

О $SL(3, \mathbb{R})$ -действии на четырёхмерной сфере*

С. КУРОКИ

Университет Осаки

e-mail: d03sa004@ex.media.osaka-cu.ac.jp

УДК 515.162.4+515.164.8

Ключевые слова: группа Ли, гладкое действие, действия некомпактных групп Ли.

Аннотация

Мы рассматриваем естественное непрерывное $SL(3, \mathbb{R})$ -действие на S^4 , которое является продолжением $SO(3)$ -действия ψ из работы Утиды. Конструкция базируется на теореме Кейпера, утверждающей что фактор-пространство $\mathbb{C}P(2)$ при комплексном сопряжении есть S^4 . Мы также даём новое доказательство теоремы Кейпера.

Abstract

Sh. Kuroki, On $SL(3, \mathbb{R})$ -actions on 4-spheres, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 5, pp. 99—105.

We construct a natural, continuous $SL(3, \mathbb{R})$ -action on S^4 which is an extension of the $SO(3)$ -action ψ of Uchida. The construction is based on the Kuiper theorem asserting that the quotient space of $\mathbb{C}P(2)$ by complex conjugation is S^4 . We also give a new proof of the Kuiper theorem.

1. Введение

Одной из центральных проблем в теории групп преобразований является классификация действий групп Ли на гладких многообразиях (например, действий специальной ортогональной группы $SO(n)$ на комплексном проективном пространстве и действий специальной линейной группы $SL(n, \mathbb{R})$ на сфере). Когда данная группа Ли компактна, мы имеем богатую историю и изобилие исследований. Для некомпактных групп это не так. В этой статье мы рассмотрим действия некомпактных групп Ли.

Классификация действий групп оказывается за пределами возможностей, если не наложить каких-либо предварительных ограничений на эти действия. В случае группы $SL(n, \mathbb{R})$ и многообразия — m -мерной сферы S^m проблема классификации имеет свою историю. В 1974 году К. Р. Шнейдер [4] успешно классифицировал вещественные аналитические $SL(2, \mathbb{R})$ -действия на S^2 и, более общим образом, на поверхностях. Ф. Утида классифицировал вещественно аналитические действия $SL(n, \mathbb{R})$ на S^m для $n \geq 3$ в 1979 году [6] и на S^m для

* Автор поддержан грантом Японского общества продвижения науки.

$5 \leq n \leq m \leq 2n-2$ в 1981 году [7]. С другой стороны, известно, что эффективное непрерывное $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ -действие на S^{n-1} единственно и любое $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ -действие на S^m тривиально для $m \leq n-2$ [2, теорема 3.5]. Согласно этим результатам случаи, остающиеся нерешёнными в интервале $m \leq 2n-2$, — это $(n, m) = (3, 4)$, $(n, m) = (4, 5)$ и $(n, m) = (4, 6)$.

Все указанные решённые случаи обладали тем свойством, что ограничение действия $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ на максимальную компактную группу $\mathrm{SO}(n)$ единственно, и это свойство играло важную роль в классификации. Однако, такое ограничение действия не единственно в остальных случаях, перечисленных выше. В них нам нужно сначала увидеть, как много имеется $\mathrm{SO}(n)$ -действий на S^m (с точностью до эквивалентности), а затем проверить, какие из них продолжаются до $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ -действия.

В нашей статье мы рассматриваем случай $(n, m) = (3, 4)$. Неприводимое $\mathrm{SO}(3)$ -представление имеет нечётную размерность и единственно в каждой нечётной размерности. Тогда имеется в точности два $\mathrm{SO}(3)$ -представления размерности 5. Одно из них есть прямая сумма стандартного $\mathrm{SO}(3)$ -представления размерности 3 и тривиального представления размерности 2. Другое есть неприводимое $\mathrm{SO}(3)$ -представление размерности 5. Переходя к единичным сферам в этих представлениях, мы получим $\mathrm{SO}(3)$ -действия на S^4 , и известно, что любое локально гладкое $\mathrm{SO}(3)$ -действие на S^4 изоморфно одному из этих двух (см. [1, упражнения 7 и 8 к главе IV]).

Первое из указанных $\mathrm{SO}(3)$ -действий на S^4 продолжается до гладкого $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ -действия. На самом деле действие

$$\mathrm{SL}(3, \mathbb{R}) \times S^4 \rightarrow S^4,$$

определённое как

$$(A, (x, y)) \mapsto \frac{(Ax, y)}{|(Ax, y)|},$$

где $(x, y) \in S^4 \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$ и $|(Ax, y)|$ обозначает длину (Ax, y) , является желаемым продолжением. Однако неизвестно, будет ли второе $\mathrm{SO}(3)$ -действие на S^4 , обозначенное ψ в [8], продолжаться до гладкого $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ -действия. В 1985 году Утида [8] построил $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ -действие на S^4 , продолжающее действие ψ . Это действие непрерывно, но не гладко. Поэтому он поставил вопрос (см. [8] и [9, (P2)]): может ли $\mathrm{SO}(3)$ -действие ψ быть продолжено до гладкого $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ -действия на S^4 ?

Мы укажем непрерывное $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ -действие на S^4 , которое служит продолжением ψ , но отлично от построенного Утидой. Наша конструкция основана на теореме Кейпера из [3] о том, что фактор-пространство $\mathbb{C}P(2)$ по комплексному сопряжению есть S^4 . Наше действие гораздо более естественно, чем у Утиды. Но оказывается, что и наше действие также не гладко. Так что проблема Утиды остаётся открытой, и возможен отрицательный ответ.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы представляем два примера к вопросу о том, всегда ли действие компактной группы Ли продолжается до действия некомпактной группы Ли. Раздел 3 даёт новое доказательство

теоремы Кейпера. В разделе 4 мы строим непрерывное $SL(3, \mathbb{R})$ -действие на S^4 , продолжающее ψ , и доказываем в следующем разделе, что продолженное действие не гладко.

2. Примеры

В этом разделе мы даём два примера, касающиеся продолжения группового действия.

2.1. $SO(4)$ -действие на S^6

Рассмотрим $SO(4)$ -действие $\rho_4 \oplus \pi$ на $S^6 \subset \mathbb{R}^4 \oplus \mathbb{R}^3$, где ρ_4 есть стандартное действие на $\mathbb{R}^4$ и π — линейное действие на $\mathbb{R}^3$, индуцированное на $SO(3)$ сюръективным представлением $SO(4)$ на $SO(3)$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Предложение 2.1 ([7]). $SO(4)$ -действие $\rho_4 \oplus \pi$ не может быть продолжено до непрерывного действия $SL(4, \mathbb{R})$ на S^6 .

Это утверждение было доказано Утидой в [7] и является одним из важных фактов для классификации $SL(4, \mathbb{R})$ -действий на S^6 .

2.2. $SO(2)$ -действие на $\mathbb{R}^2$

Рассмотрим $SO(2)$ -действие r_p на $\mathbb{R}^2$, определённое следующим образом:

$$r_p: SO(2) \times \mathbb{R}^2 \ni (A, x) \mapsto A^p x \in \mathbb{R}^2,$$

где p натуральное. Тогда справедливо следующее утверждение.

Предложение 2.2. $SO(2)$ -действия r_1 и r_2 могут быть продолжены до $SL(2, \mathbb{R})$ -действий. Однако r_p при $p \geq 3$ не продолжается ни до какого $SL(2, \mathbb{R})$ -действия на $\mathbb{R}^2$.

Доказательство. $SL(2, \mathbb{R})$ -действие $R_1: SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, определённое по правилу $R_1(A, x) = Ax$, где $A \in SL(2, \mathbb{R})$ и $x \in \mathbb{R}^2$, является продолжением r_1 . Мы отождествляем $\mathbb{R}^2$ с верхним полупространством $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$. Тогда преобразование Мёбиуса из $SL(2, \mathbb{R})$ на H даёт продолжение r_2 .

Предположим, что r_p продолжается до $SL(2, \mathbb{R})$ -действия R_p на $\mathbb{R}^2$ при $p \geq 3$. Тогда ядро R_p содержит ядро r_p , где под ядром действия понимается пересечения подгрупп изотропии. Вообще, ядро G -действия является нормальной подгруппой в G . В нашем случае ядро r_p есть циклическая группа $\mathbb{Z}_p$ порядка p . Но никакая нормальная подгруппа в $SL(2, \mathbb{R})$ не может содержать $\mathbb{Z}_p$ ($p \geq 3$). Это противоречие. Значит, r_p не может быть продолжено ни до какого $SL(2, \mathbb{R})$ -действия при $p \geq 3$. $\square$

Это предложение можно также вывести из классификационного результата Шнейдера о $SL(2, \mathbb{R})$ -действиях $\mathbb{R}^2$ из [4], но мы дали прямое доказательство.

3. Подготовка построения

Опишем структуру орбит для $\mathrm{SO}(3)$ -действия ψ на S^4 , определённого во введении. Напомним, что действие ψ было получено переходом к единичной сфере из неприводимого $\mathrm{SO}(3)$ -представления размерности 5. Это неприводимое представление может быть явно описано как присоединённое действие $\mathrm{SO}(3)$ на векторном пространстве

$$\mathfrak{sym}(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : \mathrm{trace}(A) = 0, A = A^t\},$$

где A^t обозначает транспонированную матрицу к матрице A . Рассмотрим

$$S^4 = \{A \in \mathfrak{sym}(3) : \mathrm{trace}(A^t A) = 1\}.$$

Тогда отображение детерминанта $\pi: S^4 \rightarrow \mathbb{R}$ отождествляет пространство орбит действия ψ с интервалом $[-\frac{1}{3\sqrt{6}}, \frac{1}{3\sqrt{6}}]$. Мы легко можем проверить, что $\pi^{-1}(\frac{1}{3\sqrt{6}})$ и $\pi^{-1}(-\frac{1}{3\sqrt{6}})$ являются сингулярными орбитами, изоморфными $\mathrm{SO}(3)/\mathrm{O}(2) = \mathbb{R}P(2)$, а другие орбиты главные и изоморфны $\mathrm{SO}(3)/K$, где $K = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ есть

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Напомним лемму из [5].

Лемма 3.1 ([5, лемма 5.3.1]). Пусть G — компактная связная группа Ли и K_1, K_2 — замкнутые подгруппы G . Положим $X_1 = G \times_{K_1} D^{k_1}$ и $X_2 = G \times_{K_2} D^{k_2}$, где D^{k_1} и D^{k_2} — диски, K_i действует линейно на D^{k_i} ($i = 1, 2$) и $\dim X_1 = \dim X_2$. Пусть $f, f': \partial X_1 \rightarrow \partial X_2$ — G -эквивариантные диффеоморфизмы. Тогда $M(f) = X_1 \cup_f X_2$ эквивариантно диффеоморфно $M(f') = X_1 \cup_{f'} X_2$ как G -многообразие, если выполнено одно из следующих условий:

- 1) $f^{-1}f'$ продолжается до G -эквивариантного диффеоморфизма на X_1 ;
- 2) $f'f^{-1}$ продолжается до G -эквивариантного диффеоморфизма на X_2 .

Следующее предложение даёт характеристику действия ψ . Оно также даёт критерий того, когда некоторое гладкое 4-многообразие диффеоморфно S^4 .

Предложение 3.1. Если четырёхмерное компактное связное гладкое $\mathrm{SO}(3)$ -многообразие имеет две сингулярные орбиты $\mathbb{R}P(2) \simeq \mathrm{SO}(3)/\mathrm{O}(2)$ и тип главных орбит есть $\mathrm{SO}(3)/\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, тогда это многообразие эквивариантно диффеоморфно S^4 с $\mathrm{SO}(3)$ -действием ψ .

Доказательство. Из [1, 5] следует, что многообразие в предложении имеет вид $M(f) = X_1 \cup_f X_2$, где $X_i = \mathrm{SO}(3) \times_{\mathrm{O}(2)} D^2$ ($i = 1, 2$) служат трубчатыми окрестностями двух сингулярных орбит и приклеивающее отображение f есть $\mathrm{SO}(3)$ -эквивариантный диффеоморфизм между $\partial X_1 \simeq \mathrm{SO}(3)/\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ и $\partial X_2 \simeq \mathrm{SO}(3)/\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Поскольку f есть $\mathrm{SO}(3)$ -отображение на $\mathrm{SO}(3)/\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, мы можем считать f элементом $N(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2; \mathrm{SO}(3))/\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, где $N(H; G)$ есть

нормализатор H в G . Мы легко проверим, что $N(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2; SO(3))/\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ имеет следующих представителей:

$$\left\{ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Следовательно, можно считать, что отображение склейки f есть одна из указанных выше матриц.

Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму, где $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 = K$:

$$\begin{array}{ccc} SO(3) \times_H (H/K) & \xrightarrow{\simeq} & SO(3)/K \\ \downarrow 1 \times R_f & & \downarrow R_f \\ SO(3) \times_H (H/K) & \xrightarrow{\simeq} & SO(3)/K. \end{array}$$

Здесь $R_f([X]) = [Xf]$ ($X \in SO(3)/K$), H есть подгруппа в $SO(3)$, которая изоморфна $O(2)$ и содержит элемент f и группу K , горизонтальные стрелки определены правилом $[g, hK] \mapsto ghK$. Легко видеть, что $H/K \simeq S^1$ и $SO(3) \times_H (H/K) \simeq SO(3) \times_{O(2)} S^1 = \partial X_1$. Если $f = \alpha$, $f = \beta$ или $f = \gamma$, то R_f есть антиподальная инволюция S^1 . Таким образом, R_f может быть продолжено до диффеоморфизма на D^2 . Следовательно, $1 \times R_f$ продолжается до $SO(3)$ -эквивариантного диффеоморфизма на $X_1 = SO(3) \times_{O(2)} D^2$ для $f = \alpha$, $f = \beta$ или $f = \gamma$. Значит, по лемме 3.1 $M(I) \simeq M(f)$, если $f = \alpha$, $f = \beta$ или $f = \gamma$. Так как $\alpha A = \gamma$ и $\alpha A^{-1} = \beta$, то $M(I) \simeq M(\alpha) \simeq M(A) \simeq M(A^{-1})$ по лемме 3.1. Таким образом, все $M(f)$ $SO(3)$ -эквивариантно диффеоморфны S^4 с действием ψ . $\square$

Следующая теорема была доказана Кейпером в 1974 году [3], но мы дадим её прямое доказательство.

Теорема 3.1. *Рассмотрим $\mathbb{Z}_2$ -действие на комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P(2) = (\mathbb{C}^3 - \{0\})/\mathbb{C}^*$ комплексным сопряжением. Тогда пространство орбит есть четырёхмерная сфера, т. е.*

$$\mathbb{C}P(2)/\mathbb{Z}_2 \simeq S^4.$$

Доказательство. Естественное $SO(3)$ -действие ϕ на $\mathbb{C}^3 - \{0\}/\mathbb{C}^* = \mathbb{C}P(2)$ имеет две сингулярные орбиты. Одна есть вещественная проективная плоскость $\mathbb{R}P(2)$, естественно расположенная в $\mathbb{C}P(2)$, а другая диффеоморфна S^2 . Главные орбиты ϕ изоморфны $SO(3)/\mathbb{Z}_2$. Так как действие ϕ коммутирует с комплексным сопряжением, оно индуцирует $SO(3)$ -действие $\bar{\phi}$ на $\mathbb{C}P(2)/\mathbb{Z}_2$. Поскольку одна сингулярная орбита $\mathbb{R}P(2)$ у ϕ есть множество неподвижных точек для комплексного сопряжения на $\mathbb{C}P(2)$, а другая есть S^2 , индуцированное $SO(3)$ -действие $\bar{\phi}$ на $\mathbb{C}P(2)/\mathbb{Z}_2$ имеет две сингулярные орбиты, которые

обе диффеоморфны $\mathbb{R}P(2)$, а главные орбиты индуцированного действия $\bar{\phi}$ изоморфны $SO(3)/\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Следовательно, $\mathbb{C}P(2)/\mathbb{Z}_2$ диффеоморфно S^4 (более того, $\bar{\phi}$ согласуется с действием ψ) согласно предложению 3.1. $\square$

4. Построение $SL(3, \mathbb{R})$ -действия на S^4

Рассмотрим естественное $SL(3, \mathbb{R})$ -действие Φ на $\mathbb{C}^3 - \{0\}/\mathbb{C}^* = \mathbb{C}P(2)$. Так как Φ коммутирует с комплексным сопряжением $\mathbb{C}P(2)$, оно индуцирует $SL(3, \mathbb{R})$ -действие Ψ на S^4 согласно теореме 3.1. Ограничение действия Ψ на $SO(3)$ согласуется с $SO(3)$ -действием ψ , как замечено при доказательстве теоремы 3.1. Значит, наше $SL(3, \mathbb{R})$ -действие Ψ есть продолжение ψ .

Замечание. Действие Ψ имеет одну сингулярную орбиту $\mathbb{R}P(2)$ и одну открытую $S^4 - \mathbb{R}P(2)$. Поскольку непрерывное $SL(3, \mathbb{R})$ -действие на S^4 из [8] имеет две открытые орбиты и одну сингулярную $SO(3)/\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, действие Ψ отлично от действия из [8]. Эти два действия выглядят вполне различными, но возможно, что между ними существует определённая связь.

5. Недифференцируемость Ψ

Отметим, что наше действие Ψ не гладко. Пусть

$$p = [1 : 0 : 0] \in (\mathbb{C}^3 - \{0\})/(\mathbb{C}^* \times \mathbb{Z}_2) = S^4.$$

Возьмём малую окрестность U_p точки p и локальную карту $\varphi: U_p \rightarrow \mathbb{R}^4$, определённую следующим образом:

$$\varphi([1 : x_1 + y_1 i : x_2 + y_2 i]) = (x_1, x_2, y_1^2 - y_2^2, y_1 y_2).$$

Точку p φ переводит в начало $\mathbb{R}^4$. Рассмотрим преобразование Ψ_t , индуцированное действием Ψ матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

По определению $\Psi_t([1 : z_1 : z_2]) = [1 : z_1 + tz_2 : z_2]$ при $[1 : z_1 : z_2] \in S^4$. Для каждого t имеется достаточно малая окрестность $U'_p \subset U_p$, такая что $\Psi_t(U'_p) \subset U_p$. Следовательно, Ψ_t вблизи p может быть описано с помощью локальной карты φ . Именно, если обозначить $\varphi \circ \Psi_t \circ \varphi^{-1}$ через F_t , мы будем иметь

$$F_t((0, 0, y_1^2 - y_2^2, y_1 y_2)) = (0, 0, y_1^2 - y_2^2 + 2ty_1 y_2 + t^2 y_2^2, y_1 y_2 + ty_2^2).$$

Если мы положим $Y_1 = y_1^2 - y_2^2$ и $Y_2 = y_1 y_2$, то $y_2^2 = (\sqrt{Y_1^2 + 4Y_2^2} - Y_1)/2$, так что имеем

$$F_t((0, 0, Y_1, Y_2)) = \left(0, 0, Y_1 + 2tY_2 + t^2 \frac{\sqrt{Y_1^2 + 4Y_2^2} - Y_1}{2}, Y_2 + t \frac{\sqrt{Y_1^2 + 4Y_2^2} - Y_1}{2} \right).$$

Это показывает, что F_t для $t \neq 0$ не дифференцируемо в начале, поэтому Ψ не гладко.

Автор благодарен профессору Миики Масуде за полезное обсуждение.

Литература

- [1] Bredon G. E. Introduction to compact transformation groups. — Academic Press, 1972.
- [2] Cairns G., Ghys É. The local linearization problem for smooth $SL(n)$ -actions // Enseign. Math. (2). — 1997. — Vol. 43. — P. 133–171.
- [3] Kuiper N. H. The quotient space of $\mathbb{C}P(2)$ by complex conjugation is 4-sphere // Math. Ann. — 1974. — Vol. 208. — P. 175–177.
- [4] Schneider C. R. $SL(2, \mathbb{R})$ actions on surfaces // Amer. J. Math. — 1974. — Vol. 96. — P. 511–528.
- [5] Uchida F. Classification of compact transformation groups on cohomology complex projective spaces with codimension one orbits // Japan. J. Math. — 1977. — Vol. 3, no. 1. — P. 141–189.
- [6] Uchida F. Classification of real analytic $SL(n, \mathbb{R})$ -actions on n -sphere // Osaka J. Math. — 1979. — Vol. 16. — P. 561–579.
- [7] Uchida F. Real analytic $SL(n, \mathbb{R})$ -actions on sphere // Tôhoku Math. J. — 1981. — Vol. 33. — P. 145–175.
- [8] Uchida F. Construction of a continuous $SL(3, \mathbb{R})$ -action on 4-sphere // Publ. Res. Inst. Math. Sci. — 1985. — Vol. 21. — P. 425–431.
- [9] Uchida F., Mukoyama K. Smooth actions of non-compact semi-simple Lie groups // Current Trends in Transformation Groups / A. Bak et al. (eds.). — Kluwer Academic. — P. 201–215.

