Оценка топологической энтропии гомеоморфизмов проколотого двумерного диска

О. Н. БИРЮКОВ
Коломенский государственный педагогический институт
e-mail: oleg_biryukov.81@mail.ru

УДК 515.162.8+517.938.5+515.122.4

Ключевые слова: топологическая энтропия, скорость роста, представление Бурау.

Аннотация

Рассматривается неподвижный на границе гомеоморфизм f проколотого двумерного диска $D^2 \setminus P$, где P — конечное множество точек, лежащих во внутренности диска. Каждый такой гомеоморфизм индуцирует автоморфизм f_* фундаментальной группы пространства $D^2 \setminus P$. Кроме того, гомеоморфизму f можно поставить в соответствие матрицу $B_f(t)$ из $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$, используя известное представление Бурау.

Цель данной работы — указать нетривиальную нижнюю границу топологической энтропии гомеоморфизма f. Сначала мы рассмотрим нижнюю границу энтропии, данную Р. Боуэном с использованием скорости роста индуцированного автоморфизма f_*. Далее проследим рассуждения Б. Колева, указавшего оценку энтропии снизу с помощью спектрального радиуса матрицы $B_f(t)$, где $t \in \mathbb{C}$, и получим небольшое улучшение оценки топологической энтропии.

Abstract

O. N. Biryukov, A bound for the topological entropy of homeomorphisms of a punctured two-dimensional disk, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 5, pp. 47—55.

We consider homeomorphisms f of a punctured 2-disk $D^2 \setminus P$, where P is a finite set of interior points of D^2, which leave the boundary points fixed. Any such homeomorphism induces an automorphism f_* of the fundamental group of $D^2 \setminus P$. Moreover, to each homeomorphism f, a matrix $B_f(t)$ from $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ can be assigned by using the well-known Burau representation.

The purpose of this paper is to find a nontrivial lower bound for the topological entropy of f. First, we consider the lower bound for the entropy found by R. Bowen by using the growth rate of the induced automorphism f_*. Then we analyze the argument of B. Kolev, who obtained a lower bound for the topological entropy by using the spectral radius of the matrix $B_f(t)$, where $t \in \mathbb{C}$, and slightly improve his result.

Введение

Пусть X — гладкое компактное риманово многообразие, $f\colon X \to X$ — C^1-отображение, $f_*\colon H_*(X) \to H_*(X)$ — индуцированное отображение вещественных гомологий.

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 5, с. 47—55.

Обозначим через $h(f)$ топологическую энтропию отображения f и через $R(f_*)$ спектральный радиус отображения f_*.

Существует выдвинутая Шубом так называемая *энтропийная гипотеза*, что

$$h(f) \geqslant \ln R(f_*).$$

Эта гипотеза установлена для C^1-отображений сфер и торов, а также для C^∞-отображений любых компактных X.

В настоящей работе речь пойдёт об установлении аналогичной нижней оценки для энтропии неподвижных на границе гомеоморфизмов, т. е. C^0-отображений, проколотого двумерного диска

$$f\colon D^2 \setminus P \to D^2 \setminus P,$$

где P — конечное множество точек, лежащих во внутренности диска:

$$P = \{A_1, \dots, A_n\} \subset \operatorname{int} D^2.$$

В этом случае индуцированные действия на одномерных гомологиях являются просто перестановками, и поэтому неравенство Шуба даёт тривиальный результат. Однако, как показал Б. Колев [3], если рассмотреть действия на одномерных гомологиях некоторого регулярного накрытия диска, то для энтропии гомеоморфизма f можно дать и нетривиальную оценку.

В данной работе мы рассмотрим оценку Колева и покажем, как можно её улучшить.

1. Топологическая энтропия

Пусть X — компактное метрическое пространство, α — его открытое покрытие, $N(\alpha)$ — наименьшая мощность подпокрытия.

Определение 1.1. *Топологической энтропией покрытия* α называется логарифм наименьшей мощности подпокрытия:

$$H(\alpha) = \ln N(\alpha).$$

Поскольку пространство X компактно, $H(\alpha)$ — конечное число.

Пусть β — другое открытое покрытие пространства X.

Определение 1.2. *Измельчением покрытий α и β* будем называть

$$\alpha \vee \beta = \{A \cap B \mid A \in \alpha,\ B \in \beta\}.$$

В более общем случае можно рассмотреть семейство открытых покрытий

$$\{\alpha_r \mid r = 1, \dots, n,\}$$

и определить измельчение этих покрытий

$$\bigvee_{r=1}^{n} \alpha_r = \{A_1 \cap \dots \cap A_n \mid A_1 \in \alpha_1, \dots, A_n \in \alpha_n\}.$$

Ясно, что измельчение покрытий также является покрытием.

Рассмотрим теперь непрерывное отображение $f\colon X \to X$. Прообраз покрытия α

$$f^{-1}\alpha = \{f^{-1}(A) \mid A \in \alpha\}$$

также покрывает пространство X. Для $n \geqslant 1$ рассмотрим следующее измельчение:

$$\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}\alpha = \alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \ldots \vee f^{-(n-1)}\alpha = \\ = \{A_0 \cap f^{-1}(A_1) \cap \ldots \cap f^{-(n-1)}(A_{n-1}) \mid A_0, \ldots, A_{n-1} \in \alpha\}.$$

Определение 1.3. *Топологической энтропией отображения f относительно покрытия α* называется

$$h(f, \alpha) = \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \cdot H\biggl(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}\alpha\biggr).$$

Можно показать, что для каждого f справедливо $h(f, \alpha) \leqslant H(\alpha)$. Поэтому верхний предел в последнем определении всегда существует. Более того, легко доказывается, что его можно заменить обычным пределом $\lim$ или знаком точной нижней грани $\inf$.

Определение 1.4. *Топологической энтропией отображения f* называется

$$h(f) = \sup_{\alpha}\{h(f, \alpha)\}.$$

Однако так данное определение не очень удобно для практических вычислений. Поэтому рассмотрим эквивалентные определения топологической энтропии непрерывного отображения f.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.

Определение 1.5. Конечное подмножество $S \subset X$ называется (n,ε)-*отделимым*, если для любых $x, y \in S$, $x \neq y$, найдётся такое $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, что $\rho(f^k(x), f^k(y)) \geqslant \varepsilon$, где ρ — метрика на пространстве X.

Обозначим $s(n,\varepsilon)$ максимальную мощность (n,ε)-отделимого множества. В силу компактности пространства X выполнено $s(n,\varepsilon) < +\infty$.

Определение 1.6. Конечное подмножество $R \subset X$ называется (n,ε)-*плотным*, если для каждого $x \in X$ найдётся такое $y \in R$, что для любого $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ справедливо $\rho(f^k(x), f^k(y)) < \varepsilon$.

Обозначим $r(n,\varepsilon)$ минимальную мощность (n,ε)-плотного множества. Опять благодаря компактности X выполнено $r(n,\varepsilon) < +\infty$.

Предложение 1.7 ([1]). *Имеют место следующие равенства*:

$$h(f) = \lim_{\varepsilon\to0} \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln r(n,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to0} \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln s(n,\varepsilon).$$

Каждое из выражений для энтропии в предложении 1.7 эквивалентно определению.

2. Скорость роста

Пусть G — конечно порождённая группа, $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ — множество образующих группы G, $\alpha\colon G \to G$ — произвольный эндоморфизм.

Для $g \in G$ обозначим через $L_S(g)$ длину элемента g относительно S, т. е. минимальное количество элементов множества $\{s_1, \ldots, s_n, s_1^{-1}, \ldots, s_n^{-1}\}$, достаточных для записи g.

Определение 2.1. *Скоростью роста эндоморфизма* α называется

$$\mathrm{GR}(\alpha) = \sup_{g\in G}\Big\{\varlimsup_{m\to+\infty}(L_S(\alpha^m(g)))^{\frac{1}{m}}\Big\}.$$

Можно показать (см. [1]), что $\mathrm{GR}(\alpha)$ не зависит от выбора множества образующих S, что $1 \leqslant \mathrm{GR}(\alpha) \leqslant +\infty$ и что для нахождения $\mathrm{GR}(\alpha)$ достаточно рассматривать только элементы $g \in S$:

$$\mathrm{GR}(\alpha) = \varlimsup_{m\to+\infty}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big\{(L_S(\alpha^m(s_i)))^{\frac{1}{m}}\Big\}.$$

Более того, легко доказывается, что знак верхнего предела в последнем выражении можно заменить обычным пределом $\lim$ или знаком точной нижней грани $\inf$.

Выражение для скорости роста эндоморфизма α можно записать с использованием так называемых *матриц встречаемости* $A_\alpha = (a_{ij})$.

Обозначим через a_{ij} число появлений $s_j^{\pm1}$ в редуцированном слове $\alpha(s_i)$. Положим

$$\|A_\alpha\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right\}.$$

Тогда легко видеть, что

$$\|A_\alpha\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{L_S(\alpha(s_i))\},$$

и поэтому

$$\mathrm{GR}(\alpha) = \lim_{m\to+\infty}\|A_{\alpha^m}\|^{\frac{1}{m}}.$$

3. Оценка топологической энтропии с помощью скорости роста индуцированного эндоморфизма

Пусть M — связное компактное многообразие, $f\colon M \to M$ — непрерывное отображение, x_0 — произвольная точка из M и ρ — некоторый путь из x_0 в $f(x_0)$.

Тогда f индуцирует эндоморфизм f_* фундаментальной группы

$$f_*\colon \pi_1(M, x_0) \to \pi_1(M, x_0),$$

действующий по правилу

$$f_*[\gamma] = [\rho\cdot(f\circ\gamma)\cdot\rho^{-1}] \quad \text{для} \quad \gamma\in\pi_1(M, x_0).$$

Эндоморфизм f_* зависит от выбранного пути ρ. Можно, однако, не указывать конкретный путь, но в таком случае необходимо рассматривать f_* с точностью до внутреннего автоморфизма фундаментальной группы $\pi_1(M, x_0)$.

В 1978 году Р. Боуэн [2], опираясь на результат А. Маннинга [4], показал, что топологическая энтропия отображения f имеет следующую нижнюю границу.

Теорема 3.1. $h(f) \geqslant \ln \mathrm{GR}(f_*)$.

Существенным недостатком данной оценки является то, что в общем случае возникают трудности с вычислением скорости роста, а следовательно, и с установлением нетривиальной нижней границы топологической энтропии заданного отображения f. Хотелось бы получить для нижней оценки сравнительно легко вычислимое выражение вместо скорости роста.

В 2003 году Б. Колев [3] получил такое выражение для неподвижных на границе гомеоморфизмов проколотого двумерного диска $D^2 \setminus P$, где P — конечное множество точек, лежащих во внутренности диска. В этом случае индуцированные эндоморфизмы фундаментальной группы пространства $D^2 \setminus P$ являются автоморфизмами и образуют известную группу кос. Применив теорию кос, Колев нашёл нижнюю границу для скорости роста этих автоморфизмов, тем самым оценив снизу топологическую энтропию рассматриваемого класса гомеоморфизмов проколотого диска.

4. Группа кос и представление Бурау

Определение 4.1. *Группой кос B_n из n нитей* называется конечно порождённая группа с образующими $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ и соотношениями

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i-j| \geqslant 2,$$
$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-2.$$

Рассмотрим группу $\mathrm{Hom}(D^2 \setminus P, \partial D^2)$ неподвижных на границе гомеоморфизмов проколотого двумерного диска $D^2 \setminus P$, где P по-прежнему конечное множество n точек, лежащих во внутренности диска:

$$P = \{A_1, \ldots, A_n\} \subset \operatorname{int} D^2.$$

Напомним, что два гомеоморфизма называются *изотопными*, если существует гомотопия в классе гомеоморфизмов (изотопия), концами которой являются данные гомеоморфизмы. Легко видеть, что подгруппа $\mathrm{Iso}(D^2 \setminus P, \partial D^2)$ гомеоморфизмов, изотопных тождественному, является нормальным делителем.

Определение 4.2. Фактор-группа группы $\mathrm{Hom}(D^2 \setminus P, \partial D^2)$ по подгруппе $\mathrm{Iso}(D^2 \setminus P, \partial D^2)$ называется *группой неподвижных на крае гомеотопий* проколотого двумерного диска $D^2 \setminus P$ и обозначается $\mathrm{Homeo}(D^2 \setminus P, \partial D^2)$.

Элементы группы $\mathrm{Homeo}(D^2 \setminus P, \partial D^2)$, называемые гомеотопиями, представляют собой классы попарно изотопных гомеоморфизмов.

Предложение 4.3. *Группа гомеотопий* $\mathrm{Homeo}(D^2 \setminus P, \partial D^2)$ *изоморфна группе кос* B_n *из* n *нитей, где* n *есть количество точек во множестве* P.

Изоморфизм из последнего предложения ставит в соответствие порождающей косе σ_i, где $i = 1, \ldots, n-1$, гомеотопию, представителем которой является так называемое *половинное скручивание Дэна* (квадратный корень из обычного скручивания Дэна) вокруг петли, охватывающей точки A_i и A_{i+1} из множества P.

Каждый гомеоморфизм, представляющий некоторую гомеотопию h из группы $\mathrm{Homeo}(D^2 \setminus P, \partial D^2)$, индуцирует автоморфизм f_* фундаментальной группы проколотого диска

$$f_*\colon \pi_1(D^2 \setminus P, d_0) \to \pi_1(D^2 \setminus P, d_0),$$

где d_0 — фиксированная точка на границе диска.

Заметим, что, во-первых, $\pi_1(D^2 \setminus P, d_0)$ изоморфна свободной группе с n образующими и, во-вторых, автоморфизм f_* не зависит от выбора представителя гомеотопии h. Так что каждой гомеотопии (или, что одно и то же, косе из n нитей) соответствует некоторый автоморфизм свободной группы с n образующими. Это соответствие является известным представлением Артина группы кос в группу автоморфизмов группы F_n:

$$B_n \to \mathrm{Aut}(F_n).$$

Для группы кос B_n существует также матричное представление Бурау

$$B_n \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}[t, t^{-1}]),$$

ставящее в соответствие косе α из n нитей $(n \times n)$-матрицу $B_\alpha(t)$, зависящую от параметра t. Элементы матрицы $B_\alpha(t)$ принадлежат кольцу $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ полиномов Лорана от одной переменной с целыми коэффициентами.

Порождающей косе σ_i, где $i = 1, \ldots, n-1$, ставится в соответствие следующая матрица:

$$I_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-1},$$

где I_k обозначает единичную $(k \times k)$-матрицу.

Представление Бурау можно трактовать как действие группы кос на одномерных гомологиях некоторого регулярного накрытия проколотого двумерного диска (см. также [5]).

Определим для каждой петли в пространстве $D^2 \setminus P$ *суммарное алгебраическое число оборотов* как алгебраическую сумму числа полных оборотов этой петли вокруг каждой проколотой точки из множества P. Легко видеть, что множество всех петель с нулевым суммарным алгебраическим числом оборотов является нормальным делителем в группе $\pi_1(D^2 \setminus P, d_0)$. Обозначим через $\tilde{D}$ соответствующее этому нормальному делителю регулярное накрывающее пространство.

Каждый гомеоморфизм $f\colon D^2 \setminus P \to D^2 \setminus P$, представляющий некоторую косу из n нитей, единственным образом поднимается до гомеоморфизма $\tilde{f}\colon \tilde{D} \to \tilde{D}$, оставляющего неподвижным слой над точкой $d_0 \in \partial(D^2 \setminus P)$.

Гомеоморфизм $\tilde{f}$ индуцирует автоморфизм $\tilde{f}_*$ первой группы гомологий $H_1(\tilde{D})$, которая может естественным образом рассматриваться как $(n-1)$-мерный модуль над кольцом $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, где t действует как преобразование накрытия.

Отображение $f \mapsto \tilde{f}_*$ определяет представление $B_n \to \mathrm{Aut}(H_1(\tilde{D}))$, которое называется *редуцированным представлением Бурау*.

Матрицы редуцированного представления Бурау будут порядка $n-1$, т. е. будут отличаться от матриц обычного представления Бурау. Однако при оценке энтропии будет учитываться только спектральный радиус матрицы Бурау, который совпадает для обычного и редуцированного представлений.

5. Оценка топологической энтропии гомеоморфизмов проколотого двумерного диска

Рассмотрим неподвижный на границе гомеоморфизм f проколотого двумерного диска $D^2 \setminus P$. Согласно сказанному выше, гомеоморфизм f является представителем некоторой косы из n нитей. Поставим ему в соответствие с помощью представления Бурау матрицу $B_f(t)$. Обозначим через $R(B_f(t))$ спектральный радиус матрицы $B_f(t)$.

Гомеоморфизм f индуцирует автоморфизм f_* фундаментальной группы проколотого диска с фиксированной точкой d_0 на границе диска

$$f_*\colon \pi_1(D^2 \setminus P, d_0) \to \pi_1(D^2 \setminus P, d_0).$$

Поскольку $\pi_1(D^2 \setminus P, d_0)$ — свободная группа с n образующими, для автоморфизма f_* определена скорость роста.

Б. Колев [3] установил следующее неравенство для скорости роста автоморфизма f_*.

Теорема 5.1. $\mathrm{GR}(f_*) \geqslant \sup\{R(B_f(t)) \mid t \in \mathbb{C},\ |t| = 1\}$.

Вместе с теоремой 3.1 данное неравенство даёт нижнюю оценку топологической энтропии гомеоморфизма f. Однако в этом неравенстве рассматриваются только те значения $t \in \mathbb{C}$, которые по модулю равны 1. Если проследить рассуждения Колева, то выясняется, что это ограничение необязательное. В одном месте рассуждений, чтобы избавиться от $|t|$ под знаком суммы, Колев приравнивает его к единице:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| \cdot |t|^k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|.$$

Но в этой сумме лишь конечное число a_k, отличных от 0. Поэтому $|t|$ можно вынести за знак суммы в некоторой степени m, получив следующее неравенство:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| \cdot |t|^k \leqslant |t|^m \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|.$$

Покажем, как можно улучшить оценку топологической энтропии.

Пусть теперь $B_f(t)$ обозначает $(n \times n)$-матрицу, которая ставится в соответствие гомеоморфизму f с помощью обычного (нередуцированного) представления Бурау. Элемент b_{ij} этой матрицы принадлежит кольцу $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ и поэтому имеет вид

$$b_{ij} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k t^k,$$

где $c_k \in \mathbb{Z}$ для всех $k \in \mathbb{Z}$, причём лишь конечное число c_k отлично от 0.

Для элемента b_{ij} обозначим

$$M_{ij}(f) = \{k \in \mathbb{Z} \mid c_k \neq 0\},$$

и пусть далее

$$M(f) = \bigcup_{1 \leqslant i,j \leqslant n} M_{ij}(f).$$

Пусть $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Введём в рассмотрение функцию

$$m(f, |t|) = \begin{cases} \overline{\lim\limits_{p \to +\infty}} \frac{\max M(f^p)}{p}, & \text{если } |t| \geqslant 1, \\ \underline{\lim\limits_{p \to +\infty}} \frac{\min M(f^p)}{p}, & \text{если } 0 < |t| < 1. \end{cases}$$

Центральным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 5.2. $h(f) \geqslant \ln \sup\bigl\{R(B_f(t)) \cdot |t|^{-m(f,|t|)} \mid t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\bigr\}$.

Доказательство. С учётом теоремы 3.1 достаточно показать, что

$$\mathrm{GR}(f_*) \geqslant \sup\bigl\{R(B_f(t)) \cdot |t|^{-m(f,|t|)} \mid t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\bigr\}.$$

Пусть $|t| \geqslant 1$. Случай $0 < |t| < 1$ рассматривается аналогично.

Для элемента b_{ij} матрицы $B_f(t)$ имеем

$$|b_{ij}| = \Bigl|\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k t^k\Bigr| \leqslant \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| \cdot |t|^k.$$

Так как лишь конечное число c_k отлично от 0 и $|t| \geqslant 1$,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| \cdot |t|^k \leqslant |t|^{\max M_{ij}(f)} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|.$$

Пусть $A_{f_*} = (a_{ij})$ — матрица встречаемости автоморфизма f_*. Используя свободное дифференциальное исчисление Фокса, Б. Колев показал, что справедливо неравенство

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| \leqslant a_{ij}.$$

Объединяя три последних неравенства, получаем

$$|b_{ij}| \leqslant |t|^{\max M_{ij}(f)} \cdot a_{ij}.$$

Имеем

$$\|B_f(t)\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|\right\} \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\sum_{j=1}^{n}|t|^{\max M_{ij}(f)}\cdot a_{ij}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant |t|^{\max M(f)}\cdot \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right\} = |t|^{\max M(f)}\cdot \|A_{f_*}\|.$$

Заменим f на f^p:

$$\|B_{f^p}(t)\| \leqslant |t|^{\max M(f^p)}\cdot \|A_{f_*^p}\|.$$

Так как $B_{f^p}(t) = B_f^p(t)$, то, извлекая корень p-й степени и устремляя p к $+\infty$, получаем

$$\varlimsup_{p\to+\infty}\|B_f^p(t)\|^{\frac{1}{p}} \leqslant \varlimsup_{p\to+\infty}\left\{|t|^{\frac{\max M(f^p)}{p}}\cdot\|A_{f_*^p}\|^{\frac{1}{p}}\right\}.$$

Отсюда

$$R(B_f(t)) \leqslant |t|^{\varlimsup\limits_{p\to+\infty}\frac{\max M(f^p)}{p}}\cdot \mathrm{GR}(f_*),$$

или

$$\mathrm{GR}(f_*) \geqslant R(B_f(t))\cdot |t|^{-m(f,|t|)},$$

что и завершает доказательство. □

Замечание. Легко видеть, что для $|t| = 1$ оценка энтропии в теореме 5.2 совпадает с данной в теореме 5.1. Реальное же улучшение оценки будет лишь для тех $t\in\mathbb{C}$, для которых выполняется одно из следующих условий:

- $|t| > 1$ и $m(f,|t|) < 0$,
- $0 < |t| < 1$ и $m(f,|t|) > 0$,

другими словами, когда справедливо одно из следующих неравенств:

$$\varlimsup_{p\to+\infty}\frac{\max M(f^p)}{p} < 0 \quad \text{или} \quad \varliminf_{p\to+\infty}\frac{\min M(f^p)}{p} > 0.$$

Литература

[1] Каток А. Б., Хассельблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. — М.: Факториал, 1999.

[2] Bowen R. Entropy and the fundamental group // The Structure of Attractors in Dynamical Systems (Proc. Conf., North Dakota State Univ., Fargo, N.D., 1977). — Berlin: Springer, 1978. — P. 21—29. — (Lecture Notes in Math.; Vol. 668).

[3] Kolev B. Entropie topologique et représentation de Burau // C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. 1. — 1989. — Vol. 309, no. 13. — P. 835—838.

[4] Manning A. Topological entropy and the first homology group // Dynamical Systems — Warwick 1974 (Proc. Sympos. Appl. Topology and Dynamical Systems, Univ. Warwick, Coventry, 1973/1974). — Berlin: Springer, 1975. — P. 185—190. — (Lect. Notes Math.; Vol. 468).

[5] Turaev V. Faithful linear representations of the braid groups // Astérisque. — 2002. — No. 276. — P. 389—409.