Оценка суммы кратностей нулей собственных функций оператора Лапласа—Бельтрами

В. Н. КАРПУШКИН
Институт проблем передачи информации РАН
e-mail: vladkarp@rol.ru

УДК 517.586

Ключевые слова: собственная функция, собственное значение, эйлерова характеристика, кратность нуля.

Аннотация

Рассматриваются оценки суммы кратностей нулей N-й собственной функции оператора Лапласа—Бельтрами. Получены оценки сверху этой суммы в случае компактного двумерного риманова многообразия, более сильные оценки сверху для S^2 и $\mathbb{R}P^2$ с такой же асимптотикой при $N \to \infty$. Асимптотически лучшие оценки сверху при $N \to \infty$ получены для случая области на плоскости.

Abstract

V. N. Karpushkin, Estimates of sums of zero multiplicities for eigenfunctions of the Laplace–Beltrami operator, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 5, pp. 85—90.

We obtain an upper estimate $N - \chi(M)$ for the sum Q_N of singular zero multiplicities of the Nth eigenfunction of the Laplace—Beltrami operator on the two-dimensional, compact, connected Riemann manifold M, where $\chi(M)$ is the Euler characteristic of M. There are given more strong estimates, but equivalent asymptotically ($N \to \infty$), for the cases of the sphere S^2 and the projective plane $\mathbb{R}^2$. Asymptotically more sharp estimate are shown for the case of a domain on the plane.

Введение

В работе даётся оценка сверху для суммы кратностей Q_N особых нулей собственной функции с номером N на двумерном компактном связном римановом многообразии M оператора Лапласа—Бельтрами величиной $N - \chi(M)$, где $\chi(M)$ — эйлерова характеристика M. В случае, когда M есть S^2 или $\mathbb{R}P^2$, получены более точные, но асимптотически при $N \to \infty$ такие же оценки. В случае, когда M есть компактная связная область на плоскости, получена оценка $\overline{\lim}(Q_N/N) \leqslant (2/\eta_{0,1})^2$, где $\eta_{0,1}$ — первый положительный нуль функции Бесселя J_0, $(2/\eta_{0,1})^2 < 0{,}7$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 5, с. 85—90.

1. Формулировка результатов

Пусть дано гладкое связное компактное риманово двумерное многообразие M, ориентированное или нет, возможно с кусочно-гладким краем ∂M. Пусть Δ — оператор Лапласа—Бельтрами. Далее предположим, что N-я собственная функция ψ_N отвечает собственному числу λ_N, для всех N удовлетворяет граничному условию $\psi_N|_{\partial M} = 0$ и принадлежит классу $C^1(M) \cap C^\infty(M \setminus \partial M)$.

Известно (см. [4]), что если $\psi_N \not\equiv 0$ и собственная функция ψ_N обращается в 0 в точке $a \in M \setminus \partial M$, то степень главной однородной части функции ψ_N в точке a конечна. Обозначим эту степень через $k(a)$ ($k(a) \geqslant 1$). Назовём $k(a) - 1$ кратностью нуля a (все неособые нули имеют кратность 0). Из условия $\psi_N \in C^\infty(M \setminus \partial M)$ и теоремы Берса (см. [5] и доказательство теоремы 1) следует, что число особых нулей функции ψ_N на $M \setminus V$ конечно для всякой окрестности V края ∂M. Положим $\Gamma = \{x \in M \setminus \partial M \colon \psi_N(x) = 0\}$.

Графом на многообразии будем называть любое замкнутое подмножество, состоящее из одномерных и нульмерных клеток — рёбер и вершин соответственно некоторого конечного клеточного разбиения многообразия M.

Пусть C — клеточное разбиение множества $\Gamma \cup \partial M$, выбранное следующим образом. Каждая компонента связности $\Gamma \cup \partial M$, не содержащая особых точек функции ψ_N, гомеоморфна окружности. Берём на ней произвольную точку и считаем её нульмерной клеткой. На каждой компоненте связности $\Gamma \cup \partial M$, содержащей особые точки функции ψ_N, нульмерными клетками являются особые точки функции ψ_N и только они. Выбранные нульмерные клетки однозначно определяют клеточное разбиение $\{C\}$ множества $\Gamma \cup \partial M$. Предполагаем далее, что существует конечное клеточное разбиение $\{D\}$ многообразия M, такое что $\{D\} \supset \{C\}$, и, таким образом, $\Gamma \cup \partial M$ — граф на M.

Обозначим через m_l число таких точек $c \in \partial M$, что в точку c входят l кривых множества Γ. Если $l \geqslant 1$, то $d\psi_N|_c = 0$.

Назовём $l/2$ кратностью особого нуля c. Пусть

$$Q_N = \sum_{a \in \Gamma} (k(a) - 1) + \sum_l m_l \frac{l}{2} -$$

сумма кратностей особых нулей N-й собственной функции. Из предположений о множестве $\Gamma \cup \partial M$ и теоремы Берса [5] следует, что Q_N конечна при любом N.

Пусть $\chi(A)$ — эйлерова характеристика множества A.

Теорема 1. *$Q_N \leqslant N - \chi(M)$ для всех $N \geqslant 1$, если $M \neq S^2$, и для всех $N \geqslant 2$, если $M = S^2$.*

Замечание 1. Теорема 1 и её доказательство частично содержатся в [1]. Теорема 1 справедлива для собственных сечений векторных одномерных гладких локально тривиальных расслоений над M. Это следует из доказательства теоремы 1.

Замечание 2. Предположим, что $\partial M = \varnothing$ и все особые точки собственной функции ψ_M невырожденные. Тогда из теоремы 1, теоремы Берса и определения эйлеровой характеристики следует, что число экстремумов функции ψ_M на M не превосходит числа N плюс число сёдел функции ψ_M на M, отвечающих ненулевому значению функции ψ_M.

Примерами собственных функций на торе $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, у которых все особые точки невырожденные, служат функции $\sin(px)\sin(qy)$, где p, q — целые.

Замечание 3. Предположим, что все особые точки собственной функции ψ_M на M уровня нуль невырожденные. Пусть c_1 — число этих точек на $M \setminus \partial N$ и c_0 — число этих точек на ∂M. Из теоремы 1 следует, что $(c_1 + c_0)/2$ не превосходит $N - \chi(M)$.

Если M есть S^2 или $\mathbb{R}^2$, верна оценка более точная, чем в теореме 1. Пусть

$$Q_n = \sum_{a \in \Gamma} (k(a) - 1),$$

где Γ — линия уровня нуль сферической функции степени n на S^2 или её проекция на $\mathbb{R}P^2$, $n \geqslant 2$.

Теорема 2.

1. *Пусть* $\Gamma \subset S^2$. *Тогда*:
   а) *если* n *чётное, то* $Q_n \leqslant n^2 - 2n + 2$;
   б) *если* n *чётное и кривая* Γ *не имеет нечётной ветви, то* $Q_n \leqslant n^2 - 2n$;
   в) *если* n *нечётно, то* $Q_n \leqslant n^2 - 2n + 3$.
2. *Пусть* $\Gamma \subset \mathbb{R}P^2$. *Тогда*:
   а) $Q_n \leqslant \frac{(n-1)^2}{2} - 1$;
   б) *если* n *чётное и нет нечётной ветви у* Γ, *то* $Q_n \leqslant \frac{n^2-2n}{2}$.

Замечание 4.

1. Теорема 2 уточняет [1, теорема 2].
2. Пусть $k(n, S^2)$ — оценка теоремы 2 для сферы. Предположим, что все особые точки сферической функции ψ_n степени n невырожденны. Тогда $k(n, S^2) + 2$ не меньше чем число экстремумов ψ_M минус число сёдел ψ_n с ненулевым значением. Разделив последнее неравенство на два, получим аналогичную оценку для $\mathbb{R}P^2$.

Пример 1. В случае S^2 оценки утверждений 1 а) при 2, 4 и 1 в) при $n = 3$ теоремы 2 точные. Примеры даются однородными формами xy, xyz, $xy(x^2 + y^2 - 6z^2)$.

Замечание 5. Число сферических функций степени меньше n равно n^2. Число чётных (нечётных) сферических функций на $\mathbb{R}P^2$ степени меньше n, если n чётное (нечётное), равно $(n^2 - n)/2$. Поэтому оценки теоремы 2 точнее оценок теоремы 1 для S^2 при $n \geqslant 2$ и для чётных и нечётных степеней для $\mathbb{R}P^2$ при $n \geqslant 4$. Однако при $n \to \infty$ или $N \to \infty$ главный член асимптотики оценок теорем 1 и 2 одинаков.

Пусть M — замыкание открытого ограниченного связного множества в $\mathbb{R}^2$, граница которого $\operatorname{Fr} M$ состоит из конечного числа кусочно-гладких компонент связности, гомеоморфных окружности.

Пусть η — самый малый положительный нуль функции Бесселя J_0 ($\eta_{0,1} = 2{,}4048\ldots$). Далее мы придерживаемся обозначений и предположений теоремы 1. При этом величина Q_N конечна для любого N, и верна следующая теорема.

Теорема 3. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует N_ε, такое что при $N \geqslant N_\varepsilon$ имеем*

$$Q_N \leqslant \left(\left(\frac{2}{\eta_{0,1}}\right)^2 + \varepsilon\right)N.$$

Замечание 6. Полученная оценка асимптотически лучше аналогичной оценки теоремы 1.

Пример 2. Пусть $M = \{0 \leqslant v \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$ — квадрат в $\mathbb{R}^2$. Собственные функции оператора Лапласа вида $\sin(px)\sin(qy)$, где p, q — целые числа, дают

$$\overline{\lim}\left(\frac{Q_N}{N}\right) \geqslant \frac{2}{\pi} = 0{,}636\ldots$$

(см. [6]). Утверждение приведённой теоремы 3 эквивалентно неравенству

$$\overline{\lim}\,\frac{Q_N}{N} \leqslant \left(\frac{2}{\eta_{0,1}}\right)^2 = 0{,}691\ldots.$$

Отметим, что все особые точки этих функций в M невырожденны. Таким образом, этот верхний предел для подпоследовательности функций с невырожденными особыми точками в M даёт хорошее приближение к $\overline{\lim}(Q_N/N)$.

2. Доказательство результатов

Докажем теорему 1.

Теорема Берса. *Для каждой точки $a \in \Gamma$ существует гладкая локальная система координат u, v в точке a, такая что если $k = k(a) \geqslant 2$ есть степень главной однородной части функции ψ_N в точке a, то $\psi_N(u,v) = \operatorname{Re}(u + \mathbf{i}v)^k + B^{k+1}$, где $\mathbf{i}^2 = -1$ и B есть идеал функций, обращающихся в нуль в начале координат.*

Доказательство теоремы Берса можно найти в [5].

Лемма 1.

$$-\chi(\Gamma \cup \partial M) = \sum_{a\in\Gamma}(k(a) - 1) + \sum_{l} m_l \frac{l}{2}.$$

Доказательство. Из теоремы Берса вытекает, что из любой точки $a \in \Gamma$ со степенью главной однородной части $k(a) \geqslant 2$, т. е. элемента множества $S\Gamma = \{a \in \Gamma\colon d\psi_N|_a = 0\}$ выходит $k(a)$ вещественных ветвей множества Γ.

Заметим, что $-\chi(\Gamma \cup \partial M)$ есть половина числа концов рёбер графа $\Gamma \cup \partial M$ минус число вершин графа $\Gamma \cup \partial M$. При этом число вершин графа $\Gamma \cup \partial M$ на ∂M равно числу его рёбер на ∂M. Действительно, любая компонента связности ∂M есть окружность. Отсюда

$$-\chi(\Gamma \cup \partial M) = \frac{\sum\limits_{a \in \Gamma} 2k(a) + \sum\limits_{l} m_l l}{2} - (\text{число элементов множества } S\Gamma),$$

т. е.

$$-\chi(\Gamma \cup \partial M) = \sum_{a \in \Gamma} (k(a) - 1) + \sum_{l} m_l \frac{l}{2}.$$

Множество Γ может содержать ещё несколько окружностей. Однако их вклад в эйлерову характеристику равен нулю. Напомним, что $k(a) = 1$, если $a \in \Gamma \backslash S\Gamma$. Отсюда следует лемма 1. $\square$

Лемма 2. *Пусть F — граф на M. Тогда $\chi(F) + \operatorname{rank} H_0(M \setminus F) \geqslant \chi(M)$, если $F \neq \varnothing$.*

Доказательство следует из свойств эйлеровой характеристики.

Замечание 7. Если $F \neq \varnothing$, то утверждение леммы 2 неверно. Примером служит сфера S^2. Утверждение теоремы 1 для $N = 1$ и $M = S^2$ также неверно.

Доказательство теоремы 1 вытекает из лемм 1 и 2, утверждения

$$\operatorname{rank} H_0(M \setminus (\Gamma \cup \partial M)) \leqslant N$$

теоремы Куранта [3], того, что $\Gamma = \varnothing$, если и только если $N = 1$, и того, что $\chi(M) \leqslant 1$, если $M \neq S^2$. $\square$

Доказательство теоремы 2. Утверждение 1 теоремы 2 вытекает из [2, следствие теоремы]. При этом используются леммы 1, 2 и то, что число Q_n на S^2 чётное. Последнее справедливо, так как если $a \in \Gamma \subset S^2$ и $\tilde{a}$ — антипод точки a, то $k(a) = k(\tilde{a})$.

Утверждение 2 теоремы вытекает из утверждения 1. $\square$

Доказательство теоремы 3 вытекает из [6, рассуждения на с. 547, 548] с использованием лемм 1 и 2. $\square$

Замечание 8. Из леммы 1 следует, что $\sum\limits_{l} m_l l$ чётно.

Замечание 9. Пусть J_l — бесселева функция целого индекса $l \geqslant 0$; $\eta_{l,p}$ — p-й положительный нуль J_p, $p \geqslant 1$; $\eta^2_{n,m} = \lambda_N$ — N-е собственное значение оператора Лапласа для круга радиуса 1 ($n \geqslant 0$, $m \geqslant 1$) (см. [3]). Из теорем 1 и 3, теоремы Берса и структуры собственных функций оператора Лапласа для круга [3] имеем

$$2mn \leqslant N, \quad \overline{\lim} \left(\frac{2mn}{N} \right) \leqslant \left(\frac{2}{\eta_{0,1}} \right)^2.$$

Заметим [3], что

$$N = 2|\{\eta_{l,p} \colon l \geqslant 1,\ \eta_{l,p} < \eta_{n,m}\}| + |\{\eta_{0,p} \colon \eta_{0,p} < \eta_{n,m}\}| + 1,$$

где $|D|$ обозначает число элементов множества D.

Вышесказанное может быть полезно при исследовании взаимного расположения нулей функций Бесселя с разностью индексов больше 1 (если разность индексов равна 1, нули чередуются [3]).

Автор благодарен А. В. Чернавскому и Д. А. Попову за полезные обсуждения.

Литература

[1] Карпушкин В. Н. Кратности особых точек собственных функций оператора Лапласа—Бельтрами // Функц. анализ и его прил. — 1995. — Т. 29, № 1. — С. 80—82.

[2] Карпушкин В. Н. О числе компонент дополнения к некоторым алгебраическим кривым // Успехи мат. наук. — 2002. — Т. 57, № 6. — С. 185—186.

[3] Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1951.

[4] Aronszajn N. A unique continuation theorem for solution of elliptic partial differential equations of second order // J. Math. Pures Appl. — 1957. — Vol. 36. — P. 235—249.

[5] Bers L. Local behavior of solutions of general linear elliptic equations // Comm. Pure Appl. Math. — 1955. — Vol. 8. — P. 473—496.

[6] Pleijel Å. Remarks on Courant's nodal line theorem // Comm. Pure Appl. Math. — 1956. — Vol. 9. — P. 543—550.