

Классификация типов диаграмм Хегора рода 3*

Ф. КОРАБЛЁВ

Челябинский государственный университет
e-mail: vvk@csu.ru

УДК 515.162.32

Ключевые слова: разбиение Хегора, диаграмма Хегора.

Аннотация

Приводится классификация типов диаграмм Хегора рода 3 и строится пример бесконечной серии диаграмм, которые имеют один и тот же тип, смоделированный на одномерном остове октаэдра.

Abstract

F. Korablev, Classification of Heegaard diagrams of genus three, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 5, pp. 91—97.

We present a classification of the Heegaard diagram of genus 3 and an example of an infinite series of diagrams, which have the same type modeled on the one-dimensional skeleton of the octahedron.

1. Диаграммы Хегора и их D -графы

Хорошо известно, что любое замкнутое ориентируемое трёхмерное многообразие M можно представить в виде объединения двух полных кренделей с общим краем. Такое представление называется *разбиением Хегора* многообразия M . Поскольку края кренделей совпадают, они имеют одинаковый род. Этот род называется *родом Хегора* разбиения. Род Хегора самого многообразия M определяется как минимальный род его разбиений Хегора.

Определение. Пусть $M = H \cup H'$ — разбиение Хегора рода g многообразия M и $u = \{u_1, \dots, u_g\}$, $v = \{v_1, \dots, v_g\}$ — системы меридианов кренделей H , H' соответственно. Тогда тройка (F, u, v) называется *диаграммой Хегора* многообразия M .

Диаграмма Хегора (F, u, v) называется *нормализованной*, если кривые u , v находятся в общем положении и среди областей, на которые кривые $u \cup v$ разбивают поверхность F , нет двухугольников. Очевидно, что любую диаграмму Хегора можно нормализовать с помощью изотопии одной из систем меридианов.

Удобный способ изображения нормализованных диаграмм Хегора был предложен в [1]. Его суть состоит в следующем. Пусть (F, u, v) , где $F = H \cap H'$

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 05-01-0293-а.

и $H \cup H' = M$, — диаграмма Хегора рода g многообразия M . Разрежем крендель H по его меридиональным дискам, края которых составляют систему u . Мы получим шар с g парами дисков, соединённых дугами, на которые разрежутся меридианы системы v . Некоторые из этих дуг будут параллельными. Если теперь каждый такой пучок параллельных дуг заменить на одну дугу, то получим сферический граф, вершинами которого служат g пар дисков.

Определение. Полученный граф $G = G(F, u, v)$ с дисками-вершинами, разбитыми на пары, называется D -графом диаграммы Хегора (F, u, v) .

Замечание 1. Важно отметить, что для восстановления диаграммы Хегора по её D -графу нужна дополнительная информация: сколько дуг в каждом пучке, как диски разбиты на пары и как диски каждой пары склеиваются друг с другом при отождествлении, обратном разрезанию кренделя по меридиональным дискам. Граф, снабжённый такой дополнительной информацией, называется *оснащённым*.

Разумеется, далеко не каждый абстрактно оснащённый сферический граф с $2g$ дисками-вершинами задаёт некоторую диаграмму Хегора. Для этого нужно, чтобы при склеивании дисков каждой пары концы дуг склеивались между собой и чтобы полученный набор простых замкнутых кривых состоял из ровно g кривых, объединение которых не разбивает поверхности кренделя.

2. Типы диаграмм Хегора

Идея грубой классификации диаграмм Хегора состоит в забывании про оснащения отвечающих им оснащённых D -графов. Разбиение вершин-дисков на пары сохраняется.

Определение. Абстрактные D -графы $G_1, G_2 \subset S^2$ называется эквивалентными, если существует гомеоморфизм $\varphi: S^2 \rightarrow S^2$, переводящий один граф в другой и сохраняющий разбиения их дисков-вершин на пары.

Определение. Будем говорить, что две диаграммы Хегора имеют один тип, если соответствующие им D -графы эквивалентны.

Мы будем рассматривать только так называемые *треугольные* D -графы и диаграммы.

Определение. D -граф $G \subset S^2$ называется треугольным, если он не имеет петель и двойных рёбер, причём каждая его грань содержит ровно три его ребра.

D -графы минимальных диаграмм Хегора большинства многообразий рода 2 и больше являются треугольными, хотя интересные многообразия могут задаваться и для «вырожденных» (не треугольных) диаграмм. Известно [1—3], что существует ровно один класс эквивалентности (*min*) треугольных диаграмм рода 2. Представляющий его D -граф является одномерным остовом тетраэдра, а разбиение вершин на пары произвольно (все они дают эквивалентные D -графы). Оказывается, что на уровне рода 3 число типов больше.

Теорема. Существует ровно 10 типов треугольных диаграмм Хегора рода 3.

Доказательство. Достаточно доказать, что существуют ровно 10 классов эквивалентности треугольных D -графов с шестью вершинами. Доказательство разобьём на два этапа. Сначала мы найдём все возможные такие графы в S^2 без учёта разбиения вершин на пары. Здесь удобно заменить диски-вершины обычными вершинами, т. е. точками.

Рассмотрим два графа. Один из них (обозначим его P_1) представляет собой одномерный остов симплициального комплекса, полученного приклеиванием двух правильных тетраэдров к двум различным граням третьего тетраэдра. Второй граф P_2 представляет собой одномерный остов октаэдра (рис. 1).

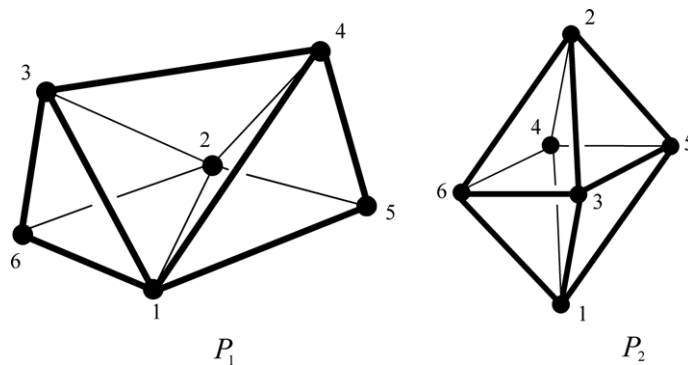


Рис. 1

По построению оба графа лежат в полиэдральной сфере и являются треугольными. Мы утверждаем, что любой сферический треугольный граф G с шестью вершинами изоморфен либо графу P_1 , либо графу P_2 .

Действительно, в графе G нет вершин валентности 6 или больше, как и вершин валентностей 1 или 2. Пусть в нём есть вершина валентности 5. Тогда дополнение в сфере к пятиугольной звезде этой вершины должно разбиваться оставшимися рёбрами графа G на треугольники. Простой перебор показывает, что такое разбиение единственно с точностью до гомеоморфизмов сферы, переводящих звезду в себя. В этом случае граф G является графом P_1 .

Пусть теперь максимальная валентность вершин графа G равна 4. Путём несложного подсчёта эйлеровой характеристики можно показать, что тогда все шесть вершин графа G имеют степень 4, а числа его рёбер и граней равны 12 и 8 соответственно. Поэтому G изоморфен одномерному остову октаэдра, т. е. графу P_2 .

Перейдём ко второму этапу доказательства: изучим, как вершины графов P_1 , P_2 можно разбить на пары. Начнём с графа P_1 . Занумеруем его вершины в порядке невозрастания их валентностей так, как это показано на рис. 1.

При этом для определённости будем считать, что вершины 3 и 6 соединены ребром. Тогда вершины можно разбить на пары следующими семью различными способами.

1. Если вершины 1, 2 лежат в одной паре, то получаются три возможности в зависимости от того, с какой вершиной объединяется третья вершина:

$$\{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}, \quad \{(1, 2), (3, 5), (4, 6)\}, \quad \{(1, 2), (3, 6), (4, 5)\}.$$

2. Если вершины 1, 5 лежат в одной паре, то получаются ещё три возможности в зависимости от того, с какой вершиной объединяется вторая вершина:

$$\{(1, 5), (2, 3), (4, 6)\}, \quad \{(1, 5), (2, 4), (3, 6)\}, \quad \{(1, 5), (2, 6), (3, 4)\}.$$

3. Последняя возможность такова:

$$\{(1, 3), (2, 4), (5, 6)\}.$$

Легко проверить, что указанные D -графы не эквивалентны и что других D -графов в данном случае нет.

Рассмотрим теперь граф P_2 . Занумеруем его вершины так, чтобы вершины 1, 2 не принадлежали одному ребру (т. е. были противоположными) и то же самое относилось к вершинам 3, 4 и 5, 6 (см. рис. 1). Тогда существуют всего три различных способа разбиения вершин на пары, в зависимости от того, сколько пар (три, одна, ни одной) составлены из противоположных вершин:

$$\{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}, \quad \{(1, 2), (3, 6), (4, 5)\}, \quad \{(1, 3), (2, 5), (4, 6)\}.$$

Итак, всего получилось 10 неэквивалентных D -графов с шестью вершинами. $\square$

3. Одна серия октаэдральных диаграмм

Мы опишем бесконечную серию диаграмм Хегора, задаваемых D -графом типа P_2 , диски-вершины которого разбиты на пары противоположных вершин $\{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}$. Удобно представлять себе P_2 лежащим в крае круглого шара с шестью срезанными конгруэнтными шапочками так, что вершины шапочек расположены в вершинах правильного октаэдра, вписанного в сферу, причём рёбра графа P_2 являются центральными проекциями на сферу отрезков рёбер октаэдра. Диски-вершины графа P_2 как раз и являются плоскими сечениями шара, по которым выполнялось отрезание.

Диаграммы серии параметризуются натуральным нечётным параметром n . Геометрический смысл этого параметра прост: для каждого ребра D -графа соответствующий пучок должен состоять из n параллельных дуг. Чтобы завершить описание диаграмм, нужно дооснастить D -граф (см. замечание 1), т. е. указать, как противоположные диски-вершины склеиваются друг с другом. Ответ таков: каждый диск склеивается с противоположным по суперпозиции параллельного переноса и топологического поворота в положительном направлении на угол

$\alpha \frac{\pi}{2n}$, где $\alpha = 1$ для одной пары противоположных дисков-вершин (скажем, дисков D_1, D_2), $\alpha = 2n$ для второй пары (дисков D_3, D_4) и $\alpha = 3n - 1$ для третьей пары (дисков D_5, D_6). При этом под топологическим поворотом на угол $\alpha \frac{\pi}{2n}$ понимается гомеоморфизм диска на себя, сдвигающий каждый лежащий на нём конец дуги диаграммы на α промежутков между такими концами. Полученный оснащённый D -граф обозначим через $P_2(n, \text{орр})$ (параметр орр напоминает, что мы разбили вершины графа P_2 на пары по принципу противоположности).

Теорема. Для любого натурального нечётного числа n оснащённый D -граф $P_2(n, \text{орр})$ задаёт диаграмму Хегора рода 3 некоторого замкнутого ориентируемого трёхмерного многообразия $M(n)$.

Доказательство. Каждому ребру $[i, j]$ D -графа $P_2(n, \text{орр})$, где i, j — номера концов ребра, соответствует пучок $\{i, j\}$ из n параллельных дуг. Всего в каждой вершине сходятся четыре таких пучка, отвечающих входящим в неё четырём рёбрам. Раскрасим все дуги в три цвета (скажем, красный, синий, зелёный) следующим образом. Все дуги пучков $\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}$ покрасим красным. Этим же цветом покрасим ещё четыре дуги, по одной крайней дуге в каждом из пучков $\{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}$, причём они должны примыкать к треугольникам с вершинами $(1, 5, 4), (1, 6, 3), (2, 5, 3), (2, 6, 4)$ соответственно. Все остальные дуги раскрасим так, чтобы при обходе края каждого диска D_i цвета концов этих дуг чередовались (при этом концы красных дуг не учитываются). На рис. 2 показан пример раскраски для $n = 5$ (здесь чёрная линия — красный цвет, серая — зелёный, пунктирная — синий цвет).

Выберем ещё ориентации всех дуг так, чтобы выполнялись следующие свойства.

1. Все красные дуги пучков $\{1, k\}$ исходят из диска D_1 , все красные дуги пучков $\{2, k\}$ входят в диск D_2 , где в обоих случаях $k = 3, 4, 5, 6$.
2. Все синие и зелёные дуги пучков $\{3, k\}$ исходят из диска D_3 , все синие и зелёные дуги пучков $\{4, k\}$ входят в диск D_4 , где в обоих случаях $k = 5, 6$.
3. Если концы двух некрашенных (т. е. синих или зелёных) дуг лежат на крае одного из оставшихся дисков D_i , $i = 1, 2, 5, 6$, и являются там соседними, то эти дуги должны иметь один и тот же тип (т. е. обе входить или обе исходить).

На рис. 2 показаны раскраска и ориентации дуг для $n = 5$. Указаны также ориентации дисков D_i и на крае каждого из них конец одной дуги помечен жирной точкой. Это сделано для того, чтобы гомеоморфизмы склеивания стали наглядными: каждый из них должен сохранять ориентации и переводить отмеченный конец в отмеченный конец.

Прямая проверка показывает, что при склеивании дисков по указанным гомеоморфизмам концы склеиваемых дуг всегда имеют один цвет, причём конец входящей дуги всегда склеивается с началом исходящей. Отсюда следует, что в результате такого склеивания получатся три набора ориентированных окружностей: красных, синих, зелёных. Более того, отдельно рассматривая склеивание

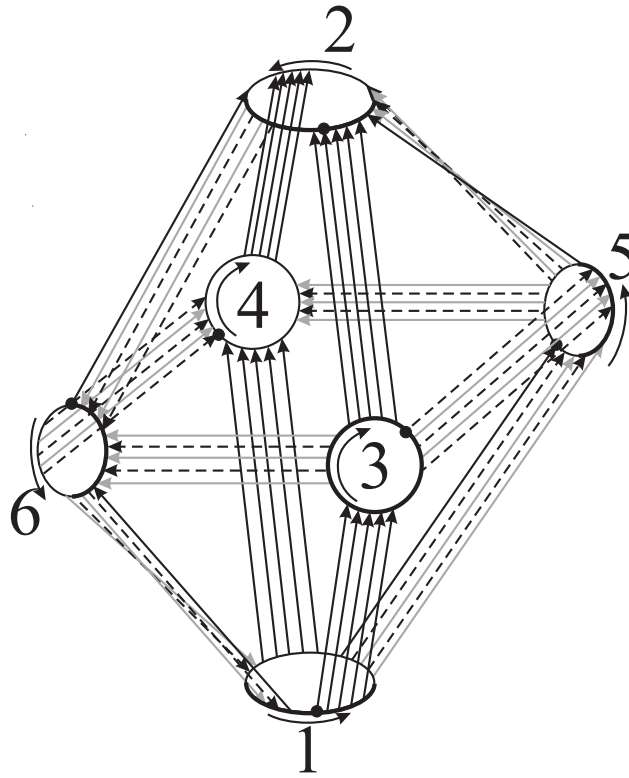


Рис. 2

дуг каждого цвета, нетрудно доказать, что на самом деле каждый набор состоит только из одной окружности.

Покажем теперь, что полученные три окружности действительно образуют систему меридианов, т. е. что они не разбивают поверхности $F = \partial H$, где H — крендель рода 3, полученный из шара склеиванием дисков. Ручки кренделя обозначим $A_{1,2}$, $A_{3,4}$, $A_{5,6}$ согласно номерам склеиваемых дисков. Вычислим первую группу гомологий многообразия $M'(n)$, получающегося из кренделя H приклеиванием ручек индекса 2 вдоль красной, синей и зелёной окружностей. Из описания раскрашивания и выбора ориентаций дуг легко извлечь следующую информацию.

1. Красная окружность проходит по ручке $A_{1,2}$ всего $2n+2$ раз, все в положительном направлении. Алгебраические числа её проходов по двум другим ручкам $A_{3,4}$, $A_{5,6}$ равны 0.
2. Синяя окружность проходит по ручке $A_{3,4}$ всего $2n$ раз, все в положительном направлении. Алгебраические числа её проходов по ручкам $A_{1,2}$ и $A_{5,6}$ равны 0 и 1 соответственно.

3. Единственное отличие зелёной окружности от синей состоит в том, что алгебраическое число её проходов по ручке $A_{5,6}$ равно -1 .

Отсюда следует, что матрица соотношений группы $H_1(M'(n); \mathbb{Z})$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2n+2 & 0 & 0 \\ 0 & n & 1 \\ 0 & n & -1 \end{pmatrix}.$$

Так как она невырожденная, то три раскрашенные кривые не разбивают поверхности кренделя и поэтому дают диаграмму Хегора многообразия $M(n)$, которое получается из многообразия $M'(n)$ заклеиванием двумя шарами его сферических краёв. $\square$

Замечание 2. Зная вид матрицы соотношений, нетрудно показать, что $H_1(M(n)) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2n(n+1)}$.

Замечание 3. Многообразие $M(1)$ есть $L(2,1) \# L(4,1)$, а многообразие $M(3)$ является гиперболическим, причём его объём равен $3,9404625 \pm 10^{-7}$.

Замечание 4. Для любого чётного n оснащённый граф $P_2(n, \text{орр})$ тоже задаёт диаграмму Хегора рода 3. Однако в ней два меридиана из разных семейств пересекаются ровно в одной точке. Поэтому род диаграммы можно понизить до 2.

Литература

- [1] Володин И. А., Кузнецов В. Е., Фоменко А. Т. О проблеме алгоритмического распознавания стандартной трёхмерной сферы // Успехи мат. наук. — 1974. — Т. 29, № 5. — С. 71—168.
- [2] Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Алгоритмические и компьютерные методы в трёхмерной топологии. — М.: Изд-во Моск ун-та, 1991.
- [3] Homma T., Ochiai M., Takahashi M. An algorithm for recognizing S^3 in 3-manifolds with Heegaard splittings of genus two // Osaka J. Math. — 1990. — Vol. 17. — P. 625—648.

