Новое доказательство формулы Герберта кратных точек

Г. ЛИППНЕР
Будапештский университет им. Л. Этвёша, Венгрия
e-mail: lipi@cs.elte.hu

А. СЮЧ
Будапештский университет им. Л. Этвёша, Венгрия
e-mail: szucs@cs.elte.hu

УДК 515.164.6

Ключевые слова: погружения, кратные точки, сингулярные отображения, обобщённая конструкция Понтрягина—Тома.

Аннотация

Мы доказываем формулу Герберта кратных точек по модулю 2-кручения с помощью техники универсальных погружений.

Abstract

G. Lippner, A. Szűcs, A new proof of the Herbert multiple-point formula, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 5, pp. 107—116.

We prove the Herbert multiple-point formula modulo 2-torsion using the method of the universal immersion.

1. Введение

Мы введём наши обозначения, которые совпадают с теми, которыми пользовался Ронга [6]. Все многообразия и отображения в этой статье предполагаются гладкими, если не оговорено противное. Пусть V^n — n-мерное многообразие. Обозначим его k-кратное произведение через $V^{(k)}$. *Узкой диагональю* в $V^{(k)}$ назовём

$$\delta_V(k) = \{(y, \dots, y) \colon y \in V\},$$

толстой диагональю в $V^{(k)}$ назовём

$$\Delta_V(k) = \{(x_1, \dots, x_k) \in V^{(k)} \colon \text{найдутся } i,\ j, \text{ такие что } x_i \neq x_j\}.$$

Пусть $f \colon V^n \to W^m$ — собственное (т. е. прообразы компактных множеств компактны) самотрансверсальное погружение и $f^k \colon V^{(k)} \to W^{(k)}$ трансверсально к $\delta_W(k)$ вне $\Delta_V(k)$. (Первое условие удовлетворено автоматически, если V —

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 5, с. 107—116.

компактное многообразие.) Напомним теперь хорошо известную конструкцию многообразий кратных точек погружения $f\colon V^n \to W^m$. Для любого целого k пусть

$$N_k(f) = \{y \in W\colon |f^{-1}(y)| = k\}, \quad M_k(f) = f^{-1}(N_k) -$$

множества k-кратных точек f соответственно в V и W. Далее, пусть

$$\hat{M}_k(f) = \{(x_1, \ldots, x_k) \in V^{(k)} \setminus \Delta_V(k)\colon f(x_i) = f(x_j)\} -$$

множество нетривиальных представителей k-кратных наборов точек. Из самотрансверсальности f следует, что $\hat{M}_k(f)$ является многообразием. Ясно, что симметрическая группа S_k действует свободно на $\hat{M}_k(f)$, а S_{k-1} действует свободно на последних $k-1$ координатах в $\hat{M}_k(f)$, и мы можем определить следующие фактор-многообразия:

$$\tilde{N}_k(f) = \hat{M}_k(f)/S_k, \quad \tilde{M}_k(f) = \hat{M}_k(f)/S_{k-1}.$$

Они будут называться многообразиями кратных точек f в образе и в области определения соответственно. Классы $(x_1, \ldots, x_k) \in \hat{M}_k(f)$ в $\tilde{N}_k(f)$ и $\tilde{M}_k(f)$ будем обозначать $[x_1, \ldots, x_k]$ и $(x_1, [x_2, \ldots, x_k])$ соответственно. Мы можем определить естественные отображения многообразий кратных точек на замыкание множеств самопересечений с помощью следующих формул:

$$\begin{aligned} f_k\colon \tilde{M}_k(f) \to V, &\quad f_k(x_1, [x_2, \ldots, x_k]) = x_1, \\ g_k\colon \tilde{N}_k(f) \to W, &\quad g_k([x_1, \ldots, x_k]) = f(x_1). \end{aligned}$$

Эти многообразия являются погружениями, значит, они реализуют множества k-кратных наборов точек погружёнными многообразиями. Теперь мы можем сформулировать результат, являющийся нашей целью (ср. [3]).

Теорема (формула Герберта, ориентируемый случай). *Пусть $f\colon V^n \to W^m$ есть собственное самотрансверсальное погружение ориентируемого многообразия чётной коразмерности. Тогда замыкания множеств k-кратных пересечений $\bar{N}_k(f)$ и $\bar{M}_k(f)$ являются носителями фундаментальных классов с коэффициентами в $\mathbb{Z}$. Обозначая через n_k и m_k классы, двойственные к ним по Пуанкаре в W и V соответственно, и полагая $e = e(\nu_f)$, мы имеем*

$$m_k = f^*(n_{k-1}) - e \cdot m_{k-1}.$$

Римяный в [4] дал новое доказательство теоремы Герберта с помощью «универсального погружения», введённого вторым автором. Но это доказательство работало только для аналитического случая и по модулю кручения.

Задача настоящей статьи состоит в улучшении доказательства Римяного с тем, чтобы охватить а) полностью комплексный случай, б) действительный ориентируемый случай по модулю 2-кручения для отображений чётной коразмерности. (Заметим, что для отображений нечётной коразмерности множество кратных точек в образе может быть неориентируемым, а в области определения нет канонического способа выбрать ориентацию.) Ещё одно преимущество нашего доказательства состоит в том, что оно работает после небольшой модификации также и для многих сингулярных отображений. (Возможно, для всех, для которых эта формула имеет смысл без модификации.)

Подобный метод использовался Казаряном [1, 2] для некоторых комплексных сингулярных отображений, причём в основе опять лежало «универсальное отображение» второго автора.

Как уже было отмечено, основным средством нашего доказательства служит «универсальное погружение». Его конструкцию мы напомним в следующем разделе. Оно является обобщением «универсального вложения» (фиксированной коразмерности k), введённого Томом. Это отображение $BO(k) \hookrightarrow MO(k)$, и оно универсально в том смысле, что для гладкого вложения $M^n \hookrightarrow N^{n+k}$ любой коразмерности k мы имеем гомотопически единственное отображение $\varphi\colon N^{n+k} \to MO(k)$, которое трансверсально к $BO(k)$ и $\varphi^{-1}(BO(k)) = M^n$. Аналогично, «универсальное погружение» есть такое отображение $f\colon Y \to X$, что для погружения $g\colon M^n \to N^{n+k}$ любой коразмерности k имеется гомотопически единственное отображение $\varphi\colon N^{n+k} \to X$, для которого $\varphi^{-1}(f(X)) = g(M)$. Более того, X и Y имеют определённые стратификации, из которых индуцируются стратификации кратных точек M и N. Идея доказательства формулы Герберта заключается в том, чтобы доказать её для этого «универсального погружения».

Мы рассмотрим также модификацию $\bar{f}\colon \bar{Y} \to \bar{X}$, которая универсальна для погружений $g\colon M \to N$ специального класса, для которого имеется упорядочение каждого множества $g^{-1}(x)\colon x \in N$, непрерывно зависящего от x. Другими словами, g является проекцией вложения $\tilde{g}\colon M \hookrightarrow N \times \mathbb{R}$. Мы назовём погружения с таким свойством *упорядоченными* погружениями. Строение $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ проще, чем строение X и Y. Римяный использовал эти более простые пространства, чтобы доказать формулу Герберта по модулю кручения. Наш основной вклад состоит в том, что мы смогли вернуться от пространств $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ к X и Y.

Организация статьи такая: сперва мы кратко описываем построение пространств X, Y, $\bar{X}$, $\bar{Y}$, универсального погружения $f\colon Y \to X$ и универсального упорядоченного погружения $\bar{f}\colon \bar{Y} \to \bar{X}$. Далее мы рассмотрим вывод формулы Герберта для $\bar{f}$ с помощью метода Римяного, описанного в [4], и затем выведем формулу для f из этого результата. Наконец, мы покажем, как формула может быть обобщена на отображения с некоторыми особенностями. Во всей статье будет подразумеваться, что коэффициенты когомологий берутся либо в $\mathbb{Z}_p$ (p нечётно), либо в $\mathbb{Q}$.

2. Построение универсальных отображений

Теперь мы кратко опишем построение универсального погружения, идея которого принадлежит второму автору (и его прежнему научному руководителю М. Громову), обращая особое внимание на свойства, которые нам нужны для доказательства формулы. Детали можно найти в [4, 7, 9, 10]. Сперва мы опишем, как строятся пространства $\bar{Y}$ и $\bar{X}$. Пусть k — фиксированная чётная коразмерность. Оба пространства склеены из блоков, по одному блоку для каждого натурального числа. Пространства, которые состоят только из первых s блоков, обозначим $\bar{Y}_s$ и $\bar{X}_s$. (Отображение $\bar{f}_s = \bar{f}|_{\bar{Y}_s} \colon \bar{Y}_s \to \bar{X}_s$ будет универсальным упорядоченным погружением без точек кратности $s+1$.) Пусть γ^k обозначает каноническое векторное расслоение над базой $BSO(k)$. Определим расслоение

$$\bar{\xi}_s = \gamma_2^k \times \ldots \times \gamma_s^k \text{ над базой } \bar{K}_s = B[SO(k) \times SO(k)^{s-1}] = BSO(k)^s.$$

(Все γ_i^k совпадают с расслоением γ^k. Нижний индекс i показывает, что расслоение рассматривается над i-м фактором s-кратного произведения $BSO(k) \times \ldots \times BSO(k)$.) Расслоение на диски $\bar{\xi}_s$ будет s-м блоком $\bar{Y}$. Таким образом, $\bar{Y}_s$ получается из $\bar{Y}_{s-1}$ приклеиванием к нему дискового расслоения $\bar{\xi}_s$ вдоль его границы с помощью отображения, которое мы здесь не описываем. Итак, $\bar{Y}_s \setminus \bar{Y}_{s-1}$ есть расслоение на открытые диски $\bar{\xi}_s$. Аналогично определим

$$\bar{\eta}_s = \gamma_1^k \times \ldots \times \gamma_s^k \text{ над базой } \bar{L}_s = B[SO(k)^s].$$

Дисковое расслоение $\bar{\eta}_s$ будет s-м блоком в $\bar{X}$. Мы определим отображение $\bar{f}|_{D(\bar{\xi}_s)} \colon D(\bar{\xi}_s) \to D(\bar{\eta}_s)$ как естественное вложение. Тем самым закончено описание универсального упорядоченного погружения $\bar{f} \colon \bar{Y} \to \bar{X}$.

В случае, когда погружение произвольно, нормальное расслоение множества точек кратности s разбивается в сумму из s k-плоскостей локально, но не обязательно глобально. Таким образом, структурная группа нормального расслоения множества точек кратности s есть в этой ситуации $SO(k)^s \rtimes S_s$, а не $SO(k)^s$ (здесь S_s — симметрическая группа на s элементах и $\rtimes$ обозначает полупрямое произведение с очевидным действием S_s на $SO(k)^s$).

Так же, как и раньше, X_s и Y_s будут обозначать те подпространства X и Y, которые содержат только первые s блоков. $Y_s \setminus Y_{s-1}$ — s-й блок пространства Y — будет расслоением на открытые диски в

$$\xi_s = (\gamma_2^k \times \ldots \times \gamma_s^k) \rtimes S_{s-1} \text{ над базой } K_s = B[SO(k) \times (SO(k)^{s-1} \rtimes S_{s-1})].$$

(Здесь символ $\rtimes$ в определении расслоения означает следующее. Для данного пространства T и группы G, действующей на T, можно сформировать произведение $T \times EG$, где EG — полное пространство универсального главного G-расслоения. Значит, G диагонально действует на этом произведении свободно. Определим $T \rtimes G$ как $T \times_G EG$.) В X s-м блоком будет дисковое расслоение

$$\eta_s = (\gamma_1^k \times \ldots \times \gamma_s^k) \rtimes S_s) \text{ над базой } L_s = B[SO(k)^s \rtimes S_s].$$

Отображение $f|_{K_s}$ определено так, что η_s индуцирует $\gamma_1^k \times \xi_s$. Очевидно, $f|_{K_s}$ является s-листным накрытием.

Ясно, что для каждого $s = 1, 2, \ldots$ существует естественное отображение $g \colon \bar{Y} \to Y$, переводящее $\bar{Y}_s$ в Y_s.

3. Формула для $\bar f$

Если $U \subset M$ — подмножество, замыкание которого представляет некоторый гомологический класс, то $[U]$ будет обозначать когомологический класс в $H^*(M)$, двойственный по Пуанкаре гомологическому классу, представленному замыканием U. Формула Герберта может теперь быть записана в виде

$$[\bar K_r] = (\bar f)^*[\bar L_{r-1}] - e(\bar f)[\bar K_{r-1}] \in H^{(r-1)k}(\bar Y). \qquad (*)$$

Следуя методу Римяного, мы сначала докажем ограничение этого равенства на $\bar K_s$, а затем докажем это равенство в $\bar Y$ с помощью рассуждений Майера—Вьеториса.

Так как $\bar Y$ не многообразие, обозначение $[\bar K_r]$ нуждается в объяснении. Само $\bar K_r$ есть нуль-сечение в r-м блоке $\bar Y_r \setminus \bar Y_{r-1}$, который является расслоением открытых дисков. Это нуль-сечение имеет двойственный когомологический класс в пространстве Тома расслоения, а именно класс Тома расслоения. Этот класс может рассматриваться как элемент $H^*(\bar Y, \bar Y \setminus \bar K_r)$, и, ограничивая его на $\bar Y$, мы получим $[\bar K_r]$. Давайте подсчитаем $[\bar K_r]|_{\bar K_s}$. Сначала заметим, что если $s < r$, то замыкание $\bar K_{r-1}$ не пересекается с $\bar K_s$, так что класс $[\bar K_r]$ ограничивается на нуль. Следовательно, можно допустить, что $r \leqslant s$. Окрестность $\bar K_s$ в $\bar Y$ есть дисковое расслоение $Q_1 = \gamma_2^k \times \ldots \times \gamma_s^k$. Далее, замыкание $\bar K_r$ пересекает это расслоение по

$$Q_r = \bigcup \operatorname{span}(\gamma_{i_1}^k, \ldots, \gamma_{i_{s-r}}^k),$$

где подразумевается, что объединение берётся по всем $s-r$-элементным подмножествам $\{i_1, \ldots, i_{s-r}\}$ в $\{2, 3, \ldots, s\}$. Это значит, что

$$\begin{aligned}[\bar K_r]|_{\bar K_s} &= [Q]|_{\bar K_s} = e(\nu(Q_r \subset Q_1)|_{\bar K_s}) = e(\nu(Q_r \subset Q_1)|_{\bar K_s}) = \\ &= e\left(\bigoplus(\gamma_{j_1}^k \times \ldots \times \gamma_{j_{r-1}}^k)\right) = \sum e(\gamma_{j_1}^k)\ldots e(\gamma_{j_{r-1}}^k) = \sigma_{r-1}(e(\gamma_2^k), \ldots, e(\gamma_s^k)).\end{aligned}$$

Подобный подсчёт показывает, что $f^*[\bar L_r]|_{\bar K_s} = \sigma_r(e(\gamma_1^k), \ldots, e(\gamma_s^k))$. Очевидно, что $e(f)|_{\bar K_s} = e(\gamma_1^k)$. Значит, для доказательства формулы, ограниченной на $\bar K_s$, нам нужно доказать только равенство

$$\sigma_{r-1}(e(\gamma_2^k), \ldots, e(\gamma_s^k)) = \sigma_{r-1}(e(\gamma_1^k), \ldots, e(\gamma_s^k)) - e(\gamma_1^k)\sigma_{r-2}(e(\gamma_2^k), \ldots, e(\gamma_s^k)),$$

которое, очевидно, является тождеством.

Из предыдущих рассуждений вытекает, что $(*)$ справедливо в $\bar Y_1$, поскольку это просто случай $s = 1$. Допустим, мы знаем, что формула справедлива в $\bar Y_s$. Докажем, что она справедлива также в $\bar Y_{s+1}$. Рассмотрим следующий участок последовательности Майера—Вьеториса для тройки $\bar Y_{s+1} = \bar Y_s \cup D\bar\xi_{s+1}$:

$$\begin{aligned}&H^{(r-1)k-1}(\bar Y_s) \oplus H^{(r-1)k-1}(D\bar\xi_{s+1}) \xrightarrow{1} H^{(r-1)k-1}(\bar Y_s \cap D\bar\xi_{s+1}) \xrightarrow{2} \\ &\qquad \xrightarrow{2} H^{(r-1)k}(\bar Y_s \cup D\bar\xi_{s+1}) \xrightarrow{3} H^{(r-1)k}(\bar Y_s) \oplus H^{(r-1)k}(D\bar\xi_{s+1}).\end{aligned}$$

Примем следующие обозначения:

$$\bar{h}_r = \big([\bar{K}_r] - (\bar{f})^*[\bar{L}_{r-1}] + e(\bar{f})[\bar{K}_{r-1}]\big) \in H^{(r-1)k}(\bar{Y}).$$

Нам нужно доказать, что $\bar{h}_r|_{\bar{Y}_{s+1}} = 0$. По нашему индуктивному предположению и рассуждениям предыдущего абзаца h_r отображается в $(0,0)$ отображением 3. Значит, достаточно доказать, что отображение 2 нулевое. В силу точности последовательности достаточно показать, что отображение 1 сюръективно. В действительности уже отображение $H^{(r-1)k-1}(D\bar{\xi}_{s+1}) \to H^{(r-1)k-1}(\bar{Y}_s \cap D\bar{\xi}_{s+1})$ сюръективно. Заметим, что эта последняя когомологическая группа совпадает с $H^{(r-1)k-1}(S\bar{\xi}_{s+1})$ (здесь S означает сферическое расслоение) и отображение включается в последовательность Гизина (как отображение 4):

$$H^{(r-1)k-1}(D\bar{\xi}_{s+1}) \xrightarrow{4} H^{(r-1)k-1}(S\bar{\xi}_{s+1}) \xrightarrow{5}$$
$$\xrightarrow{5} H^{(r-1)k}(D\bar{\xi}_{s+1}, S\bar{\xi}_{s+1}) \xrightarrow{6} H^{(r-1)k}(D\bar{\xi}_{s+1}).$$

Итак, достаточно показать, что отображение 4 сюръективно. Это эквивалентно тому, что отображение 5 нулевое, что, в свою очередь, эквивалентно инъективности отображения 6. По теореме об изоморфизме Тома отображение 6 эквивалентно умножению на класс Эйлера для $\bar{\xi}_{s+1}$ в базе расслоения. Кольцо когомологий базы $(B[SO(k)^s])$ является полиномиальным кольцом с коэффициентами в $\mathbb{Z}_p$ или $\mathbb{Q}$, а эйлеров класс не нуль (здесь используется, что коразмерность чётна), поэтому умножение, очевидно, инъективно. Это заканчивает доказательство формулы для $\bar{f}$.

4. Формула для f

Теперь мы воспользуемся формулой для $\bar{f}$, чтобы доказать формулу для f. Снова мы используем обозначения предыдущего раздела:

$$h_r = ([K_r] - (f)^*[L_{r-1}] + e(f)[K_{r-1}]) \in H^{(r-1)k}(Y).$$

Мы хотим показать, что $h_r = 0$. Ясно, что достаточно убедиться, что $h_r|_{Y_s} = 0$ для любого s.

Можно было бы попытаться провести доказательство, как в предыдущем разделе. Однако для этого следовало бы разобраться в когомологиях K_s, чтобы доказать, что $h_r|_{Y_s \setminus Y_{s-1}} = 0$, что было ключевым моментом. Эти кольца когомологий очень сложны. Римяный обходит эту проблему, рассматривая только рациональные коэффициенты.

Здесь мы предлагаем идею, которая позволит нам получить формулу также для коэффициентов из $\mathbb{Z}_p$, где p — любое нечётное простое число. Мы используем естественное отображение $g\colon \bar{Y} \to Y$ (см. раздел 2).

Очевидно что $h_r|_{Y_s} = 0$, если $s < r-1$, так как в этом случае не существует точек r- или $(r-1)$-кратности и, значит, нужные гомологические классы равны нулю. Допустим, что это так и для $s = r-1$ (мы докажем это в конце раздела).

С другой стороны, $g^*(h_r) = \bar{h}_r = 0$. Теперь мы покажем, что $h_r|_{Y_r} = 0$. Рассмотрим следующую диаграмму. Ряды этой последовательности являются точными последовательностями пар $Y_{r-1} \subset Y_r$ и $\bar{Y}_{r-1} \subset \bar{Y}$. Вертикальные отображения индуцированы $g\colon \bar{Y}_s \to Y_s$, $s = r, r-1$. Для сокращения обозначений положим $i = (r-1)k$.

$$\begin{tikzcd} & H^i(Y_r/Y_{r-1}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"] & H^i(Y_r) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g^*"] & H^i(Y_{r-1}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{i+1}(Y_r/Y_{r-1}) \arrow[d] \\ H^{i-1}(\bar{Y}_{r-1}) \arrow[r, "\bar{\partial}"] & H^i(\bar{Y}_r/\bar{Y}_{r-1}) \arrow[r, "\bar{\alpha}"] & H^i(\bar{Y}_r) \arrow[r, "\bar{\beta}"] & H^i(\bar{Y}_{r-1}) \arrow[r] & H^{i+1}(\bar{Y}_r/\bar{Y}_{r-1}) \end{tikzcd}.$$

Допустим, что $\beta(h_r|_{Y_r}) = h_r|_{Y_{r-1}} = 0 \in H^i(Y_{r-1})$. Тогда в силу точности существует элемент $x \in H^i(Y_r/Y_{r-1})$, для которого $\alpha(x) = h_r|_{Y_r}$. В силу коммутативности диаграммы мы имеем $g^*(\alpha(x)) = \bar{\alpha}(\gamma(x))$. По формуле, доказанной для $\bar{f}$, мы получаем $g^*(\alpha(x)) = g^*(h_r|_{Y_r}) = \bar{h}_r|_{\bar{Y}_r} = 0$, поэтому $\bar{\alpha}(\gamma(x)) = 0$. Если мы покажем, что как $\bar{\alpha}$, так и γ инъективны, то получим $x = 0$ и, значит, $h_r|_{Y_r} = 0$.

Лемма 1. *Отображение $\bar{\alpha}$ инъективно.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\bar{\partial}$ есть нулевое отображение. Мы можем сказать больше: группа $H^{i-1}(\bar{Y}_{r-1})$ нулевая. Вспомним, что коразмерность k чётна, тогда $i - 1 = (r-1)k$ нечётно. Пространство $\bar{Y}_s$ не имеет когомологий в нечётных размерностях. Это может быть доказано индукцией по s. Рассмотрим точную последовательность для нечётного j

$$H^j(\bar{Y}_s/\bar{Y}_{s-1}) \to H^j(\bar{Y}_s) \to H^j(\bar{Y}_{s-1}).$$

Здесь последняя группа нулевая по индукции. Первая группа также нулевая, так как когомологическое кольцо $\bar{Y}_s/\bar{Y}_{s-1}$ такое же, как когомологическое кольцо $\bar{K}_s$, которое полиномиально порождено классами Понтрягина и, возможно, эйлеровым классом, которые все чётномерны. (Напомним, что кольцом коэффициентов у нас служит $\mathbb{Z}_p$ или $\mathbb{Q}$ и что k чётно.) Значит, и средняя группа нулевая, и утверждение действительно справедливо по индукции. □

Лемма 2. *Отображение γ инъективно.*

Доказательство. Сделаем сначала общее замечание. Рассмотрим конечную группу G, которая свободно действует на пространстве A. Как и раньше, EG обозначает полное пространство главного универсального G-расслоения. Это стягиваемое пространство, на котором G действует свободно. Мы можем образовать пространство $A \times_G EG$, которое является фактором $A \times EG$ по диагональному действию G. Так как G действует свободно на обоих сомножителях, действие может быть переключено на каждую сторону, так что мы получаем два расслоения: $A \times_G EG \xrightarrow{A} BG$ и $A \times_G EG \xrightarrow{EG} A/G$. Второе расслоение есть гомотопическая эквивалентность, так как EG стягиваемо. Значит, мы получаем расслоение (пространства гомотопически эквивалентного) A/G над BG со слоем A: $A/G \xrightarrow{A} BG$.

Используем теперь это общее построение в следующей постановке:

$$\begin{array}{c} A = D(\gamma_2^k \times \ldots \times \gamma_r^k) \times ES_{r-1} \\ \Big\downarrow {\scriptstyle /S_{r-1}} \\ A/S_{r-1} = D(\gamma_2^k \times \ldots \times \gamma_r^k) \rtimes S_{r-1} \end{array}.$$

Здесь A гомотопически эквивалентно r-му блоку $\bar{Y}$ и A/S_{r-1} есть в точности r-й блок Y. Эти пространства имеют границу, так что наше общее построение даёт пару расслоений:

$$\begin{array}{c} (D\xi_r, S\xi_r) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle (D\bar{\xi}_r, S\bar{\xi}_r)} \\ BS_{r-1} \end{array}.$$

В силу теоремы об изоморфизме Тома первая ненулевая группа когомологий пары $(D\bar{\xi}_r, S\bar{\xi}_r)$ лежит в размерности $(r-1)k$. Тогда то же верно для групп гомологий и, по теореме Гуревича, для гомотопических групп. Значит, $\bar{Y}_r/\bar{Y}_{r-1} = D\bar{\xi}_r/S\bar{\xi}_r$ имеет структуру CW-комплекса без клеток в размерностях, меньших $(r-1)k$, за исключением одной 0-клетки. Возьмём структуру CW-комплекса для BS_{r-1} также с только одной 0-клеткой. Мы получим при этом CW-структуру для $D\xi_r/S\xi_r$, в которой каждая клетка есть произведение клетки базы и клетки слоя. Тогда $(r-1)k$-остов $D\xi_r/S\xi_r$ есть в точности прообраз 0-клетки базы. Значит, $sk_{(r-1)k}(D\xi_r/S\xi_r) \subset sk_{(r-1)k}(D\bar{\xi}_r/S\bar{\xi}_r)$. Тогда отображение

$$(D\bar{\xi}_r/S\bar{\xi}_r) = \bar{Y}_r/\bar{Y}_{r-1} \to Y_r/Y_{r-1} = D\xi_r/S\xi_r$$

сюръективно на уровне $(r-1)k$-циклов и, значит, инъективно на уровне $(r-1)k$-коциклов. Следовательно,

$$\gamma\colon H^{(r-1)k}(Y_r/Y_{r-1}) \to H^{(r-1)k}(\bar{Y}_r/\bar{Y}_{r-1})$$

инъективно. Это завершает доказательство. $\square$

Чтобы завершить доказательство того, что $h_r|_{Y_r} = 0$, нам нужно показать, что $h_r|_{Y_{r-1}} = 0$. Более общо, достаточно показать, что если погружение $g\colon M \to N$ не имеет точек кратности r, то формула Герберта справедлива, т. е. (в исходных обозначениях) $g^*(n_{r-1}) = e(\nu_g) \cdot m_{r-1}$. Множества $r-1$-кратных точек такого погружения являются подмногообразиями как в M, так и в N. Мы их обозначим K и L соответственно. Значит, $[K] = m_{r-1}$ и $[L] = n_{r-1}$.

Рассмотрим теперь нормальное расслоение ν_g для g над M. Обозначим через $s\colon M \to \nu_g$ сечение ν_g, являющееся малым трансверсальным возмущением нулевого сечения. Оно определяет малое возмущение g, которое мы обозначим $\tilde{g}$. Это возмущение трансверсально к L. Если s достаточно мало, то $\tilde{g}(x) \in L$, только если $s(x) = x$. Теперь по основному свойству двойственности имеем

$$g^*[L] = \tilde{g}^*[L] = [\tilde{g}^{-1}(L)] = [K \cap \{s(x) = x\}] = [K] \cup [\{s(x) = x\}] = e(\nu_g)[K],$$

что есть в точности то, что мы хотели доказать.

Наконец, мы должны показать, что $h_r|_{Y_s} = 0$, если $s > r$. Это будет сделано по индукции. Рассмотрим когомологическую длинную точную последовательность пары $Y_{s-1} \subset Y_s$ (мы снова упростим обозначение, полагая $i = (r-1)k$):

$$H^i(Y_s/Y_{s-1}) \to H^i(Y_s) \xrightarrow{(1)} H^i(Y_{s-1}) \to H^{i+1}(Y_s/Y_{s-1}).$$

Здесь первая и последняя группы равны нулю, так как Y_s/Y_{s-1} есть пространство Тома $(s-1)k$-мерного векторного расслоения, поэтому первые $(s-1)k-1$ группы когомологий Y_s/Y_{s-1} исчезают, и $i \leqslant (s-1)k-1$, так как $r < s$. Поэтому отображение (1) есть изоморфизм. По индукции $h_r|_{Y_{s-1}} = 0$, и, благодаря изоморфизму, $h_r|_{Y_s} = 0$. Тем самым доказательство формулы Герберта завершено. Этот метод доказывает комплексный случай полностью, а вещественный ориентируемый в чётной коразмерности по модулю 2-кручения.

5. Отображения с особенностями

Зафиксируем r и чётную коразмерность k. Мы рассмотрим отображения общего положения, которые могут иметь особенности, но не имеют точек кратности $r-1$ в окрестности особенностей. Для таких отображений также имеется конструкция универсального отображения (см. [5]). Построение этого универсального отображения подобно описанному в разделе 2. Оно имеет даже подобную блочную структуру. Единственное отличие состоит в том, что имеются такие блоки, которые приклеены к Y_{r-2} и отвечают допускаемым нами мультиособенностям. Поскольку мы не допускаем мультиособенностей, имеющих точки кратности $r-1$ в своих окрестностях, никакие блоки не приклеены к $Y_s \setminus Y_{r-2}$ при $s \geqslant r-1$. Для $s \geqslant r-2$ обозначим через Z_s пространство Y_s вместе с блоками, приклеенными к Y_{r-2}. Мы будем использовать обозначения предыдущего раздела. Так же как и в случае погружений, достаточно показать, что $h_r|_{Z_s} = 0$ для $s \geqslant r$. Если $s \geqslant r$, то в точной последовательности

$$H^i(Z_s/Z_{s-1}) \to H^i(Z_s) \xrightarrow{(1)} H^i(Z_{s-1}) \to H^{i+1}(Z_s/Z_{s-1})$$

первая и последняя группы опять нулевые, в действительности $Y_s/Y_{s-1} = Z_s/Z_{s-1}$. Тогда по индукции достаточно показать, что $h_r|_{Z_r} = 0$. Рассмотрим следующую диаграмму длинных точных последовательностей:

$$\begin{tikzcd}
H^i(Y_r/Y_{r-1}) \arrow[r, "\alpha"] & H^i(Y_r) \arrow[r, "\beta"] & H^i(Y_{r-1}) \arrow[r] & H^{i+1}(Y_r/Y_{r-1}) \\
H^i(Z_r/Z_{r-1}) \arrow[r, "\tilde\alpha"] \arrow[u, "\cong"] & H^i(Z_r) \arrow[r, "\tilde\beta"] \arrow[u, "g^*"] & H^i(Z_{r-1}) \arrow[r] \arrow[u] & H^{i+1}(Z_r/Z_{r-1}) \arrow[u, "\cong"]
\end{tikzcd}.$$

Если g^* отображает $h_r|_{Z_r}$ в нуль, то всё сделано, так как тогда найдётся $x \in H^i(Z_r/Z_{r-1}) = H^i(Y_r/Y_{r-1})$, такой что $\tilde\alpha(x) = h_r|_{Z_r}$ и $\alpha(x) = g^*(h_r|_{Z_r}) = 0$. (Последнее равенство есть просто исходная формула.) Но мы показали в процессе нового доказательства, что α инъективно, поэтому $x = 0$, и тогда $h_r|Z_r = 0$.

Итак, нам нужно только показать, что $h_r|Z_{r-1} = 0$. Это делается с помощью в точности того же рассуждения, как и в случае погружений.

Литература

[1] Казарян М. Мультиособенности, кобордизмы и исчислительная геометрия // Успехи мат. наук. — 2003. — Т. 58, № 4. — С. 29—88.

[2] Казарян М. Домашняя страница в Интернете: `http://www.mi.ras.ru/~kazarian`.

[3] Herbert R. J. Multiple points of immersed manifolds. — Thesis. — University of Minnesota, 1975.

[4] Rimányi R. Thom polynomials, symmetries and incidences of singularities // Invent. Math. — 2001. — Vol. 143. — P. 499—521.

[5] Rimányi R., Szűcs A. Generalized Pontryagin–Thom construction for maps with singlarities // Topology. — 1998. — Vol. 37. — P. 1177—1191.

[6] Ronga F. On multiple points of smooth immersions // Comment. Math. Helv. — 1980. — Vol. 55. — P. 521—527.

[7] Szűcs A. Cobordism groups of l-immersions. I // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1976. — Vol. 27. — P. 343—358.

[8] Szűcs A. Cobordism groups of l-immersions. II // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1976. — Vol. 28. — P. 93—102.

[9] Szűcs A. Cobordism groups of immersions with restricted self-intersection // Osaka J. Math. — 1984. — Vol. 21. — P. 71—80.

[10] Szűcs A. Cobordism of immersions and singular maps, loop spaces and multiple points // Geometric and Algebraic Topology. — Warsaw: PWN, 1986. — (Banach Center Publications; Vol. 18). — P. 239—253.