n)$, $n \geq 2$, было дано в [8]: $BM(n)$ есть пространство классов изометрий $[E]$ n -мерных банаховых пространств E , снабжённых хорошо известной метрикой Банаха—Мазура

$$d([E], [F]) = \ln \inf \{ \|T\| \cdot \|T^{-1}\| \mid T: E \rightarrow F \text{ есть линейный изоморфизм} \}.$$

Топология компактов Банаха—Мазура по-прежнему представляет интерес, и следующие вопросы А. Пельчиньского Дж. Вест включил в 1990 году в свой список проблем (см. [18, проблема 899]):

- 1) являются ли компакты $BM(n)$ Банаха—Мазура AR-пространствами?
- 2) являются ли они гильбертовыми кубами?

*Автор был частично поддержан грантом IN105803-3 Программы Национального автономного университета Мексики по поддержке исследовательских проектов и новых технологий (PAPIIT-UNAM).

Утвердительный ответ на вопрос Пельчиньского, касающийся AR, был получен как простая комбинация некоторых результатов П. Фабеля и автора (см. [5, 11]). Вопрос Пельчиньского о том, будут ли компакты $BM(n)$ гомеоморфны гильбертову кубу, остаётся открытым для всех $n \geq 3$, но автором [6] был дан отрицательный ответ для случая $n = 2$. Прорыв в решении дало представление компактов Банаха—Мазура $BM(n)$ как пространств орбит подходящего действия ортогональной группы $O(n)$ на гильбертовом кубе. Эта новая модель $BM(n)$ была открыта в [4] и опубликована в [6, теорема 4, замечание 1].

В этой статье мы продолжаем изучение $O(n)$ -действий на гильбертовом кубе, пространства орбит которых гомеоморфны компакту Банаха—Мазура $BM(n)$, $n \geq 2$ (см. теорема 3.3). Особенно простые топологические модели получены для $BM(2)$ (см. следствия 4.2 и 4.3).

Так как упомянутое представление $BM(n)$ как пространство орбит $O(n)$ -действия на гильбертовом кубе понадобится дальше, коротко напомним его.

Обозначим через $\mathcal{B}(n)$, $n \geq 2$, гиперпространство всех центрально симметричных (относительно начала) компактных выпуклых тел в $\mathbb{R}^n$. Мы рассматриваем хаусдорфову метрическую топологию на $\mathcal{B}(n)$ и естественно индуцированное действие полной линейной группы $GL(n)$ на нём. Хорошо известно, что $BM(n)$ гомеоморфен пространству орбит $\mathcal{B}(n)/GL(n)$ (см. [18, с. 544]).

Согласно классической теореме Ф. Джона [13], каждое компактное выпуклое тело $A \in \mathcal{B}(n)$ допускает единственный эллипсоид минимального объёма, содержащий A .

Через $L(n)$ мы обозначим подмножество $\mathcal{B}(n)$, состоящее из всех тел $A \in \mathcal{B}(n)$, для которых обычный евклидов единичный шар

$$\mathbb{B}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$$

является эллипсоидом минимального объёма, содержащим A . Легко видеть, что $L(n)$ есть $O(n)$ -инвариантное подмножество в $\mathcal{B}(n)$.

Некоторые базисные свойства $O(n)$ -пространства $L(n)$, $n \geq 2$, изучались в [6, 7]; в частности, $L(n)$ есть $O(n)$ -AR и гомеоморфно гильбертову кубу.

Напомним, что глобальный $O(n)$ -срез для $GL(n)$ -пространства $\mathcal{B}(n)$ — это $O(n)$ -инвариантное замкнутое подмножество $S \subset \mathcal{B}(n)$, такое что $S \cap gS = \emptyset$ для всех $g \in GL(n) \setminus O(n)$ и для каждого $A \in \mathcal{B}(n)$ имеется такой элемент $h \in GL(n)$, что $hA \in S$.

Второе утверждение следующей теоремы (см. [4, 6]) представляет $BM(n)$, $n \geq 2$, как пространство орбит естественного $O(n)$ -действия на гильбертовом кубе и имеет для последующего важное значение.

Теорема 1.1.

1. $L(n)$ есть глобальный $O(n)$ -срез для $GL(n)$ -пространства $\mathcal{B}(n)$.
2. $BM(n) \cong L(n)/O(n)$.
3. Существует такая $O(n)$ -эквивариантная ретракция $r: \mathcal{B}(n) \rightarrow L(n)$, что для каждого $A \in \mathcal{B}(n)$ найдётся линейный оператор $T \in GL(n)$, для которого $r(A) = T(A)$.

Доказательство. Первое утверждение доказано в [6, теорема 4, замечание 1]. Второе утверждение есть немедленное следствие первого (см. [6, следствие 1, замечание 1]). Третье утверждение есть простая комбинация утверждения 1 и результата Абелса [3, теорема 2.1]. $\square$

В дальнейшем мы используем для компакта Банаха—Мазура именно модель

$$\text{BM}(n) = L(n)/O(n),$$

а также следующие обозначения:

$$L_0(n) = L(n) \setminus \{\mathbb{B}^n\}, \quad \text{BM}_0(n) = L_0(n)/O(n).$$

Другие топологические модели $\text{BM}(n)$ читатель может найти в [6, 7].

2. Предварительные сведения

За базисными понятиями теории G -пространств мы отсылаем читателя прежде всего к [9, 16].

Под действием компактной группы Ли G на пространстве X мы понимаем такое непрерывное отображение $(g, x) \rightarrow gx$ произведения $G \times X$ в X , что $ex = x$ и $(gh)x = g(hx)$, где $x \in X$, $g, h \in G$ и e есть единица в G . Пространство X вместе с фиксированным действием группы G называется G -пространством.

Если X есть G -пространство, то для любого $x \in X$ через G_x мы обозначим стабилизатор x , определённый условием $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$. Для подмножества $S \subset X$ через $G(S)$ обозначается насыщение S , т. е. $G(S) = \{gs \mid g \in G, s \in S\}$. В частности, для точки $x \in X$ $G(x)$ обозначает её G -орбиту $\{gx \in X \mid g \in G\}$. Если $G(S) = S$, то S называют инвариантным подмножеством в X . Множество всех орбит в X , снабжённое фактор-топологией, называется пространством орбит для X и обычно обозначается X/G . Если X/G состоит из одной точки, мы скажем, что G действует транзитивно на X .

Непрерывное отображение G -пространств $f: X \rightarrow Y$ называется G -эквивариантным отображением или, для краткости, G -отображением, если $f(gx) = gf(x)$ для каждого $x \in X$ и $g \in G$. Если к тому же $G_x = G_{f(x)}$ для всех $x \in X$, то f называется изовариантным отображением.

Для каждой подгруппы $H \subset G$ множество H -неподвижных точек X^H определено как множество $\{x \in X \mid H \subset G_x\}$.

Семейство всех подгрупп в G , которые сопряжены с H обозначается через (H) , т. е. $(H) = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$. Мы назовём (H) G -орбитным типом (или просто орбитным типом).

Так как $G_{gx} = gG_xg^{-1}$ для любого $x \in X$ и $g \in G$, мы имеем $(G_x) = \{G_{gx} \mid g \in G\}$.

Мы скажем, что орбитный тип (H) встречается в X , если $(G_x) = (H)$ для некоторого $x \in X$. Через $\text{Orb } X$ обозначается множество всех орбитных типов, встречающихся в X .

Для подгруппы $H \subset G$ через G/H будет обозначаться G -пространство классов смежности $\{gH \mid g \in G\}$ относительно действия, индуцированного левыми сдвигами.

Совместимая метрика ρ на G -пространстве X называется инвариантной или G -инвариантной, если $\rho(gx, gy) = \rho(x, y)$ для всех $x, y \in X$ и $g \in G$.

Если G есть компактная группа Ли и X — метризуемое G -пространство, снабжённое G -инвариантной метрикой ρ , то формула

$$\rho^*(G(x), G(y)) = \inf\{\rho(x', y') \mid x' \in G(x), y' \in G(y)\}$$

определяет метрику ρ^* , совместимую с фактор-топологией X/G (см., например, [16, предложение 1.1.12]).

Пусть $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ — G -отображения. G -гомотопия f_0 в f_1 есть гомотопия в обычном смысле, которая является G -отображением на каждом шаге деформации. G -отображение $f: X \rightarrow Y$ есть G -гомотопическая эквивалентность, если имеется такое G -отображение $f': Y \rightarrow X$, что $f'f$ G -гомотопно 1_X и ff' G -гомотопно 1_Y . Если имеется G -гомотопическая эквивалентность $f: X \rightarrow Y$, мы скажем что X и Y имеют один и тот же эквивариантный гомотопический тип или G -гомотопический тип.

G -пространство X называется строго G -стягиваемым, если существуют G -гомотопия $f_t: X \rightarrow X$, $t \in [0, 1]$, и G -неподвижная точка $a \in X$, такие что f_0 есть тождественное отображение X и $f_t(x) = a$, если и только если $(x, t) \in \{(x, 1), (a, t)\}$. Соответствующее неэквивариантное понятие было введено Майклом в [14].

Для данной топологической группы G мы обозначим через G -AR (G -ANR) класс всех G -эквивариантных абсолютных (соответственно окрестностных) ретрактов для всех метризуемых G -пространств. Эти понятия прямо распространяют соответствующие понятия для обычных AR (соответственно ANR) на случай G -пространств. Дальнейшее обсуждение G -ANR-пространств читатель может найти, например, в [1, 2].

Приводимая ниже теорема Джеймса и Сигала [12] будет играть важную роль в доказательствах следующего раздела.

Теорема 2.1 (Джеймс, Сигал). Пусть G — компактная группа Ли, и пусть $f: T \rightarrow Z$ — G -отображение G -ANR-пространств. Тогда f есть G -гомотопическая эквивалентность, если и только если для каждой замкнутой подгруппы $K \subset G$ ограничение $f^K: T^K \rightarrow Z^K$ отображения f на множество K -неподвижных точек T^K есть обычная гомотопическая эквивалентность.

Дальше для данного пространства X мы будем обозначать через $\text{Cone}(X)$ фактор-пространство $[0, 1] \times X / \{0\} \times X$. Образ точки $(t, x) \in [0, 1] \times X$ при канонической проекции $p: [0, 1] \times X \rightarrow \text{Cone}(X)$ будет обозначаться tx , и мы будем просто писать θ (с намёком на ноль) вместо $0x$; это — вершина конуса.

Если X есть G -пространство для компактной группы G , то $\text{Cone}(X)$ становится G -пространством по отношению к действию, определённом следующим образом: $g(tx) = t(gx)$, $g \in G$, $tx \in \text{Cone}(X)$.

Пусть (X, d) — метрическое пространство. Через $\text{ехр } X$ мы обозначим гиперпространство всех непустых компактных подмножеств в X , снабжённое хаусдорфовой метрической топологией. Именно, для $A, B \in \text{ехр } X$ хаусдорфово расстояние $d_H(A, B)$ определено как число

$$\max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\}.$$

Если к тому же X есть G -пространство с компактной действующей группой G , то $\text{ехр } X$ становится G -пространством, снабжённым естественно индуцированным действием G , т. е. для $g \in G$ и $A \in \text{ехр } X$ gA определено как множество $\{ga \mid a \in A\}$. Если d — инвариантная метрика, то d_H также инвариантна. Через $\text{ехр}_0 X$ будем обозначать дополнение $(\text{ехр } X) \setminus \{X\}$.

Как обычно, мы будем обозначать через $O(n)$ ортогональную группу. Мы сохраним букву Q для гильбертова куба $\prod_{k=1}^{\infty} I_k$, где $I_k = [0, 1]$.

Многообразие, смоделированное над гильбертовым кубом, или Q -многообразие, есть сепарабельное метризуемое пространство, которое допускает открытое покрытие множествами, гомеоморфными открытым подмножествам Q . Говорят, что Q -многообразие $[0, 1)$ -стабильно, если оно гомеоморфно своему произведению с полуинтервалом $[0, 1)$ (см. [10, глава V]).

3. Компакт Банаха—Мазура как пространство орбит гильбертова куба

Пусть G — компактная группа Ли и X есть G -пространство. Допустим, что $(H_1), (H_2), \dots$ есть последовательность всех орбитных типов, встречающихся в X . Зафиксируем представителя в каждом орбитном типе (H_i) , скажем подгруппу H_i .

Пусть $\text{Cone}(G/H_i)$ — конус над G/H_i . Определим

$$\Pi(X) = \prod_{i=1}^{\infty} Q(H_i), \quad Q(H_i) = (\text{Cone}(G/H_i))^{\infty},$$

где каждое произведение снабжено диагональным действием.

Обозначим $\Pi_0(X) = \Pi(X) \setminus \{a\}$, где a — G -неподвижная точка в $\Pi(X)$, у которой все координаты — вершины соответствующих конусов. Так как $\text{Cone}(G/H_i) \in \text{AR}$, $i \geq 1$ (см., например, [15, теорема 5.4.2]), из результата Веста [17] следует, что $\Pi(X)$ есть гильбертов куб.

Если $G = O(n)$ и $X = L_0(n)$, мы будем писать $\Pi(n)$ вместо $\Pi(L_0(n))$ и $\Pi_0(n)$ вместо $\Pi_0(L_0(n))$.

Ниже нам понадобятся следующие две леммы, установленные в [6].

Лемма 3.1 ([6, лемма 4]). Пусть G — компактная группа Ли и X — метризуемое G -пространство. Тогда существует изовариантное отображение $f: X \rightarrow \Pi(X)$.

Лемма 3.2 ([6, теорема A1]). Пусть G — компактная группа Ли, X_i , $i = 1, 2, \dots$, — последовательность метризуемых компактных G -AR-пространств и $a_i \in X_i$ — G -неподвижная точка. Допустим, что выполнено следующее условие: если H — стабилизатор, встречающийся в некотором X_i , тогда существует бесконечно много индексов j , таких что $X_j \setminus \{a_j\}$ содержит точку со стабилизатором, большим или равным H . Пусть $a = (a_i)$ и $X = \left(\prod_{i=1}^{\infty} X_i \right) \setminus \{a\}$. Тогда для каждой замкнутой подгруппы $N \subset G$ пространство N -орбит X/N есть Q -многообразие.

Следующая теорема является главным результатом статьи.

Теорема 3.3. Пусть ортогональная группа $O(n)$ действует на гильбертовом кубе X таким образом, что:

- а) X есть $O(n)$ -AR с единственной $O(n)$ -неподвижной точкой $*$;
- б) X строго $O(n)$ -стягиваемо к $*$;
- в) для замкнутой подгруппы $H \subset O(n)$ имеем, что $X^H = \{*\}$, если и только если H действует транзитивно на единичной сфере S^{n-1} , и X^H гомеоморфно гильбертову кубу, когда $X^H \neq \{*\}$;
- г) для любой замкнутой подгруппы $H \subset O(n)$ пространство H -орбит X_0/H есть Q -многообразие, где $X_0 = X \setminus \{*\}$.

Тогда для каждой замкнутой подгруппы $H \subset O(n)$ пространства H -орбит X/H и $L(n)/H$ гомеоморфны. В частности, пространство орбит $X/O(n)$ гомеоморфно компакту Банаха—Мазура $BM(n)$.

Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, мы докажем несколько лемм.

Лемма 3.4. Пусть $K \subset O(n)$ — замкнутая подгруппа. Тогда эквивалентны следующие условия:

- 1) K действует нетранзитивно на сфере S^{n-1} ;
- 2) $(\exp_0 S^{n-1})^K \neq \emptyset$;
- 3) $L_0(n)^K \neq \emptyset$;
- 4) $\Pi_0(n)^K \neq \emptyset$.

Доказательство. Докажем импликацию (1) $\implies$ (2). Если K действует нетранзитивно на сфере S^{n-1} , то существует K -инвариантное собственное подмножество $A \subset S^{n-1}$, поэтому $A \in (\exp_0 S^{n-1})^K$.

Проверим импликацию (2) $\implies$ (3). Если $C \in (\exp_0 S^{n-1})^K$, то либо $(-C) \cup C \neq S^{n-1}$, либо $(-C) \cap C \neq \emptyset$. Значит, по меньшей мере одно из множеств $(-C) \cup C$ и $(-C) \cap C$ принадлежит $(\exp_0 S^{n-1})^K$ и является центрально симметричным. Значит, существует множество $A \in (\exp_0 S^{n-1})^K \neq \emptyset$ с $A = -A$.

Определим

$$\varphi(A) = \text{conv}(A \cup B(0, 1/2)),$$

где $B(0, 1/2)$ — замкнутый $1/2$ -шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат, а conv означает выпуклую оболочку. Конечно, $\varphi(A)$ не эллипсоид, поскольку из $A \neq S^{n-1}$ следует, что граница $\partial(\varphi(A))$ содержит нетривиальный линейный сегмент. Положим теперь $f = r\varphi$, где $r: \mathcal{B}(n) \rightarrow L(n)$ является $O(n)$ -эквивариантным отображением из теоремы 1.1. Так как $\varphi(A)$ не эллипсоид, а r сохраняет $GL(n)$ -орбиту, мы видим, что $f(A)$ не единичный шар $\mathbb{B}^n$. Таким образом, $f(A) \in L_0(n)$. Так как r $O(n)$ -эквивариантно, мы получаем $f(A) \in L_0(n)^K$, что и требовалось.

Проверим справедливость импликации (3) $\implies$ (4). Пусть $K \subset O(n)$ — замкнутая подгруппа и $L_0(n)^K \neq \emptyset$. Тогда имеется такой орбитный тип (H) в $L_0(n)$, что $K \subset gHg^{-1}$ для некоторого $g \in O(n)$, поэтому $(O(n)/H)^K \neq \emptyset$. Отсюда без труда получаем, что $\Pi_0(n)^K \neq \emptyset$.

Докажем (4) $\implies$ (1). Пусть $K \subset O(n)$ — замкнутая подгруппа и $\Pi_0(n)^K \neq \emptyset$. Тогда имеется такой орбитный тип (H) в $L_0(n)$, что $(O(n)/H)^K \neq \emptyset$. Следовательно, $K \subset gHg^{-1}$ для некоторого $g \in O(n)$. Так как $(H) \in \text{Orb } L_0(n)$, существует тело $A \in L_0(n)$, для которого $O(n)_A = H$. Из этого следует, что $K \subset O(n)_{gA}$, и тогда контактное множество $(gA) \cap S^{n-1}$ — непустое K -инвариантное собственное подмножество S^{n-1} . Значит, действие K на S^{n-1} нетранзитивно. $\square$

Лемма 3.5. Допустим, что X есть $O(n)$ -пространство, имеющее только одну $O(n)$ -неподвижную точку $*$, и для замкнутой подгруппы $H \subset O(n)$ имеем, что $X^H = \{*\}$, если и только если H действует транзитивно на единичной сфере S^{n-1} . Тогда существует $O(n)$ -отображение $f: X_0 \rightarrow \Pi_0(n)$, где $X_0 = X \setminus \{*\}$.

Доказательство. По лемме 3.1 существует $O(n)$ -изовариантное отображение $h: X_0 \rightarrow \Pi(X_0)$. Из изовариантности h немедленно следует, что $h(X_0) \subset \Pi_0(X_0)$. Следовательно, достаточно доказать, что существует $O(n)$ -отображение $\varphi: \Pi_0(X_0) \rightarrow \Pi_0(n)$.

Пусть $\text{Orb } X_0 = \{(K_1), (K_2), \dots\}$ и $\text{Orb } L_0(n) = \{(H_1), (H_2), \dots\}$. Для любого $(K_j) \in \text{Orb } X_0$ имеем $X_0^{K_j} \neq \emptyset$, значит, $X^{K_j} \neq \{*\}$. По предположению из этого следует, что K_j действует нетранзитивно на сфере S^{n-1} , и значит, согласно лемме 3.4, $L_0(n)^{K_j} \neq \emptyset$. Таким образом, существует такой орбитный тип $(H(j)) \in \text{Orb } L_0(n)$, что $K_j \subset g^{-1}H(j)g$ для некоторого $g \in O(n)$. Зафиксируем для данного (K_j) такую подгруппу $H(j) \subset O(n)$. Это определяет $O(n)$ -отображение $f_j: O(n)/K_j \rightarrow O(n)/H(j)$, допускающее очевидное $O(n)$ -эквивариантное продолжение $f'_j: \text{Cone}(O(n)/K_j) \rightarrow \text{Cone}(O(n)/H(j))$. Ясно, что f'_j таково, что если $y \in \text{Cone}(O(n)/K_j)$ и $f'_j(y) = \theta_j$, то $y = \theta_j$. В свою очередь, каждое отображение f'_j индуцирует $O(n)$ -отображение $F_j: Q(K_j) \rightarrow Q(H(j))$, для которого если $z \in Q(K_j)$ и $F_j(z) = \theta_j$, то $z = \theta_j$.

Определим $O(n)$ -отображение $\Phi: \Pi_0(X_0) \rightarrow \prod_{j=1}^{\infty} Q(H(j))$ как декартово произведение отображений F_j , $j \geq 1$.

Из определения $Q(H_i)$ следует, что для любого конечного или счётного кардинала α степень $(Q(H_i))^\alpha$ канонически $O(n)$ -гомеоморфна $Q(H_i)$.

Следовательно, $\prod_{j=1}^{\infty} Q(H(j))$ $O(n)$ -гомеоморфно некоторому инвариантному подмножеству $\prod_{i=1}^{\infty} Q(H_i)$, поскольку

$$\{(H(1)), (H(2)), \dots\} \subset \{(H_1), (H_2), \dots\}.$$

Значит, Φ можно считать $O(n)$ -отображением из $\Pi_0(X_0)$ в $\prod_{i=1}^{\infty} Q(H_i) = \Pi(n)$.

Остаётся увидеть, что на самом деле образ Φ лежит в $\Pi_0(n)$. Действительно, пусть $x = (x_1, x_2, \dots)$ — точка $\Pi_0(X_0)$. Тогда $x_j \in Q(K_j)$, $j = 1, 2, \dots$, и $x_m \neq \theta_m$ по меньшей мере для одного индекса m . Следовательно, $F_m(x_m) \neq \theta_m$, что даёт $\Phi(x) \neq \theta$, как и требовалось. $\square$

Лемма 3.6. $O(n)$ -пространство $\Pi(n)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы 3.3.

Доказательство. Проверим выполнение свойства а). Поскольку $O(n)/H_i \in O(n)$ -ANR [16, с. 27], мы получаем, что $\text{Cone}(O(n)/H_i) \in O(n)$ -AR (см. [6, лемма 3]). Следовательно, $Q(H_i) \in O(n)$ -AR, $i \geq 1$, и значит, $\Pi(n) \in O(n)$ -AR. Ясно, что точка $\theta \in \Pi(n)$, каждая координата которой равна вершине соответствующего конуса, есть единственная $O(n)$ -неподвижная точка.

Проверим, что справедливо свойство б). Благодаря своей конической структуре $\Pi(n)$ строго $O(n)$ -стягиваемо в θ . Действительно, отображение

$$F: \Pi(n) \times [0, 1] \rightarrow \Pi(n),$$

определённое равенством

$$F((x_1, x_2, \dots), t) = ((1-t)x_1, (1-t)x_2, \dots), \quad (x_1, x_2, \dots) \in \Pi(n), \quad t \in [0, 1],$$

есть строгое $O(n)$ -стягивание в точку $\theta \in \Pi(n)$.

Проверим, что выполняется свойство в). Пусть $K \subset O(n)$ — замкнутая подгруппа и $\Pi(n)^K \neq \{\theta\}$. Тогда $\Pi_0(n)^K \neq \emptyset$, и по лемме 3.4 K действует нетранзитивно на сфере S^{n-1} .

Покажем, что $\Pi(n)^K$ есть гильбертов куб, когда $\Pi(n)^K \neq \{\theta\}$. В самом деле, нетрудно увидеть, что если $\Pi_0(n)^K \neq \emptyset$, то имеется орбитный тип (H_i) в $L_0(n)$, такой что $(O(n)/H_i)^K \neq \emptyset$. Так как $O(n)/H_i \in O(n)$ -ANR, мы получаем, что $(O(n)/H_i)^K$ есть непустой ANR (см. [1]). Следовательно,

$$(\text{Cone}(O(n)/H_i))^K = \text{Cone}((O(n)/H_i)^K)$$

есть AR, содержащий более одной точки. Значит, согласно результату Веста [17], счётное произведение

$$Q(H_i)^K = (\text{Cone}(O(n)/H_i)^K)^\infty$$

есть гильбертов куб. Так как

$$\Pi(n)^K = \prod_{i=1}^{\infty} Q(H_i)^K,$$

мы получаем, что и $\Pi(n)^K$ есть гильбертов куб. В частности, $\Pi(n)$ есть гильбертов куб.

Свойство г), т. е. факт, что $\Pi_0(n)/H$ есть Q -многообразие, прямо следует из леммы 3.2. $\square$

Лемма 3.7. Пусть X — $O(n)$ -пространство, удовлетворяющее условиям а)—в) теоремы 3.3, и пусть $X_0 = X \setminus \{*\}$. Тогда X_0 и $\Pi_0(n)$ имеют один и тот же $O(n)$ -гомотопический тип.

Доказательство. В действительности мы докажем, что каждое $O(n)$ -отображение $f: X_0 \rightarrow \Pi_0(n)$ есть $O(n)$ -гомотопическая эквивалентность. По лемме 3.5 существует $O(n)$ -отображение из X_0 в $\Pi_0(n)$, это и даст требуемое.

Для того чтобы доказать, что $O(n)$ -отображение $f: X_0 \rightarrow \Pi_0(n)$ есть $O(n)$ -гомотопическая эквивалентность, мы применим теорему Джеймса—Сигала 2.1. В нашем случае $G = O(n)$, $T = X_0$ и $Z = \Pi_0(n)$.

По условию $X \in O(n)$ -AR, откуда $X_0 \in O(n)$ -ANR. Пусть $K \subset O(n)$ — такая замкнутая подгруппа, что $X_0^K \neq \emptyset$. Из эквивариантности f следует, что $X_0^K \subset \Pi_0(n)^K$, и значит, $\Pi_0(n)^K \neq \emptyset$.

Обратно, если $\Pi_0(n)^K \neq \emptyset$, то по лемме 3.4 K действует нетранзитивно на сфере S^{n-1} . Тогда по условию $X_0^K \neq \emptyset$.

Далее, если $X_0^K \neq \emptyset$, то K действует нетранзитивно на сфере S^{n-1} . В этом случае по условию X^K есть гильбертов куб. Но по лемме 3.6 $\Pi(n)^K$ также есть гильбертов куб. Следовательно, X_0^K и $\Pi_0(n)^K$ оба стягиваемы.

Применяя упомянутую теорему Джеймса—Сигала, мы заканчиваем доказательство. $\square$

Лемма 3.8. Пусть X — $O(n)$ -пространство, удовлетворяющее всем требованиям теоремы 3.3. Тогда для каждой замкнутой подгруппы $H \subset O(n)$ пространства H -орбит X/H и $\Pi(n)/H$ гомеоморфны.

Доказательство. В силу условия г) X_0/H есть Q -многообразие. Из того, что имеется $O(n)$ -стягивание X в его $O(n)$ -неподвижную точку $*$, следует существование *собственной деформации* (прообраз компактного множества компактен) в бесконечность:

$$X_0/H \times [0, 1) \rightarrow X_0/H.$$

Тогда согласно теореме Вонга [19] X_0/H является $[0, 1)$ -стабильным Q -многообразием.

Тот факт, что $\Pi_0(n)/H$ есть Q -многообразие, прямо следует из леммы 3.2. Его $[0, 1)$ -стабильность получается как выше, поскольку по лемме 3.6 $\Pi(n)$ строго $O(n)$ -стягиваемо в его единственную $O(n)$ -неподвижную точку.

Наконец, из леммы 3.7 следует, что X_0/H и $\Pi_0(n)/H$ имеют один и тот же гомотопический тип. Значит, пространства X_0/H и $\Pi_0(n)/H$ являются гомотопически эквивалентными $[0, 1)$ -стабильными Q -многообразиями. Согласно теореме Чепмена [10, теорема 21.2] такие пространства гомеоморфны. $\square$

Следствие 3.9. Пусть X и Y — два $O(n)$ -пространства, удовлетворяющие всем условиям теоремы 3.3. Тогда для каждой замкнутой подгруппы $H \subset O(n)$ пространства H -орбит X/H и Y/H гомеоморфны.

Доказательство. Согласно лемме 3.8 оба пространства H -орбит X/H и Y/H гомеоморфны $\Pi(n)/H$. $\square$

Лемма 3.10. $O(n)$ -пространство $L(n)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3.3.

Доказательство. Проверим справедливость свойства а). В [6, теорема 4, замечание 1] доказано, что $L(n) \in O(n)$ -AR. Ясно, что евклидов единичный шар $\mathbb{B}^n$ есть единственная $O(n)$ -неподвижная точка в $L(n)$.

Убедимся, что выполняется условие б), т. е. $L(n)$ строго $O(n)$ -стягиваемо к своей $O(n)$ -неподвижной точке $\mathbb{B}^n$. Действительно,

$$F: L(n) \times [0, 1] \rightarrow L(n),$$

определённое равенством

$$F(A, t) = t\mathbb{B}^2 + (1 - t)A, \quad A \in L(n), \quad t \in [0, 1],$$

есть строгое $O(n)$ -стягивание $L(n)$ к его точке $\mathbb{B}^n$, где $t\mathbb{B}^2 + (1 - t)A$ есть сумма Минковского $\{tx + (1 - t)y \mid x \in \mathbb{B}^2, y \in A\}$.

Проверим выполнение свойства в). Согласно лемме 3.4 для замкнутой подгруппы $K \subset O(n)$ верно, что $L_0(n)^K \neq \emptyset$, если и только если K действует нетранзитивно на сфере S^{n-1} . Но если $L_0(n)^K \neq \emptyset$, тогда $L(n)^K$ есть гильбертов куб (в частности, $L(n)$ есть гильбертов куб), это было доказано в [7, теорема 1.4].

Свойство г), т. е. факт, что $L_0(n)/H$ есть Q -многообразие, доказан в [7, теорема 1.3]. $\square$

Доказательство теоремы 3.3. Так как $L(n)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3.3 (см. лемму 3.10), для каждой замкнутой подгруппы $H \subset O(n)$ по следствию 3.9 пространства H -орбит X/H и $L(n)/H$ гомеоморфны. В частности, пространства орбит $X/O(n)$ и $L(n)/O(n) = \text{BM}(n)$ гомеоморфны. $\square$

4. Простые топологические модели для $\text{BM}(2)$

Для каждого целого $k \geq 1$ пусть

$$\mu_k: O(2) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

обозначает естественное действие ортогональной группы $O(2)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$, ядром которого служит циклическая подгруппа $\mathbb{Z}_k$ в $O(2)$. Более точно, отождествим $\mathbb{R}^2$ с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$, и пусть $\sigma: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — комплексное сопряжение. Тогда ортогональная группа $O(2)$ есть дизъюнктное объединение $SO(2) \sqcup SO(2) \cdot \sigma$, где $SO(2)$ есть группа всех вращений $\mathbb{C}$ вокруг начала, а

$SO(2) \cdot \sigma = \{\varphi\sigma \mid \varphi \in SO(2)\}$ — отражения. Действие μ_k определено тогда равенствами

$$\begin{cases} \mu_k(e^{it}, re^{ix}) = re^{i(kt+x)}, & \text{если } e^{it} \in SO(2), re^{ix} \in \mathbb{C}, \\ \mu_k(e^{it} \cdot \sigma, re^{ix}) = re^{i(kt-x)}, & \text{если } e^{it} \cdot \sigma \in SO(2) \cdot \sigma, re^{ix} \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Пусть D_k — $O(2)$ -пространство $(\mathbb{B}^2, O(2), \mu_k)$, где $\mathbb{B}^2$ — единичный диск в $\mathbb{R}^2$.

Пусть $\mathcal{D} = \{X_i, i = 1, 2, \dots\}$ — последовательность $O(2)$ -пространств, каждое из которых есть копия некоторого D_k , и выполнено следующее условие:

$$\begin{cases} \mathcal{D} \text{ содержит такую подпоследовательность } \{X_{n_1}, X_{n_2}, \dots\}, \text{ что для} \\ \text{каждого целого } k \text{ среди } \{n_1, n_2, \dots\} \text{ встречается бесконечно много} \\ \text{кратных } k. \end{cases} \quad (*)$$

Обозначим через $\Delta(\mathcal{D})$ произведение $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$, снабжённое диагональным действием $O(2)$, и через θ точку в $\Delta(\mathcal{D})$ со всеми нулевыми координатами (т. е. начало координат в $\mathbb{R}^2$). Ясно, что θ — единственная $O(2)$ -неподвижная точка $\Delta(\mathcal{D})$. Обозначим $\Delta_0(\mathcal{D}) = \Delta(\mathcal{D}) \setminus \{\theta\}$. Если $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3, \dots\}$, мы примем обозначения $\Delta(2) = \Delta(\mathcal{D})$ и $\Delta_0(2) = \Delta_0(\mathcal{D})$.

Ниже в качестве приложения теоремы 3.3 мы приводим простые топологические модели $BM(2)$.

Предложение 4.1. Пусть $\mathcal{D}$ — последовательность $O(2)$ -пространств X_i , удовлетворяющих условию (*). Тогда $O(2)$ -пространство $\Delta(\mathcal{D})$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3.3.

Доказательство. Проверим выполнение условия а). Мы сперва заметим, что $\Delta(\mathcal{D})$ есть $O(2)$ -AR. Это вытекает из того, что $X_k \in O(2)$ -AR, $k \geq 1$ (теорема Титце—Глисона [16, с. 19]). Точка θ — единственная $O(2)$ -неподвижная точка в $\Delta(\mathcal{D})$.

Проверим справедливость условия б). Отображение

$$F: \Delta(\mathcal{D}) \times [0, 1] \rightarrow \Delta(\mathcal{D}),$$

определённое равенством

$$F((x_1, x_2, \dots), t) = ((1-t)x_1, (1-t)x_2, \dots), \quad (x_1, x_2, \dots) \in \Delta(\mathcal{D}), \quad t \in [0, 1],$$

является строгим $O(2)$ -стягиванием $\Delta(\mathcal{D})$ к точке θ .

Проверим выполнение условия в). Если K — замкнутая бесконечная подгруппа в $O(2)$, тогда, очевидно, $\Delta(\mathcal{D})^K = \{\theta\}$. В случае конечной подгруппы $K \subset O(2)$ мы покажем, что $\Delta(\mathcal{D})^K$ есть гильбертов куб. Действительно, имеем

$$\Delta(\mathcal{D})^K = \prod \{X_i^K \mid X_i \in \mathcal{D}\}.$$

Если K — циклическая подгруппа порядка k , то $X_i^K = X_i$ для i , кратного k , и $X_i^K = \{0\}$ в противном случае. Если K — диэдральная подгруппа порядка $2k$, то X_i^K есть диаметр диска $\mathbb{B}^2$, лежащий на оси Ox для i , кратного k , и $X_i^K = \{0\}$ в противном случае. Теперь благодаря условию (*) $\Delta(\mathcal{D})^K$ есть

счётное (бесконечное) произведение одномерных или двумерных дисков и, значит, есть гильбертов куб.

Проверим справедливость условия г). Факт, что $\Delta_0(\mathcal{D})/K$ есть Q -многообразие, прямо вытекает из леммы 3.2, так как условие (*) обеспечивает, что условия леммы 3.2 выполнены для $\mathcal{D} = \{X_1, X_2, \dots\}$. $\square$

Как простую комбинацию теоремы 3.3 и предложения 4.1 мы имеем следствие 4.2.

Следствие 4.2. Пусть $\mathcal{D}$ — последовательность $O(2)$ -пространств X_i , удовлетворяющая условию (*). Тогда пространство орбит $\Delta(\mathcal{D})/O(2)$ гомеоморфно компакту Банаха—Мазура $BM(2)$.

Следующий специальный случай следствия 4.2 даёт, возможно, простейшую модель для $BM(2)$.

Следствие 4.3. Пространство орбит $\Delta(2)/O(2)$ гомеоморфно компакту Банаха—Мазура $BM(2)$.

Замечание. В связи со следствием 4.2 интересно отметить ещё две последовательности $\mathcal{D}$, удовлетворяющие условию (*) и рассмотренные в [6]:

- 1) если каждое D_k , $k = 1, 2, \dots$, встречается в $\mathcal{D}$ бесконечно много раз, то $\Delta(\mathcal{D})$ есть пространство $\Psi(2)$ из [6]. Следовательно, $BM(2) \cong \Psi(2)/O(2)$;
- 2) если каждое D_{2k} , $k = 1, 2, \dots$, встречается в $\mathcal{D}$ бесконечно много раз и каждое X_i , встречающееся в $\mathcal{D}$, имеет вид D_{2k} , то $\Delta(\mathcal{D})$ есть пространство $\Gamma(2)$ из [6]. Следовательно, $BM(2) \cong \Gamma(2)/O(2)$.

Литература

- [1] Антонян С. А. Ретракты в категориях G -пространств // Известия АН Армянской ССР. Сер. мат. — 1980. — Т. 15. — С. 365—378.
- [2] Антонян С. А. Ретракционные свойства пространства орбит // Мат. сборник. — 1988. — Т. 137. — С. 300—318.
- [3] Abels H. Parallelizability of proper actions, global K -slices and maximal compact subgroups // Math. Ann. — 1974. — Vol. 212. — P. 1—19.
- [4] Antonyan S. A. The topology of the Banach–Mazur compactum. — Preprint. Publicaciones Preliminares del Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, No. 558. — 1997.
- [5] Antonyan S. A. The Banach–Mazur compacta are absolute retracts // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. — 1998. — Vol. 46. — P. 113—119.
- [6] Antonyan S. A. The topology of the Banach–Mazur compactum // Fund. Math. — 2000. — Vol. 166, no. 3. — P. 209—232.
- [7] Antonyan S. A. West’s problem on equivariant hyperspaces and Banach–Mazur compacta // Trans. Amer. Math. Soc. — 2003. — Vol. 355, no. 8. — P. 3379—3404.
- [8] Banach S. Théorie des Opérations Linéaires. — Warszawa, 1932. — (Monografie Matematyczne).

- [9] Bredon G. Introduction to compact transformation groups. — New York: Academic Press, 1972.
- [10] Chapman T. A. Lectures on Hilbert cube manifolds. — Providence: Amer. Math. Soc., 1975. — (CBMS Regional Conference Series in Math.; Vol. 28).
- [11] Fabel P. The Banach–Mazur compactum $Q(2)$ is an absolute retract // Topology and Applications (Int. Topological Conf. dedicated to P. S. Alexandroff's 100th birthday, Moscow, May 27–31, 1996). — Moscow, 1996. — P. 57.
- [12] James I. M., Segal G. B. On equivariant homotopy theory // Topology, Proc. Symp., Siegen 1979. — Springer, 1980. — P. 316–330. — (Lect. Notes Math.; Vol. 788).
- [13] John F. Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions // John F. Collected Papers. Vol. 2 / J. Moser, ed. — Birkhäuser, 1985. — P. 543–560.
- [14] Michael E. Closed retracts and perfect maps // Topology Appl. — 2002. — Vol. 121. — P. 451–468.
- [15] Van Mill J. Infinite-Dimensional Topology. Prerequisites and Introduction. — Amsterdam: North-Holland, 1989.
- [16] Palais R. The Classification of G -spaces. — Providence: Amer. Math. Soc., 1960. — (Memoirs Amer. Math. Soc.; Vol. 36).
- [17] West J. E. Infinite products which are Hilbert cubes // Trans. Amer. Math. Soc. — 1970. — Vol. 150. — P. 1–25.
- [18] West J. E. Open problems in infinite-dimensional topology // Open Problems in Topology / J. van Mill, G. Reed, eds. — Amsterdam: North-Holland, 1990. — P. 524–586.
- [19] Wong R. Y. T. Noncompact Hilbert cube manifolds. — Preprint.

