

О разбиении евклидова пространства на полиэдры, индуцированном малой деформацией плотной решётчатой упаковки шаров

А. М. ГУРИН

Физико-технический институт
низких температур им. Б. И. Веркина,
Национальная академия наук Украины
e-mail: gurin@ilt.kharkov.ua

УДК 519.116+515.122.4

Ключевые слова: упаковка, разбиение, диаграммы Дирихле—Вороного, решётчатая упаковка, малая деформация упаковки.

Аннотация

Найдена оценка числа комбинаторно различных диаграмм Дирихле—Вороного, построенных для центров шаров упаковки, полученной из плотной решётчатой упаковки равных шаров при помощи преобразования «малого смещения» шаров исходной упаковки.

Abstract

A. M. Gurin, Partition of Euclidean space into polyhedra induced by a small deformation of the densest lattice sphere packing, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 5, pp. 79–84.

The number of combinatorially nonequivalent Dirichlet—Voronoi diagrams constructed for the centers of balls in the packing obtained from the densest lattice packing of equal spheres by a small displacement of the spheres is estimated.

Пусть символ $p(i)$ обозначает центр произвольного шара из множества P центров шаров, расположенных в трёхмерном евклидовом пространстве E . Каждые два шара из рассматриваемого множества имеют либо точку касания, либо не имеют ни одной общей точки. Такое расположение шаров в пространстве E назовём *упаковкой* шаров. Шары упаковки, имеющие общую точку, назовём *соседними*.

Расположим слой равных шаров на плоскости (x, y) так, чтобы ортогональная проекция их на плоскость являлась плотнейшей упаковкой равных кругов [1, с. 54]. В такой упаковке каждый круг имеет шесть соседних кругов. На первый слой шаров можно положить второй аналогичный слой шаров двумя способами. Центры второго слоя принадлежат плоскости, параллельной плоскости (x, y) . Процедура укладки новых слоёв шаров, вообще говоря, не периодична и позволяет создать несчётное множество упаковок, которые составляют класс жёстких упаковок [2] равных шаров в трёхмерном евклидовом пространстве.

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 5, с. 79–84.

© 2005 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

Соединим произвольную точку $p(i)$ прямолинейными отрезками $l(i, j)$ со всеми остальными точками $p(i)$ из множества P . Получим фигуру $L(i)$. Через середины отрезков $l(i, j)$ проведём плоскости $T(i, j)$, перпендикулярные прямым $l(i, j)$. Общую часть полупространств $T(i, j)$, содержащих точку $p(i)$, называют областью Дирихле—Вороного или диаграммой Дирихле—Вороного (ДДВ) [4, с. 230].

Если все пучки $L(i)$ конгруэнтны, то упаковка шаров называется *решётчатой* [1]. В классе жёстких упаковок лишь одна упаковка является решётчатой. Её ДДВ — ромбододекаэдр. Произвольная жёсткая упаковка, не являющаяся решётчатой, имеет или индуцирует разбиение пространства упаковки шаров [3] на два вида ДДВ с двенадцатью гранями. Один из них — ромбододекаэдр.

Зафиксируем координаты центров шаров решётчатой упаковки, а радиус шаров уменьшим до некоторой наперёд заданной малой величины r . В каждом новом шаре радиуса r выберем произвольную точку, обозначив её, как прежде, через $p(i)$. Построим новые шары с центрами в новых точках $p(i)$, эти шары образуют новую упаковку. Такую процедуру получения новых упаковок назовём преобразованием «малого смещения» шаров исходной упаковки.

При преобразовании «малого смещения» упаковки, очевидно, её ДДВ немного изменяется. Целью данной статьи является исследование возможных изменений ДДВ решётчатой упаковки. Результат исследования затем легко переносится на произвольную упаковку из класса жёстких упаковок. Заметим, что плотность решётчатой упаковки равных шаров равна плотности каждой упаковки из класса жёстких упаковок и является наибольшей известной величиной в частном решении проблемы Д. Гильберта [5, 6].

Найдём проекцию ДДВ на сферу r точки $p(i)$ при помощи прямых, исходящих из точки $p(i)$. Такая проекция устанавливает взаимно-однозначное соответствие между точками сферы r и точками поверхности области ДДВ, поскольку поверхность области ДДВ является звёздной относительно точки $p(i)$. Таким способом на сфере r получим сеть рёбер $V(i)$, комбинаторно эквивалентную сети рёбер ДДВ. Назовём две сети $V(1)$ и $V(2)$ *комбинаторно эквивалентными*, если существует топологическое преобразование сферы r , переводящее сеть $V(1)$ в $V(2)$. Назовём две ДДВ комбинаторно эквивалентными, если соответствующие им сети $V(1)$ и $V(2)$ комбинаторно эквивалентны. Пусть N обозначает число комбинаторно различных ДДВ. Напомним, что для класса жёстких упаковок $N = 2$, если ДДВ находятся для центров шаров. В [3], где изучалась комбинаторная структура ДДВ, найденных для произвольных точек в компактных телах, установлено, что число N является конечным.

Обратимся к множеству плоскостей $T(i, j)$, найденных при построении ДДВ решётчатой упаковки равных шаров. Это множество допускает разбиение на три группы плоскостей согласно их свойствам. Плоскости группы 1 касаются шара в точке касания соседних шаров и образуют грани ДДВ. Плоскости группы 2 инцидентны четырёхгранным вершинам ДДВ и параллельны плоскостям фундаментальной области упаковки — куба. Группа 3 — плоскости, не имеющие общих точек с ДДВ.

Очевидно, что при сколь угодно малых r в процедуре преобразования «малого смещения» шаров исходной решётчатой упаковки плоскости группы 2 могут стать плоскостями группы 1 — дать грань ДДВ, либо стать плоскостями группы 3 — удалиться на некоторое расстояние от ДДВ решётчатой упаковки.

Лемма 1. Существует такое положительное число ε , что если r меньше ε , то плоскости группы 3 не могут стать плоскостями группы 1.

Доказательство. Плоскости группы 3 расположены так, что наименьшее расстояние точек ДДВ до плоскостей группы 3 превосходит некоторую, легко вычисляемую по координатам центров шаров, величину m . При изменениях координат центров шаров $p(i)$ параметры плоскостей $T(i, j)$ изменяются прямо пропорционально величинам изменения координат центров шаров. Так же изменяется и расстояние m , что обеспечивает существование ограничения ε .

Лемма 1 доказана.

Назовём упаковку, полученную из плотной решётчатой упаковки после применения процедуры преобразования «малого смещения», выполненной так, что выполняется условие леммы 1, *малой деформацией* решётчатой упаковки.

Лемма 2. Диаграммы Дирихле—Вороного плотной решётчатой упаковки, подверженной малой деформации, могут иметь лишь трёх- и четырёхгранные вершины.

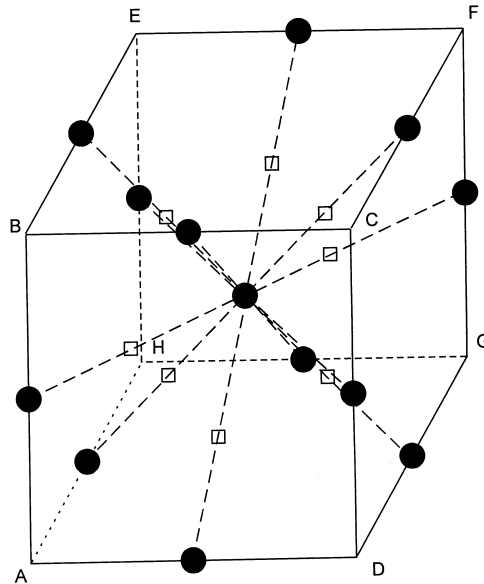
Доказательство. При малой деформации плотной решётчатой упаковки плоскости $T(i, j)$ группы 1 сохраняют свойство быть гранями ДДВ. При этом образованные ими трёхгранные вершины остаются трёхгранными. А четырёхгранные вершины, образованные ими, могут либо остаться четырёхгранными, либо преобразоваться в две трёхгранные вершины, соединённые ребром.

Плоскости группы 2 в исходном положении упаковки образуют углы с гранями ДДВ, равные сорока пяти градусам. Следовательно, аналогично свойству плоскостей группы 3 (лемма 1), при малой деформации решётчатой упаковки плоскости группы 2 не могут произвести сечение рёбер ДДВ. А значит, трёхгранные вершины ДДВ при малой деформации решётчатой упаковки преобразуются лишь в трёхгранные вершины.

Рассмотрим возможные варианты изменения четырёхгранных вершин с учётом плоскостей группы 2. Здесь появляются ещё три варианта преобразования четырёхгранной вершины: четырёхугольник с трёхгранными вершинами; треугольник с двумя трёхгранными и одной четырёхгранной вершиной; треугольник и ребро, каждая вершина здесь трёхгранная.

Лемма 2 доказана.

Теорема. Пусть плотная решётчатая упаковка подверглась такой малой деформации, что четырёхгранные вершины ДДВ приобрели возможность преобразоваться либо в четырёхугольники, либо в две трёхгранные вершины, соединённые ребром. Тогда число комбинаторно различных ДДВ не превосходит 220.



Доказательство не потеряет общности, если мы ограничимся поиском комбинаторного перебора четырёх символов, расположенных на гранях куба. Символы обозначим 1, 2, 3, 4. Они соответствуют: 1 — четырёхгранной вершине, 2 — четырёхгранной вершине, срезанной плоскостью, 3 и 4 — четырёхгранной вершине, расщеплённой на две трёхгранные вершины, которые способны расположиться в двух симметрично разных положениях.

При переборе сочетаний символов 1, 2, 3, 4 учитываем симметрию куба. В символьной записи комбинаторных типов ДДВ первая и последняя цифры соответствуют тем символам, которые расположены на двух противоположных гранях куба, а четыре внутренних — это символы на боковых гранях.

Группа перебора символов на противоположных гранях куба (назовём их основаниями куба):

111111, 111112, 111113, 111114,
211112, 211113, 211114, 311113, 311114, 411114.

Группа перебора символов на боковых гранях при символах на основаниях 1 и 1:

112211, 112311, 112411, 113311, 113411, 114411, 122211, 122311, 122411,
123211, 123311, 123411, 124211, 124311, 124411, 132311, 132411, 133311,
133411, 134311, 134411, 142411, 143411, 144411, 122221, 122231, 122241,
122331, 122341, 122441, 123231, 123241, 123331, 123341, 123431, 123441,
124241, 124341, 124441, 133331, 133341, 133441, 134341, 134441, 144441.

Группа перебора символов на боковых гранях при символах на основаниях 1 и 2:

222111, 223111, 224111, 233111, 234111, 244111, 222211, 222311, 222411,
223211, 223311, 223411, 224211, 224311, 224411, 232311, 232411, 233311,
233411, 234311, 234411, 242411, 243411, 244411, 222221, 222231, 222241,
222331, 222341, 222441, 223231, 223241, 223331, 223341, 223431, 223441,
224241, 224341, 224441, 233331, 233341, 233441, 234341, 234441, 244441.

Группа перебора символов на боковых гранях при символах на основаниях 1 и 3:

333111, 334111, 344111, 323211, 323311, 323411, 324211, 324311, 324411,
333311, 333411, 334311, 334411, 343411, 344411, 322221, 322231, 322241,
322331, 322341, 322441, 323231, 323241, 323331, 323341, 323431, 323441,
324241, 324341, 324441, 333331, 333341, 333441, 334341, 334441, 344441.

Группа перебора символов на боковых гранях при символах на основаниях 1 и 4:

444111, 424211, 424311, 424411, 434311, 434411, 444411, 422221, 422231,
422241, 422331, 422341, 422441, 423231, 423241, 423331, 423341, 423431,
423441, 424241, 424341, 424441, 433331, 433341, 433441, 434341, 434441,
444441.

Группа перебора символов на боковых гранях при символах на основаниях 2 и 2:

222222, 222232, 222242, 222332, 222342, 222442, 223232, 223242, 223332,
223342, 223432, 223442, 224242, 224342, 224442, 233332, 233342, 233442,
234342, 234442, 244442.

Группа перебора символов на боковых гранях при символах на основаниях 2 и 3:

322332, 322342, 322442, 323332, 323342, 323432, 323442, 324342, 324442,
333332, 333342, 333442, 334342, 334442, 344442.

Группы перебора символов на боковых гранях при символах на основаниях 2 и 4,
3 и 3, 3 и 4, 4 и 4 соответственно:

422442, 423432, 423442, 424442, 433332,
433342, 433442, 434342, 434442, 444442;
333333, 333343, 333443, 334343, 334443, 344443;
433443, 434443, 444443,
444444.

Итого 220 комбинаторно различных ДДВ.

Теорема доказана.

Исследования данной публикации оказались возможными благодаря гранту
№ U22000 Международного научного фонда.

Литература

- [1] Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. — М.: Наука, 1981.
- [2] Гурин А. М. Жёсткие упаковки шаров // Мат. физика, анализ, геометрия. — 1995. — Т. 2, № 2. — С. 195—196.
- [3] Гурин А. М. Одно свойство индуцированного упаковкой компактных тел нормального разбиения пространства на многогранники // Геометрия и топология. Т. 8. — СПб., 2003. — С. 38—41. — (Зап. науч. семин. ПОМИ; Т. 299).
- [4] Енгель П. Від квадратичних форм до діаграм Діріхле—Вороного // Вплив наукового доробку Г. Вороного на сучасну науку / ред. Г. Сита, А. Юрачківський. — Київ: Інститут математики, 2003.
- [5] Conway J. H., Sloane N. J. A. Sphere Packings: Lattices and Groups. Vol. 1. — New York: Springer, 1988.
- [6] Hilbert D. Gesammelte Abhandlungen. Vol. 3. — Berlin: Springer, 1935. — P. 290—329.