

Теория спектральных последовательностей. II*

Ю. Т. ЛИСИЦА

Российский университет дружбы народов
e-mail: lisica@online.ru

УДК 517.831+517.95

Ключевые слова: вырожденная двойственность, компактный прямой предел, потоки, распределения Шварца, рефлексивность векторных пространств (ко)гомологий.

Аннотация

В работе продолжается изучение спектральных последовательностей в абелевых категориях. Рассматриваются проявления различных двойственностей в теории спектральных последовательностей. Особый интерес представляют двойственность в теории локально выпуклых топологических векторных пространствах и использование результатов функционального анализа для решения (ко)гомологических проблем (теоремы о невырожденном спаривании (ко)гомологий многообразия).

Abstract

Ju. T. Lisica, Theory of spectral sequences. II, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 5, pp. 117–149.

In this paper, we continue to discuss the theory of spectral sequences in Abelian categories. In this connection, attention is paid to display different dualities in the theory of spectral sequences. The duality in locally convex, topological vector spaces is of special interest. We use results of functional analysis for decision of (co)homology problems (theorems on nondegenerate pairing (co)homology) of manifolds.

1. Введение

Двойственность в математике хорошо известна. Однако при большом числе двойственных понятий, конструкций, теорем, теорий, подходов к исследованию тех или иных объектов в математике *нет* строгого определения двойственности. Двойственность, за малым исключением (например, аксиомы инцидентности в проективной геометрии), не поддаётся аксиоматизации (чаще сами аксиомы дуализируются) и лежит в самой природе математических объектов и математической логики.

Двойственность возникает при первых определениях во всех математических (и не только) теориях. Например, двойственность между объектами и

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03-01-00705).

фактор-объектами в любой категории; при определении морфизма $f: a \rightarrow b$ в метакатегории [16] с очевидными двойственными объектами: областью отправления $a = \operatorname{dom} f$ и областью прибытия $b = \operatorname{cod} f$ морфизма f , а вместе с предыдущей двойственностью в предабелевой категории возникают четыре двойственных между собой объекта: ядро $\operatorname{Ker} f$, коядро $\operatorname{Coker} f$, образ $\operatorname{Im} f$ и кообраз $\operatorname{Coim} f$ морфизма f . Сами морфизмы как объекты выделяют двойственные классы инъекций и сюръекций, которые с понятием слабой эквивалентности (в замкнутых модельных категориях) полностью описывают определённые свойства как самих объектов, так и произвольных морфизмов данной категории. Таким образом, двойственные понятия в (правильно) развитой теории *умножаются и переплетаются* самым невероятным (но закономерным) образом. Примерами таких сложных и серьёзных связей являются двойственность алгебр и коалгебр [22], двойственность когомологических операций и гомологических коопераций в теории гомотопий [22], двойственные теории Квиллена и Сулливана, описывающие в равной степени рациональный гомотопический тип многообразия на языке минимальных моделей [8, 40], двойственность Пуанкаре—Вердье в теории пучков [12], зеркально двойственные многообразия Калаби—Яу в симплектической геометрии [44], двойственность категории коммутативных $\mathbb{Z}$ -алгебр и категории аффинных схем, двойственность Картье и странная двойственность в алгебраической геометрии [6, 29, 39], двойственность в тензорных категориях и двойственность Ленглендса в квантовых группах [10, 13].

В теории спектральных последовательностей в произвольных абелевых категориях [15] двойственность присутствует во всех известных её проявлениях: фильтрации и кофильтрации, мономорфизмы и эпиморфизмы, подобъекты и фактор-объекты, инъективные и проективные точные пары, прямые и обратные пределы, (ко)гомологии как подобъекты и как фактор-объекты, различные сходимости к $A^{-\infty}$ и к A^{∞} , спектральные последовательности «правой» и «левой полуплоскости» и т. д.

При выборе дополнительных аксиом абелевой категории для построения спектральных последовательностей проявляется так называемый *первый принцип двойственности*, известный как принцип «обращения стрелок» [3, 6, 11, 16], заключающийся в введении двойственной категории, объектами которой являются объекты исходной категории (или, чуть более общо, объекты, находящиеся во взаимно-однозначном соответствии с объектами исходной категории), а в качестве морфизмов между двумя объектами двойственной категории принимают морфизмы исходной категории между этими объектами, но только взятые в обратном порядке. Этот принцип двойственности является *зеркальным*, мы назовём его ещё *номинальным*, потому что, по существу, он состоит в *переименовании* понятий: мономорфизмы в исходной категории называются эпиморфизмами в двойственной, и наоборот, прямые суммы — прямыми произведениями, и наоборот, и т. д. Интересен вопрос о существовании *реальной* категории, отличной от рассматриваемой двойственной категории, но ей *эквивалентной*. Например, категория дискретных абелевых групп *реально* двойственна катего-

рии компактных хаусдорфовых коммутативных групп и непрерывных гомоморфизмов, определяемой функтором непрерывных характеров Понтрягина. Более того, в понтрягинской двойственности есть дополнительная структура спаривания между двойственными объектами, чего нет между объектами в формально двойственных категориях. Тем не менее в приведённом примере зеркальность сохраняется.

Второй принцип двойственности проявляется в абелевых категориях между подобъектами и фактор-объектами фиксированного объекта [3]. Это реальная двойственность, назначение которой состоит в том, чтобы различными способами описать *один и тот же объект*, например объект (ко)гомологий, спектральную последовательность и т. п. Часто он также является зеркальным, но, как мы увидим ниже, не всегда.

Связь между двойственными категориями фиксируется в виде теорем об изоморфизме двойственных объектов (двойственность Пуанкаре, двойственность Александра—Понтрягина, двойственность Лефшеца) или в виде теорем о зацеплении двойственных объектов (двойственность Понтрягина, теорема Хана—Банаха о продолжении непрерывного функционала, из которой следует, что топологическое векторное пространство и его топологически сопряжённое составляют дуальную пару). Теоремы о сопряжённых функторах отражают более глубокую связь между двойственными категориями. Окончательная их связь проявляется в введении пограничных объектов (например, (ко)гомологий на бесконечности [23], (ко)гомологий связи и окружения [24], сильных пограничных (ко)гомологий [14, 37]) и рассмотрении соотношений между ними. В нашем случае это диаграмма (60) в [15], а в этой работе — диаграммы (26) и (29), где, например, во второй диаграмме в спектральной последовательности Адамса стабильная гомотопическая группа гомотопического обратного предела фильтрации Адамса связывает искомую стабильную гомотопическую группу спектра (пространства) с предельной группой проективной точной пары, к которой условно сходится эта спектральная последовательность.

Одной из целей настоящей работы является иллюстрация *третьего принципа двойственности*: в конкретных категориях часто пропадает симметрия между двойственными функторами, объектами и конструкциями (это проявляется в том, что один из них вырождается), что указывает на некоторое неравенство (неравноправие) между ними. Например, в категории R -модулей и, в частности, в категории абелевых групп, функтор прямого предела точен, в то время как функтор обратного предела, вообще говоря, неточен справа. Каждое отделимое локально выпуклое топологическое векторное пространство есть проективный предел нормированных пространств, но только пространство Макки может быть индуктивным пределом нормированных пространств, или индуктивная топология прямой системы топологических векторных пространств задаёт проективную топологию сопряжённого пространства, равного проективному пределу обратной системы сопряжённых пространств, но не наоборот, в отличие от прямых сумм и прямых произведений.

2. Спектральная последовательность Атьи—Хирцебруха

Пусть X — CW -пространство или CW -спектр, а $\{X_s\}$ — возрастающая фильтрация на X остовами X_s (более общо, CW -подпространствами или CW -подспектрами, такими что $\bigcup_s X_s = X$). С каждым спектром M связывают обобщённые (экстраординарные) теории когомологий $M^*(-)$ и гомологий $M_*(-)$, т. е.

$$M^m(X) = \{X, M\}^m = \{X, M\}_{-m}, \quad M_m(X) = \{S, M \wedge X\}_m,$$

где $\{Z, Y\}_m = \{\Sigma^m Z, Y\}$ — группа стабильных гомотопических классов, S — сферический спектр, а Σ^m — m -кратная надстройка. Для пространства рассматриваются как приведённые, так и абсолютные теории; для спектров теории всегда приведённые. Обозначим через $X = \circ$ точечный спектр, который мы будем называть тривиальным спектром. Заметим, что $M^m(\circ) = M_m(\circ) = 0$ в отличие от абсолютных когомологий и гомологий точки, для которых

$$M^m(*) = \{S^0, M\}_{-m} = \pi_{-m}(M), \quad M_m(*) = \{S^0, M\}_m = \pi_m(M) -$$

группы коэффициентов теорий.

Рассмотрим точные инъективную и проективную пары (A^s, E^s) и (C^s, E^s) с

$$A^s = M^m(X, X_{s-1}), \quad C^s = M^m(X_s), \quad E^s = M^m(X_s, X_{s-1}),$$

которые определяют *когомологическую спектральную последовательность Атьи—Хирцебруха* $\{E_r^s, d_r^s\}$ (с $E_2^{s,t} = H^s(X; \pi_{-t}(M))$, $s + t = m$, в случае фильтрации остовами) и точные инъективную и проективную пары (A^s, E^s) и (C^s, E^s) с

$$A^s = M_m(X_{-s}), \quad C^s = M_m(X, X_{-s}), \quad E^s = M_m(X_{-s}, X_{-s-1}),$$

которые определяют *гомологическую спектральную последовательность Атьи—Хирцебруха* $\{E_s^r, d_s^r\}$ (с $E_{s,t}^2 = H_s(X; \pi_t(M))$, $s + t = m$, в случае фильтрации остовами).

Теорема 1 ([38]). Пусть $\{X_s\}$ — такая CW -фильтрация на X , что $\bigcup_s X_s = X$. Тогда для любого спектра M имеют место тождества

$$M_m(X) = \varinjlim_s M_m(X_s), \quad \varinjlim_s M_m(X, X_s) = 0, \quad (1)$$

$$\varprojlim_s M^m(X, X_s) = 0, \quad \varprojlim_s^1 M^m(X, X_s) = 0 \quad (2)$$

и точность короткой последовательности Милнора

$$0 \rightarrow \varprojlim_s^1 M^{m-1}(X_s) \rightarrow M^m(X) \rightarrow \varprojlim_s M^m(X_s) \rightarrow 0. \quad (3)$$

Теорема 2 ([32]). Пусть X является CW -пространством или связным спектром, т. е. найдётся такое t_0 , что $\pi_t(X) = 0$ для всех $t < t_0$. Тогда когомологические спектральные последовательности Атьи—Хирцебруха, порождённые

инъективной и проективной точными парами (A^s, E^s) и (C^s, E^s) , являются спектральными последовательностями «правой полуплоскости» и условно сходятся к $M^m(X) = A^{-\infty}$ и $M^m(X) = C^\infty$ соответственно. Более того, для них верны структурные теоремы 2 и 3 из [15] соответственно.

Доказательство. Если X — пространство, то $X_s = \emptyset$ для всех $s < 0$, а если X — связный спектр (без ограничения общности считаем, что $t_0 = 0$), то его можно заменить гомотопически эквивалентным спектром с тривиальными отрицательными остовами. В обоих случаях $A^s = M^m(X, X_{s-1}) = M^m(X)$ и $C^s = M^m(X_s) = 0$ для всех $s < 0$. Следовательно, обе порождённые точными парами спектральные последовательности являются спектральными последовательностями «правой полуплоскости».

Из этого следует, что для инъективной точной пары $\varinjlim_s A^s = M^m(X)$, а для проективной точной пары $\varinjlim_s C^s = 0$. Но в категории абелевых групп $\varinjlim_s {}^1C^s = 0$, следовательно, спектральная последовательность, порождённая проективной точной парой, условно сходится к C^∞ и для неё верна структурная теорема 3 из [15].

Из (2) следует, что спектральная последовательность, порождённая инъективной точной парой, условно сходится к $A^{-\infty}$ и для неё верна структурная теорема 2 из [15].

Теорема 3 ([32]). Пусть X является CW -пространством или связным спектром. Тогда гомологические спектральные последовательности Атьи—Хирцебруха, порождённые инъективной и проективной точными парами, являются спектральными последовательностями «левой полуплоскости» и сильно сходятся к $M_m(X)$.

Доказательство аналогично предыдущему.

Теорема 4. Если спектр X не является связным, то когомологическая спектральная последовательность Атьи—Хирцебруха, порождённая инъективной точной парой, является спектральной последовательностью «всей плоскости». В этом случае она условно сходится к $A^{-\infty} = \varinjlim_s M^m(X, X_s)$ и для неё имеет место структурная теорема 4 из [15]. Более того, имеет место точная последовательность

$$0 \rightarrow \varprojlim_s I_s^m \rightarrow M^m(X) \rightarrow \varprojlim_s M^m(X)/I_s^m \rightarrow 0, \quad (4)$$

где

$$I_s^m = \text{Im}(M^m(X, X_s) \rightarrow M^m(X)),$$

которая совпадает с короткой точной последовательностью Милнора (3). Если дополнительно потребовать, чтобы $\varinjlim_s M^*(X_s) = 0$, то, во-первых,

$$\varinjlim_s M^*(X, X_s) = M^*(X),$$

во-вторых, спектральная последовательность, порождённая проективной точной парой, условно сходится к C^∞ и для неё верна структурная теорема 7 из [15].

Доказательство. Из формулы (2) вытекает условная сходимост комологической спектральной последовательности, порождённой инъективной точной парой, к $A^{-\infty} = \varinjlim_s M^m(X, X_s)$. Поэтому для неё верна структурная теорема 4 из [15]. Рассмотрим теперь длинную точную комологическую последовательность

$$\dots \rightarrow M^m(X, X_s) \rightarrow M^m(X) \rightarrow M^m(X_s) \rightarrow M^{m+1}(X, X_s) \rightarrow \dots, \quad (5)$$

из которой образуем две точные последовательности

$$0 \rightarrow J_s^{m-1} \rightarrow M^m(X, X_s) \rightarrow I_s^m \rightarrow 0, \quad (6)$$

$$0 \rightarrow I_s^m \rightarrow M^m(X) \rightarrow M^m(X_s) \rightarrow J_s^m \rightarrow 0, \quad (7)$$

где

$$J_s^m = \text{Im}(M^m(X_s) \rightarrow M^{m+1}(X, X_s)).$$

К первой применим функтор $\varprojlim_s$ и получим точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \varprojlim_s J_s^{m-1} \rightarrow \varprojlim_s M^m(X, X_s) \rightarrow \varprojlim_s I_s^m \rightarrow \\ \rightarrow \varprojlim_s^1 J_s^{m-1} \rightarrow \varprojlim_s^1 M^m(X, X_s) \rightarrow \varprojlim_s^1 I_s^m \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (8)$$

которая в силу (2) превращается в тождества

$$\varprojlim_s J_s^{m-1} = \varprojlim_s^1 I_s^m = 0 \quad (9)$$

и изоморфизм

$$\varprojlim_s I_s^m \cong \varprojlim_s^1 J_s^{m-1}. \quad (10)$$

Ввиду первого тождества (9) можем применить функтор $\varprojlim_s$ ко второй последовательности (7) и получить (см. [34]) точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \varprojlim_s I_s^m \rightarrow M^m(X) \rightarrow \varprojlim_s M^m(X_s) \rightarrow \varprojlim_s J_s^m \rightarrow \\ \rightarrow 0 \rightarrow \varprojlim_s^1 M^m(X_s) \rightarrow \varprojlim_s^1 J_s^m \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (11)$$

которая распадается в силу второго тождества в (9) в точную последовательность

$$0 \rightarrow \varprojlim_s I_s^m \rightarrow M^m(X) \rightarrow \varprojlim_s M^m(X_s) \rightarrow 0 \quad (12)$$

и изоморфизм

$$\varprojlim_s^1 M^m(X_s) \cong \varprojlim_s^1 J_s^m. \quad (13)$$

Наконец, к точной последовательности

$$0 \rightarrow I_s^m \rightarrow M^m(X) \rightarrow M^m(X)/I_s^m \rightarrow 0$$

применим функтор $\varprojlim_s$ и получим в силу первого тождества из (9) точную последовательность

$$0 \rightarrow \varprojlim_s I_s^m \rightarrow M^m(X) \rightarrow \varprojlim_s M^m(X)/I_s^m \rightarrow 0, \quad (14)$$

которая является искомой формулой (4) в силу (12), (13) и (10) и совпадает с формулой Милнора (3).

Если дополнительно потребовать, чтобы $\varinjlim_s M^*(X_s) = 0$, то из очевидного тождества $\varinjlim_s^1 M^*(X_s) = 0$ вытекает, что, во-первых, когомологическая спектральная последовательность условно сходится к C^∞ и для неё верна структурная теорема 7 из [15], во-вторых, если применить точный функтор $\varinjlim_s$ к (5), то когомологическая спектральная последовательность Атьи—Хирцебруха условно сходится к $A^{-\infty} = M^m(X)$.

Теорема 4 доказана полностью.

Теорема 5. Если спектр X не является связным, то гомологическая спектральная последовательность Атьи—Хирцебруха, порождённая проективной точной парой, является спектральной последовательностью «всей плоскости» и условно сходится к $C^\infty = \varprojlim_s M_m(X, X_{-s})$. Если дополнительно потребовать, чтобы

$$\varprojlim_s M_*(X_{-s}) = \varprojlim_s^1 M_*(X_{-s}) = 0,$$

то имеет место короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow \varprojlim_s I_m^s \rightarrow M_m(X) \rightarrow \varprojlim_s M_m(X)/I_m^s \rightarrow 0, \quad (15)$$

где

$$I_m^s = \text{Im}(M_m(X_{-s}) \rightarrow M_m(X)), \quad m \geq 0,$$

которая совпадает с точной последовательностью

$$0 \rightarrow \varprojlim_s^1 M_{m+1}(X, X_{-s}) \rightarrow M_m(X) \rightarrow \varprojlim_s M_m(X, X_{-s}) \rightarrow 0. \quad (16)$$

Более того, для спектральных последовательностей, порождённых инъективной и проективной парами, верны структурные теоремы 4 и 7 из [15].

Доказательство. Второе условие из (1) и равенство $\varinjlim_s^1 M_m(X, X_{-s}) = 0$ обеспечивают условную сходимость к C^∞ . Докажем формулы (16) и (15). Применим функтор $\varprojlim_s$ к короткой точной последовательности

$$0 \rightarrow J_{m+1}^s \rightarrow M_m(X_{-s}) \rightarrow M_m(X_{-s})/J_{m+1}^s \rightarrow 0, \quad (17)$$

где

$$J_{m+1}^s = \text{Im}(M_{m+1}(X, X_{-s}) \rightarrow M_m(X_{-s})), \quad m \in \mathbb{Z},$$

и получим точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \varprojlim_s J_{m+1}^s \rightarrow \varprojlim_s M_m(X_{-s}) \rightarrow \varprojlim_s M_m(X_{-s})/J_{m+1}^s \rightarrow \\ \rightarrow \varprojlim_s^1 J_{m+1}^s \rightarrow \varprojlim_s^1 M_m(X_{-s}) \rightarrow \varprojlim_s^1 M_m(X_{-s})/J_{m+1}^s \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (18)$$

которая в силу условий $\varprojlim_s M_m(X_{-s}) = 0$ и $\varprojlim_s^1 M_m(X_{-s}) = 0$ вырождается в тождества

$$\varprojlim_s J_{m+1}^s = 0, \quad (19)$$

$$\varprojlim_s^1 M_m(X_{-s})/J_{m+1}^s = 0 \quad (20)$$

и в изоморфизм

$$\varprojlim_s M_m(X_{-s})/J_{m+1}^s \cong \varprojlim_s^1 J_{m+1}^s. \quad (21)$$

Теперь к точной последовательности

$$0 \rightarrow M_m(X_{-s})/J_{m+1}^s \rightarrow M_m(X) \rightarrow M_m(X, X_{-s}) \rightarrow J_m^s \rightarrow 0 \quad (22)$$

применим функтор $\varprojlim_s$ и получим в силу условия (20) (см. [34]) точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \varprojlim_s M_m(X_{-s})/J_{m+1}^s \rightarrow M_m(X) \rightarrow \varprojlim_s M_m(X, X_{-s}) \rightarrow \varprojlim_s J_m^s \rightarrow \\ \rightarrow \varprojlim_s^1 M_m(X) \rightarrow \varprojlim_s^1 M_m(X, X_{-s}) \rightarrow \varprojlim_s^1 J_m^s \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (23)$$

которая в силу равенства $\varprojlim_s^1 M_m(X) = 0$ и (19) вырождается в точную последовательность

$$0 \rightarrow \varprojlim_s M_m(X_{-s})/J_{m+1}^s \rightarrow M_m(X) \rightarrow \varprojlim_s M_m(X, X_{-s}) \rightarrow 0 \quad (24)$$

и изоморфизм

$$\varprojlim_s^1 M_m(X, X_{-s}) \cong \varprojlim_s^1 J_m^s. \quad (25)$$

В силу (21) и (25) формула (24) совпадает с искомой формулой (16).

Так как $I_m^s = M_m(X_{-s})/J_{m+1}^s$, то в силу (20) справедливо $\varprojlim_s^1 I_m^s = 0$. Применяя к короткой точной последовательности

$$0 \rightarrow I_m^s \rightarrow M_m(X) \rightarrow M_m(X)/I_m^s \rightarrow 0$$

функтор $\varprojlim_s$, получим формулу (15), которая в силу (24) совпадает с (16).

Без дополнительных предположений имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & \varprojlim_s I^{s,m-s} & \longrightarrow & M_m(X) & \longrightarrow & \varprojlim_s M_m(X)/I^{s,m-s} & \longrightarrow \varprojlim_s^1 I^{s,m-s} \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & \varprojlim_s^1 C^{s,m+1-s} & \longrightarrow & M_m(X, X^\infty) & \longrightarrow & \varprojlim_s C^{s,m-s} & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & \varprojlim_s^1 A^{s,m-s} & \longrightarrow & M_{m-1}(X^\infty) & \longrightarrow & \varprojlim_s A^{s,m-1-s} & \longrightarrow 0 \quad \vdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \varprojlim_s^1 I^{s,m-s} & & \vdots & & 0 \longrightarrow \varprojlim_s I^{s,m-1-s} & \longrightarrow M_{m-1}(X) \longrightarrow \dots \\
 & \downarrow & & & & \downarrow & \downarrow \\
 & 0 & & & & 0 \longrightarrow \varprojlim_s^1 C^{s,m-s} & \longrightarrow M_{m-1}(X, X^\infty) \longrightarrow \dots \\
 & & & & & \downarrow & \downarrow \\
 & & & & & \vdots & \vdots
 \end{array}
 \tag{26}$$

строки и столбцы которой являются точными.

Замечание 1. Теоремы 2 и 3 показывают неравноправность обобщённых ко-гомологий и гомологий (последние вырождаются, и ситуация с ними проще). Теоремы 4 и 5, напротив, показывают, что ситуация с когомологиями проще, чем с гомологиями. Например, структурная теорема для гомологической спектральной последовательности «всей плоскости», вообще говоря, неверна, что показывает несимметричность двойственных объектов гомологий и когомологий. Препятствием к этому является гомологическая нетривиальность гомотопического обратного предела $X^\infty = \varprojlim_s X_{-s}$ фильтрации $\{X_s\}$ (см. [32, теорема 2.2]).

3. Спектральная последовательность расслоения Серра

Для CW -пространства X когомологическая и гомологическая спектральные последовательности Атьи—Хирцебруха являются частными случаями когомологической и гомологической спектральных последовательностей расслоения Серра, которые определяются следующим образом. Пусть $p: X \rightarrow B$ — расслоение

Серра пространства X в CW -пространство B со слоем F . Пусть $\{B_s\}$ — фильтрация B остовами, и мы профильтруем X подпространствами $X_s = p^{-1}(B_s)$. Полагая

$$A^{s,t} = M^{s+t}(X, X_{s-1}), \quad C^{s,t} = M^{s+t}(X_s), \quad E^{s,t} = M^{s,t}(X_s, X_{s-1}),$$

получим инъективную и проективную точные пары, которые порождают *когомологическую спектральную последовательность Серра*. Если расслоение p гомотопически просто, то

$$E_2^{s,t} = H^s(B, M^t(F)),$$

если же расслоение p не является гомотопически простым, то

$$E_2^{s,t} = H^s(B, \{M^t(p^{-1}(x))\}),$$

где $\{M^t(p^{-1}(x))\}$ — локальная система коэффициентов (скрученные коэффициенты) (см. [17]). Аналогично определяется *гомологическая спектральная последовательность Серра*, которая порождается инъективной и проективной точными парами с

$$A_{s,t} = M_{s+t}(X_{-s}), \quad C_{s,t} = M_{s+t}(X, X_{-s-1}), \quad E_{s,t} = M_{s+t}(X_{-s}, X_{-s-1}).$$

Тогда

$$E_{s,t}^2 = H_s(X, M_t(F))$$

в случае гомотопически простого расслоения p , и

$$E_{s,t}^2 = H_s(X, \{M_t(p^{-1}(x))\}) -$$

скрученные гомологии (с локально постоянными коэффициентами) в случае, когда расслоение p не является гомотопически простым. Мы рассматриваем абсолютные когомологические и гомологические теории $M^m(-)$ и $M_m(-)$.

Теорема 6. Когомологическая спектральная последовательность Серра, порождённая инъективной точной парой, является спектральной последовательностью «правой полуплоскости» и условно сходится к $A^{-\infty} = M^{s+t}(X)$. Для неё верна структурная теорема 2 из [15]. Когомологическая спектральная последовательность Серра, порождённая проективной точной парой, условно сходится к C^∞ , для неё верна структурная теорема 3 из [15], и имеет место точная последовательность

$$0 \rightarrow \varprojlim_s^1 M^{m-1}(X_s) \rightarrow M^m(X) \rightarrow \varprojlim_s M^m(X_s) \rightarrow 0. \quad (27)$$

Теорема 7 ([32]). Гомологические спектральные последовательности Серра, порождённые инъективной и проективной точными парами, являются спектральными последовательностями «левой полуплоскости» и сильно сходится к $M_{s+t}(X)$.

Доказательства теорем 6 и 7 аналогичны доказательствам теорем 2 и 3. Здесь также наблюдается несимметричность между когомологиями и гомологиями.

4. Спектральная последовательность Адамса

Пусть Y является CW -пространством или CW -спектром, а $M^m(-)$ и $M_m(-)$ — приведённые когомологическая и гомологическая теории, определяемые спектром M . Пусть

$$Y = Y^0 \leftarrow Y^1 \leftarrow Y^2 \leftarrow \dots \leftarrow Y^s \leftarrow \dots$$

резольвента Адамса и Y^∞ — гомотопический обратный предел этой резольвенты. Заменяя Y бесконечным телескопом, превращаем эту резольвенту, сохраняя те же обозначения, в обычную фильтрацию Адамса

$$0 \subseteq Y^\infty \subseteq \dots \subseteq Y^{s+1} \subseteq Y^s \subseteq \dots \subseteq Y^0 = Y \quad (28)$$

(см. [22, с. 535, 536] [32]). Заметим, что при этом $Y^s/Y^{s+1} = M \wedge Y^s$.

Для любого CW -спектра X определим инъективную и проективную точные пары, полагая

$$A^{s,t} = \{X, Y^s\}_{s+t}, \quad C^{s,t} = \{X, Y/Y^{s-1}\}_{s+t}, \quad E^{s,t} = \{X, Y^s/Y^{s-1}\}_{s+t}.$$

Получим *спектральную последовательность Адамса*.

Искомой группой здесь является $\{X, Y/Y^\infty\}$, и хотелось бы, чтобы спектральная последовательность Адамса сходилась к ней. Однако так как фильтрация Адамса не является хаусдорфовой, то спектральная последовательность Адамса, порождённая инъективной точной парой $(A^{s,t}, E^{s,t})$, вообще говоря, не является условно сходящейся к $A^{-\infty}$. Правда,

$$\varprojlim_s \{X, Y^s/Y^\infty\}_m = 0, \quad \varprojlim_s^1 \{X, Y^s/Y^\infty\}_m = 0$$

для любого m , так что она условно сходится к $\{X, Y/Y^\infty\}_{s+t}$ (см. [32]).

Теорема 8. Для проективной точной пары (C^s, E^s) спектральная последовательность Адамса условно сходится к $C^\infty = \{X, Y/Y^\infty\}_m$ и имеет место короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow \varprojlim_s^1 C^{s,m+1-s} \rightarrow \{X, Y/Y^\infty\}_m \rightarrow \varprojlim_s C^{s,m-s} \rightarrow 0,$$

которая вкладывается в следующую коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами:

$$\begin{array}{ccccccc}
& \vdots & & \vdots & & 0 & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \longrightarrow & \varprojlim_s I^{s,m-s} & \longrightarrow & \{X, Y\}_m & \longrightarrow & \varprojlim_s \{X, Y\}_m / I^{s,m-s} & \longrightarrow \varprojlim_s I^{s,m-s} \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \longrightarrow & \varprojlim_s^1 C^{s,m+1-s} & \longrightarrow & \{X, Y/Y^\infty\}_m & \longrightarrow & \varprojlim_s C^{s,m-s} & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \longrightarrow & \varprojlim_s^1 A^{s,m-s} & \longrightarrow & \{X, Y^\infty\}_{m-1} & \longrightarrow & \varprojlim_s A^{s,m-1-s} & \longrightarrow 0 \quad \vdots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& \varprojlim_s^1 I^{s,m-s} & & \vdots & & 0 \longrightarrow \varprojlim_s I^{s,m-1-s} & \longrightarrow \{X, Y\}_{m-1} \longrightarrow \dots \\
& \downarrow & & & & \downarrow & \downarrow \\
& 0 & & & & 0 \longrightarrow \varprojlim_s^1 C^{s,m-s} & \longrightarrow \{X, Y/Y^\infty\}_{m-1} \longrightarrow \dots \\
& & & & & \downarrow & \downarrow \\
& & & & & \vdots & \vdots
\end{array} \tag{29}$$

Здесь устанавливается связь объекта, к которому действительно привязана (условно сходится) спектральная последовательность Адамса, и искомого объекта стабильных гомотопических классов с пограничным объектом, связывающим их, — объектом стабильных гомотопических классов гомотопического обратного предела фильтрации Адамса. Это полная аналогия подобных связей, осуществляемых (ко)гомологиями на бесконечности между (ко)гомологиями первого и второго рода [23], роли (ко)гомологий связи и контактных (ко)гомологий, в частности (ко)гомологий окружения в [24], связи между сильными и обычными гипер(ко)гомологиями [25], а также сильными пограничными (ко)гомологиями, связывающими сильные внутренние и сильные внешние (ко)гомологии топологического пространства [14, 37].

5. Спектральная последовательность Бокштейна в категории компактных абелевых групп и непрерывных гомоморфизмов

В [15] мы показали, что для любого простого числа p фильтрация

$$\dots \subseteq p^{s+1}\mathbb{Z}_p \subseteq p^s\mathbb{Z}_p \subseteq \dots \subseteq \mathbb{Q}_p$$

компактными подгруппами $p^s\mathbb{Z}_p$ аддитивной группы p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$, изоморфными группе целых p -адических чисел $\mathbb{Z}_p$, и дополнительная к ней кофильтрация группы $\mathbb{Q}_p$ группами Прюфера $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \varinjlim_s \mathbb{Z}_{p^s}$, где $\mathbb{Z}_{p^s} = \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$ — фактор-группа группы целых действительных чисел $\mathbb{Z}$ по подгруппе $p^s\mathbb{Z}$, являются хаусдорфовыми, полными, исчерпывающими и кополными, спектральные последовательности Бокштейна, порождённые инъективной и проективной точными парами, условно сходятся к когомологиям Александера—Спеньера $H^m(X; \mathbb{Q}_p)$ пространства X , и имеют место структурные теоремы 2 и 3 из [15].

Если рассматривать фильтрацию

$$\dots \subseteq p^{s+1}\mathbb{Z} \subseteq p^s\mathbb{Z} \subseteq \dots$$

группы p -ичных дробей $\mathbb{R}_p$, то она не является полной. Препятствием к полноте оказывается группа

$$\varprojlim_s (p^{s+1}\mathbb{Z} \subseteq p^s\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}_p/\mathbb{R}_p \cong \mathbb{Z}_p/\mathbb{Z} \cong \text{Ext}(\mathbb{R}_p, \mathbb{Z}) \neq 0.$$

Пополнение групп $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}_p$ в p -адической метрике ликвидирует это препятствие.

Интересна *дуализация спектральной последовательности Бокштейна*. Рассматривая фильтрацию группы $\mathbb{Q}_p$, приводящую к условно сходящейся спектральной последовательности Бокштейна, мы не учитывали компактную топологию на $\mathbb{Z}_p$, также как и локально компактную топологию на $\mathbb{Q}_p$, а рассматривали их как объекты категории абелевых групп, или непрерывных групп с дискретной топологией. Если рассмотреть эту фильтрацию в категории компактных хаусдорфовых групп и непрерывных гомоморфизмов, то искомой (и правильной) группой коэффициентов должна быть компактная группа $\tilde{\mathbb{Q}}_p = \varprojlim_s p^s\mathbb{Z}_p$,

где последнее выражение является компактным прямым пределом Чогошвили (см. [30, 35]) прямой системы компактных групп. Здесь этот предел совпадает с *боровской компактификацией* локально компактной группы $\mathbb{Q}_p$.

(Для локально компактной группы G боровская компактификация строится так. Рассматривается её группа непрерывных характеров Γ , которая в силу двойственности Понтрягина является также локально компактной группой. Пусть Γ_d — та же группа Γ , но уже с дискретной топологией. Тогда группа непрерывных характеров $K = (\Gamma_d)^*$ этой дискретной группы называется боровской компактификацией группы G . Непрерывный взаимно-однозначный гомоморфизм $\beta: G \rightarrow K$ группы G на плотную подгруппу группы $K \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{G}$ определяется формулой скалярных произведений двойственных групп $(g, \gamma) = (\gamma, \beta(g))$, где $g \in G$ и $\gamma \in \Gamma$. См. [18, глава 6, упражнения, цикл 13, № 6].)

Так как группа характеров Понтрягина $(\mathbb{Q}_p)^*$ совпадает с $\mathbb{Q}_p$, что следует из точности последовательности

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Z}_{p^\infty} \rightarrow 0$$

локально компактных групп и того, что $(\mathbb{Z}_p)^* = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ и $(\mathbb{Z}_{p^\infty})^* = \mathbb{Z}_p$, то в этом частном случае устанавливается, что компактный прямой предел Чогошвили

$c\varinjlim_s \mathbb{Z}_{p^s}$ совпадает с боровской компактификацией $\tilde{\mathbb{Z}}_{p^\infty}$ группы Прюфера $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, а также с группой характеров Понтрягина $((\mathbb{Z}_p)_d)^*$ группы $(\mathbb{Z}_p)_d$ целых p -адических чисел $\mathbb{Z}_p$ с дискретной топологией. Далее становится ясно, что фильтрация $\{p^s \mathbb{Z}_p\}$ и дополнительная к ней кофильтрация $\{\tilde{\mathbb{Q}}_p \rightarrow p^s \tilde{\mathbb{Z}}_{p^\infty}\}$ компактной хаусдорфовой группы $\tilde{\mathbb{Q}}_p$ является хаусдорфовой, полной, кополной и исчерпывающей. Поэтому, например, для компактного полиэдра X компактная спектральная последовательность Бокштейна «всей плоскости», порождённая этими фильтрацией и кофильтрацией, сильно сходится к $H^m(X; \tilde{\mathbb{Q}}_p)$, при этом

$$E_\infty'^s = (H^m(X; \mathbb{Z}) / \text{Tors } H^m(X; \mathbb{Z})) \otimes \mathbb{Z}_p.$$

Интересно отметить, что фильтрация $\{p^s \mathbb{Z}_p\}$ p -адического соленоида

$$\Sigma_p = \varprojlim_s (T \xrightarrow{\varphi_s} T),$$

где $T = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, $\varphi_s(z) = z^p$, как и кофильтрация $\{\Sigma_p \xrightarrow{\pi_s} T\}$, не являются кополными. Препятствием к этому служит компактная ненулевая группа

$$c\varinjlim_s^1 (T \xrightarrow{\varphi_s} T) \cong \text{Ker}(\tilde{\mathbb{Q}}_p \rightarrow \Sigma_p) \cong \text{Ker}(\tilde{\mathbb{Z}}_{p^\infty} \rightarrow T),$$

равная группе характеров дискретной группы $\text{Ext}(\mathbb{R}_p, \mathbb{Z})$.

6. Рефлексивность линейных векторных пространств гомологий и когомологий дифференцируемых многообразий

Хорошо известно, что гомологии и когомологии компактного многообразия или, более общо, компактного полиэдра с коэффициентами в поле K действительных чисел $\mathbb{R}$ или комплексных чисел $\mathbb{C}$ являются двойственными векторными пространствами, т. е. сопряжёнными друг другу и, следовательно, рефлексивными [1, глава I, § 5, с. 53, 54]. Более того, для некомпактных многообразий для любого $m \geq 0$ векторное пространство сингулярных когомологий $H^m(M; K)$ является сопряжённым к векторному пространству сингулярных гомологий $H_m^c(M; K)$, т. е. векторное пространство всех линейных функционалов $\text{Hom}(H_m^c(M; K), K) \stackrel{\text{def}}{=} (H_m^c(M; K))^*$ изоморфно $H^m(M; K)$. Обратное, вообще говоря, неверно. Для обоснования достаточно рассмотреть бесконечное дискретное объединение $M = \coprod_{i=1}^{\infty} S_i^m$ m -мерных сфер S_i^m . Тогда

$$H_m^c(M; K) = \sum_{i=1}^{\infty} K \not\cong \left(\prod_{i=1}^{\infty} K \right)^* = (H^m(M; K))^*.$$

Аналогичное утверждение имеет место для когомологий $H_c^m(M; K)$ и гомологий $H_m(M; K)$ второго рода. Для обоснования достаточно рассмотреть бесконечное

дискретное объединение $M = \prod_{i=1}^{\infty} E_i^m$ m -мерных евклидовых пространств E_i^m . Тогда

$$H_c^m(M; K) = \sum_{i=1}^{\infty} K \not\cong \left(\prod_{i=1}^{\infty} K \right)^* = (H_m(M; K))^*.$$

Причиной этой нерефлексивности является то, что мы учитываем здесь только алгебраическую структуру векторных пространств гомологий и когомологий и *не* учитываем топологической структуры этих векторных пространств. Иными словами, мы рассматриваем только алгебраически сопряжённые пространства, а не топологически сопряжённые пространства с естественными топологиями, возникающими на них, что в бесконечномерном случае делает их, вообще говоря, разными в отличие от конечномерного случая, когда *все* топологии, делающие конечномерное пространство отдельным локально выпуклым пространством, совпадают между собой (см. [21, глава II, п. 5, предложение 11, с. 59, 60]).

Топология учитывается в случае коцепного комплекса де Рама $\Omega^m(M)$ (соответственно скрученного комплекса де Рама $\Omega^m(M; \mathcal{O})$) дифференцируемого многообразия (кратко, C^∞ -многообразия) M над полем $K = \mathbb{R}$ или $K = \mathbb{C}$, который является отдельным локально выпуклым топологическим векторным пространством чётных (соответственно всех — чётных и нечётных) C^∞ -форм степени m

$$\omega^m = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} f_{i_1 \dots i_m}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_m}$$

над K , где $n = \dim M$ и $f_{i_1 \dots i_m}(x_1, \dots, x_n)$ — бесконечно дифференцируемые функции, с дифференциальным оператором

$$d^m \omega^m \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} df_{i_1 \dots i_m}(x_1, \dots, x_n) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_m}$$

с топологией компактной сходимости каждой своей производной, т. е. заданной семейством преднорм

$$p_{F,k} \omega^m(x_1, \dots, x_n) = \max |f_{i_1 \dots i_m}^{(k)}(x_1, \dots, x_n)|, \quad (30)$$

определённым всеми компактными подмножествами $F \subseteq M$ (или их конфинальным подсемейством) и всеми целыми $k = 0, 1, 2, \dots$, где максимум берётся по всем точкам $(x_1, \dots, x_n) \in F$ и всем наборам $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$ частной производной порядка k ($i_1 < \dots < i_m$)-компоненты дифференциальной формы ω^m .

Замечание 2. Под *чётной* C^∞ -формой степени m де Рам понимал (см. [20, глава II, § 4, 5])

$$\omega^m = \frac{1}{m!} \sum_{i_1, \dots, i_m} f_{i_1 \dots i_m}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_m},$$

где индексы $1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n$ произвольны, а бесконечно дифференцируемые функции $f_{i_1 \dots i_m}(x_1, \dots, x_n)$ удовлетворяют условию кососимметричности,

т. е. $f_{i_1 \dots i_m} = 0$, если не все $i_1, \dots, i_m$ различны, и $f_{i_1 \dots i_m} = \pm f_{j_1 \dots j_m}$, если $i_1, \dots, i_m$ — перестановка индексов $j_1, \dots, j_m$, причём знак $+$ или $-$ берётся в зависимости от того, чётной или нечётной является эта перестановка. При переходе от одной системы локальных координат к другой имеем

$$\omega^m = \frac{1}{m!} \sum_{i_1, \dots, i_m} \bar{f}_{i_1 \dots i_m}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) d\bar{x}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{x}_{j_m},$$

где коэффициенты формы преобразуются как компоненты m -ковектора, или ковариантного кососимметричного тензора ранга m , т. е. по формулам

$$\bar{f}_{j_1 \dots j_m} = \sum_{i_1 \dots i_m} f_{i_1 \dots i_m} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial \bar{x}_{j_1}} \dots \frac{\partial x_{i_m}}{\partial \bar{x}_{j_m}}. \quad (31)$$

Под *нечётной* C^∞ -формой степени m де Рама понимал бесконечно дифференцируемое (гладкое) поле нечётных m -ковекторов на многообразии M , определяемое в каждой точке своими компонентами $f_{i_1 \dots i_m}$ в заданной системе локальных координат $x_1, \dots, x_n$, которые кососимметричны по m индексам i_k ($1 \leq i_k \leq n$) и при переходе от одной системы координат к другой преобразуются по формулам

$$\bar{f}_{j_1 \dots j_m} = \operatorname{sgn} J \sum_{i_1 \dots i_m} f_{i_1 \dots i_m} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial \bar{x}_{j_1}} \dots \frac{\partial x_{i_m}}{\partial \bar{x}_{j_m}}, \quad (32)$$

где $\operatorname{sgn} J$ — знак якобиана

$$J = \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}$$

координат одной системы по координатам другой. В современной литературе (см., например, [1]) когомологии комплекса чётных дифференциальных форм де Рама принято называть *обычными когомологиями де Рама* $H^m(M)$, а когомологии комплекса всех дифференциальных форм де Рама называют *скрученными когомологиями де Рама* $H^m(M; \mathcal{O})$, где $\mathcal{O}$ — ориентирующий пучок многообразия M . (Под ориентирующим пучком $\mathcal{O}$ многообразия M размерности n понимается пучок $\tilde{M} = \coprod_{p \in M} H_n(M, M \setminus p; K)$ его локальных гомотопических групп с коэффициентами в K с естественной топологией и локальным гомеоморфизмом $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ (см. [9, глава VIII, п. 2, с. 306–308]).) Если многообразие ориентируемое, то, выбрав раз и навсегда определённую ориентацию, можно избежать употребления нечётных форм. Другими словами, для ориентируемого многообразия скрученные когомологии де Рама совпадают с обычными когомологиями де Рама [1, § 7, с. 95], так как многообразие ориентируемое тогда и только тогда, когда его ориентирующий пучок $\mathcal{O}$, который всегда локально постоянный (см. [2, добавление 1]), является постоянным.

Замечание 3. В силу второй аксиомы счётности в M существует счётное конфинальное семейство компактных подмножеств $\{F_s\}$. Поэтому топология, порождённая этим семейством преднорм, является метризуемой. Более того,

в силу триангулируемости многообразия M в качестве F_s можно выбрать компактные полиэдры, а $\{F_s\}$ превратить в возрастающую фильтрацию, исчерпывающую M , т. е. $F_s \subseteq F_{s+1}$ и $\bigcup_s F_s = M$.

Топологическое векторное пространство $\Omega^m(M; \mathcal{O})$ (как и его замкнутое подпространство $\Omega^m(M)$) является монтелевским пространством (т. е. бочечным пространством, в котором каждое замкнутое ограниченное подмножество компактно) и пространством Фреше. Поэтому оно рефлексивно [4, глава IV, § 3, п. 4, с. 241], т. е. векторное пространство $(\Omega^m(M; \mathcal{O}))'$ всех непрерывных линейных функционалов из $\Omega^m(M; \mathcal{O})$ в K , наделённое сильной топологией $\beta((\Omega^m(M; \mathcal{O}))', \Omega^m(M; \mathcal{O}))$, т. е. топологией равномерной сходимости на всех ограниченных множествах в $\Omega^m(M; \mathcal{O})$, обладает свойством, что второе топологически сопряжённое к нему пространство, наделённое сильной топологией $\beta(((\Omega^m(M; \mathcal{O}))')', (\Omega^m(M; \mathcal{O}))')$, совпадает с исходным $\Omega^m(M; \mathcal{O})$ как алгебраически, так и топологически.

Аналогичные соотношения имеются для обычных коцепных комплексов де Рама $\Omega^m(M)$.

Впервые рефлексивность $\Omega^m(M; \mathcal{O})$ была доказана де Рамом в [20, глава III, § 17, с. 121—129], где указывалось, что этот результат получен Шварцем [42] методами функционального анализа. Доказательство этого факта самого де Рама довольно длинное и нетривиальное. На самом деле утверждение выводится непосредственно из классических результатов, восходящих к Шварцу: *пространство $\mathcal{E}$ всех бесконечно дифференцируемых действительных или комплексных функций на $\mathbb{R}^n$, наделённое топологией компактной сходимости каждой производной, есть монтелевское пространство Фреше. Более того, сопряжённое к $\mathcal{E}$ пространство $\mathcal{E}'$ — пространство всех распределений на $\mathbb{R}^n$ с компактными носителями, наделённое сильной топологией, — есть монтелевское пространство, сопряжённым к которому служит $\mathcal{E}$ (см. [4, с. 368]).*

Но, например, $\Omega^m(M)$ является обратным пределом пространств $\Omega^m(U)$ согласованных C^∞ -форм ω_U^m степени m на множествах U в определяющем M (счётном) атласе, т. е. если $i: U \cap V \rightarrow U$ и $j: U \cap V \rightarrow V$ — включения, то $i^* \omega_U^m = j^* \omega_V^m$ в $\Omega^m(U \cap V)$. В силу второй аксиомы счётности выберем атлас, состоящий из счётного числа элементов. Тогда $\Omega^m(M)$ является замкнутым подмножеством счётного произведения пространств $\Omega^m(U)$, каждое из которых топологически изоморфно конечному $\left(\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}\right)$ произведению бесконечно дифференцируемых функций из $\mathbb{R}^n$ в K и, следовательно, по сказанному выше, является монтелевским пространством Фреше. Более того, произвольное произведение монтелевских пространств является монтелевским (см. [4, глава IV, § 3, упражнение 25, с. 249]). Следовательно, $\prod_U \Omega^m(U)$ — монтелевское простран-

ство Фреше. Тогда таковым, очевидно, является его замкнутое подпространство $\Omega^m(M)$. Действительно, каждое пространство Фреше бочечно [21, глава IV, теорема 2], следовательно, его замкнутое подпространство не только бочечное, но монтелевское, так как любое его замкнутое ограниченное подмножество

компактно. Заметим, что метризуемость здесь важна, так как для неметризуемого монтелевского пространства замкнутое подпространство может быть нереклексивным, а значит, не монтелевским. Итак, топологическое векторное пространство $\Omega^m(M)$, будучи монтелевским пространством Фреше, является рефлексивным. Аналогичное утверждение справедливо для $\Omega^m(M; \mathcal{O})$.

Сопряжённое к $\Omega^m(M)$ пространство $(\Omega^m(M))'$ обозначим через $\Omega_m^c(M)$, а сопряжённое к $\Omega^m(M; \mathcal{O})$ пространство $(\Omega^m(M; \mathcal{O}))'$ обозначим через $\Omega_m^c(M; \mathcal{O})$ и назовём их соответственно *обыкновенными потоками и скрученными потоками с компактными носителями* или *обыкновенным цепным комплексом де Рама с компактными носителями и скрученным цепным комплексом де Рама с компактными носителями* C^∞ -многообразия M .

Де Рам представил их локально как дифференциальные формы

$$\omega_m^c = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} T_{i_1 \dots i_m}^c dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_m}$$

с коэффициентами, являющимися распределениями Шварца с компактными носителями, или, по другой терминологии, обобщёнными функциями с компактными носителями $T_{i_1 \dots i_m}^c$, т. е. элементами линейного векторного пространства, сопряжённого к пространству всех непрерывных сечений $\Gamma(M; \mathcal{N}_M^\infty)$ из M в пучок $\mathcal{N}_M^\infty \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_M^n \otimes \mathcal{O}$ C^∞ -плотностей на M (см. [12, глава 2, п. 2.9, с. 187]), а в случае обычного коцепного комплекса де Рама $\Omega^m(M)$ — всех бесконечно дифференцируемых функций из M в K с топологией компактной сходимости каждой производной, наделённого сильной топологией. Здесь Ω_M^n — пучок коцепей де Рама на многообразии M (см. [12]).

Де Рам различал *чётные* и *нечётные* потоки. Поток T однородный, m -мерный и нечётного (чётного) рода, если $T[\omega]$ может быть нетривиальной только в том случае, когда ω — чётная (соответственно нечётная) форма степени m . Число $n - m$, где n — размерность многообразия M , называется степенью потока (см. [20, глава III, § 8]). Тогда обыкновенный цепной комплекс де Рама — это комплекс однородных нечётных потоков.

Дифференциал d_m цепного комплекса $\Omega_m^c(M)$ ($\Omega_m^c(M; \mathcal{O})$) является сопряжённым к дифференциалу d^m коцепного комплекса $\Omega^m(M)$ (соответственно $\Omega^m(M; \mathcal{O})$), и оба непрерывны в своих топологиях.

Назовём $H_m^c(M)$ и $H_m^c(M; \mathcal{O})$ соответственно *обычными гомологиями де Рама с компактными носителями* и *скрученными гомологиями де Рама с компактными носителями* C^∞ -многообразия M .

Де Рам показал также [20, глава IV, § 21, теорема 16, с. 145], что

$$H^m(\Omega^*(M; \mathcal{O})) \cong H^m(M; \mathcal{O}(K))$$

и

$$H_m(\Omega_*^c(M; \mathcal{O})) \cong H_m^c(M; \mathcal{O}(K)),$$

где последние — симплициальные когомологии и гомологии с локально постоянными коэффициентами $\mathcal{O}(K)$, которые, как известно, изоморфны сингулярным.

(Мы обозначаем через $\mathcal{O}(K)$ всё тот же ориентирующий пучок $\mathcal{O}$ многообразия M , чтобы различать в тексте, о чём идёт речь: о скрученных классических (ко)гомологиях или о скрученных (ко)гомологиях де Рама.) Ясно, что $\Omega_c^m(M; \mathcal{O})$ само рефлексивно.

Обозначим теперь через $\Omega_c^m(M; \mathcal{O})$ векторное пространство всех дифференциальных форм с компактными носителями, но не с топологией подпространства в $\Omega^m(M; \mathcal{O})$, а с *более сильной*, неметризуемой топологией индуктивного (прямого) предела

$$\Omega_c^m(M; \mathcal{O}) = \varinjlim_s \Omega_{F_s}^m(M; \mathcal{O}),$$

где F_s — такие компактные подмножества в M , что $F_s \subseteq F_{s+1}$ и $\bigcup_s F_s = M$, а $\Omega_{F_s}^m(M; \mathcal{O})$ — множество тех форм, носители которых содержатся в F_s . Топология индуктивного предела — это сильнейшая локально выпуклая топология, индуцирующая на $\Omega_{F_s}^m(M; \mathcal{O})$ топологию равномерной сходимости каждой производной. Пространство $\Omega_c^m(M; \mathcal{O})$ является строгим индуктивным пределом монтелевских пространств Фреше $\Omega_{F_s}^m(M; \mathcal{O})$ и поэтому само является монтелевским [4, глава IV, § 3, упражнение 25, с. 249], следовательно, рефлексивным. Обозначим через $\Omega_m(M; \mathcal{O})$ векторное пространство всех непрерывных линейных форм $\Omega_c^m(M; \mathcal{O}) \rightarrow K$, наделённое сильной топологией $\beta(\Omega_m(M; \mathcal{O}), \Omega_c^m(M; \mathcal{O}))$. Оно также будет монтелевским [4, глава IV, § 3, п. 4, предложение 7, с. 241]. Тем самым пространства $\Omega_c^m(M; \mathcal{O})$ и $\Omega_m(M; \mathcal{O})$ двойственны друг другу в исходных (сильных) топологиях. Аналогичное утверждение справедливо для $\Omega_c^m(M)$ и $\Omega_m(M)$.

Назовём $\Omega_m(M)$ и $\Omega_m(M; \mathcal{O})$ соответственно *обыкновенными потоками* и *скрученными потоками* размерности m (степени $n - m$) или *обыкновенным цепным комплексом де Рама* и *скрученным комплексом де Рама* C^∞ -многообразия M . Де Рам представил их локально в виде дифференциальных форм

$$\omega_m = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} T_{i_1 \dots i_m} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_m}$$

с коэффициентами, являющимися распределениями Шварца, или, по другой терминологии, обобщёнными функциями $T_{i_1 \dots i_m}$, т. е. элементами линейного векторного пространства, сопряжённого к пространству всех непрерывных сечений с компактными носителями $\Gamma_c(M; \mathcal{N}_M^\infty)$ из M в пучок $\mathcal{N}_M^\infty = \Omega_M^n \otimes \mathcal{O}$ C^∞ -плотностей на M (см. [12, глава 2, п. 2.9, с. 187]), а в случае обычного коцепного комплекса де Рама $\Omega_c^m(M)$ — всех бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями из M в K с топологией индуктивного предела, наделённого сильной топологией.

Дифференциал d_m цепного комплекса $\Omega_m(M; \mathcal{O})$ является сопряжённым к дифференциалу d^m коцепного комплекса $\Omega_c^m(M; \mathcal{O})$, и они непрерывны в своих топологиях.

Назовём $H_m(M)$ и $H_m(M; \mathcal{O})$ соответственно *обычными гомологиями де Рама* и *скрученными гомологиями де Рама* C^∞ -многообразия M .

Де Рам показал, что

$$(\Omega_m(M; \mathcal{O}))' \cong \Omega_c^m(M; \mathcal{O}),$$

а также что

$$H_m(\Omega_*(M; \mathcal{O})) \cong H_m(M; \mathcal{O}(K))$$

и

$$H^m(\Omega_c^*(M; \mathcal{O})) \cong H_c^m(M; \mathcal{O}(K)),$$

где $H_m(M; \mathcal{O}(K))$ и $H_c^m(M; \mathcal{O}(K))$ — гомологии и когомологии второго рода с локально постоянными коэффициентами $\mathcal{O}(K)$ соответственно, которые, как известно (см. [17, 23]), совпадают с гомологиями и когомологиями Масси с локально постоянными коэффициентами. (В случае постоянных коэффициентов K сохраним здесь эти обозначения $H_m(X; K)$ и $H_c^m(X; K)$ гомологий и когомологий Масси для любых локально компактных хаусдорфовых пространств X .)

Замечание 4. Для нужд интегрирования в геометрической теории меры (см. [28, глава 4, § 4.1, с. 366]) рассматривается не сильная, а слабая топология на пространствах потоков. С другой стороны, топологические векторные пространства потоков настолько информативны, что среди них выделяют так называемые плоские целочисленные потоки, а также интегральные потоки $I_m(M)$, на которых задаётся плоская норма Уитни (см. [27, введение, п. 24, с. 45]), превращающая $I_m(M)$ в дифференциальную метризуемую группу. Если M является компактным липшицевым окрестностным ретрактом (см. [28, глава 4, § 4.1, с. 410]), то обычная гомотопическая группа $\pi_q(Z_m(M), 0)$ циклов $Z_m(M)$ интегральных потоков совпадает с приведённой группой гомологий $\tilde{H}_{q+m}(M; \mathbb{Z})$ с целочисленными коэффициентами (теорема Альмгрена [31], которая при $m = 0$ совпадает с теоремой Дольда—Тома [33]). Заметим также, что для дифференциальных форм де Рама теория плоских коцепей с целочисленными коэффициентами, в отличие от целочисленных плоских цепей (потоков), не вполне осознана (см. [28, глава IV, § 4.4, с. 502]), что является ещё одним примером несимметричности (неполной двойственности) гомологий и когомологий де Рама.

Хотя де Рам доказал теоремы двойственности для (ко)цепей де Рама на многообразии M [20, глава IV, § 22, 23, с. 146—159], а именно ортогональность циклов и кограниц, а также коциклов и границ, т. е.

$$\begin{aligned} Z_m(M; \mathcal{O}) \perp B_c^m(M; \mathcal{O}), \quad Z_c^m(M; \mathcal{O}) \perp B^m(M; \mathcal{O}), \\ Z^m(M; \mathcal{O}) \perp B_m^c(M; \mathcal{O}), \quad Z_c^m(M; \mathcal{O}) \perp B_m(M; \mathcal{O}), \end{aligned}$$

оставался открытым вопрос о *топологической двойственности* соответствующих пространств когомологий и гомологий, обычно вытекающий из этих теорем, например, в теории характеров Понтрягина или в теории рефлексивных банаховых пространств (см. [19]). Проблема заключается в том, что для монтелевских пространств, какими в данном случае являются пространства коцепей и цепей де Рама, рефлексивность *не наследуется* ни подпространствами, ни фактор-про-

пространствами. Существует пример монтелевского пространства Фреше, у которого подпространство является монтелевским, а фактор-пространство по этому подпространству не рефлексивно (соответственно в сопряжённом монтелевском пространстве есть нерефлексивное подпространство) (см. [4, глава IV, § 5, п. 4, упражнение 21 б), с. 277, 278]). Тем не менее в случае многообразий на векторных пространствах гомологий $H_m(M; \mathcal{O})$, $H_m^c(M; \mathcal{O})$ и когомологий $H^m(M; \mathcal{O})$, $H_c^m(M; \mathcal{O})$, как и на $H_m(M)$, $H_m^c(M)$, $H^m(M)$, $H_c^m(M)$, существуют такие топологии, которые делают их сильно сопряжёнными. Более того, эти топологии индуцируются соответствующими топологиями (ко)цепных комплексов, за исключением одного случая $H_m^c(M; \mathcal{O})$ и $H_m^c(M)$, что оставляет этот вопрос пока открытым.

Теорема 9. Когомологии $H^m(M)$ ($H_c^m(M)$), $m \geq 0$, двойственны гомологиям $H_m^c(M)$ (соответственно $H_m(M)$) с индуцированными в них ослабленными топологиями на соответствующих обычных коцепных и цепных комплексах де Рама, и наоборот. Иначе говоря, обыкновенные (ко)гомологии де Рама слабо рефлексивны.

Теорема 9'. Когомологии $H^m(M; \mathcal{O})$ ($H_c^m(M; \mathcal{O})$), $m \geq 0$, двойственны гомологиям $H_m^c(M; \mathcal{O})$ (соответственно $H_m(M; \mathcal{O})$) с индуцированными в них ослабленными топологиями на соответствующих скрученных коцепных и цепных комплексах де Рама, и наоборот. Иначе говоря, скрученные (ко)гомологии де Рама слабо рефлексивны.

Доказательство теоремы 9. Мы проведём доказательство для пары $(H^m(M), H_m^c(M))$. В силу теорем двойственности де Рама подпространство коциклов $Z^m(M)$ и подпространство границ с компактными носителями $B_m^c(M)$ являются полярами друг друга (в данном случае они ортогональны). Аналогично подпространство кограниц $B^m(M)$ и подпространство циклов с компактными носителями $Z_m^c(M)$ являются полярами друг друга. Более того, так как $Z^m(M)$ и $Z_m^c(M)$ всегда замкнуты в силу непрерывности дифференциальных операторов (в сильных и в слабых топологиях), а поляры всегда замкнутые подпространства, то замкнутыми (в слабых топологиях, а в силу их выпуклости в любых топологиях, согласующихся с двойственностью) являются $B_m^c(M)$ и $B^m(M)$. Известно, что в этом случае $(Z^m(M), \Omega_m^c(M)/B_m^c(M))$ и $(B^m(M), \Omega_m^c(M)/Z_m^c(M))$ являются двойственными парами в слабых топологиях (слабо сопряжены друг другу) [4, глава IV, § 1, п. 5, предложения 6, 7, с. 201, 202]. Из точной последовательности

$$0 \rightarrow H_m^c(M) \rightarrow \Omega_m^c(M)/B_m^c(M) \rightarrow \Omega_m^c(M)/Z_m^c(M) \rightarrow 0$$

следует, что полярой (аннулятором) для подпространства $H_m^c(M)$ служит $B^m(M)$. Те же рассуждения показывают, что в слабой топологии $(H_m^c(M), Z^m(M)/B^m(M))$ — двойственная пара сопряжённых пространств, т. е. $(H^m(M), H_m^c(M))$ — слабо сопряжённая пара. Доказательство слабой сопряжённости пары $(H_c^m(M), H_m(M))$ совершенно аналогично.

Доказательство теоремы 9' аналогично изложенному.

Теорема 10. На пространствах когомологий $H_c^m(M)$ (гомологий $H_m(M)$) и гомологий $H_m^c(M)$ (когомологий $H^m(M)$) де Рама существуют топологии, делающие их сильно рефлексивными, т. е. сильно сопряжёнными друг другу соответственно. Более того, на $H_c^m(M)$, $H^m(M)$ и $H_m(M)$ эти топологии индуцируются соответствующими топологиями (ко)цепных комплексов.

Теорема 10'. На пространствах когомологий $H_c^m(M; \mathcal{O})$ (гомологий $H_m(M; \mathcal{O})$) и гомологий $H_m^c(M; \mathcal{O})$ (когомологий $H^m(M; \mathcal{O})$) де Рама существуют топологии, делающие их сильно рефлексивными, т. е. сильно сопряжёнными друг другу соответственно. Более того, на $H_c^m(M; \mathcal{O})$, $H^m(M; \mathcal{O})$ и $H_m(M; \mathcal{O})$ эти топологии индуцируются соответствующими топологиями (ко)цепных комплексов.

Доказательство теоремы 10. Докажем существование на $H_c^m(M)$ такой топологии, что $((H_c^m(M))')' \cong H_c^m(M)$. Учитывая замечание 3, рассмотрим на M счётную возрастающую фильтрацию

$$F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_s \subset F_{s+1} \subset \dots$$

из компактных полиэдров F_s , исчерпывающую M . Тогда $\Omega_c^m(M) = \varinjlim_s \Omega_{F_s}^m$ является строгим индуктивным пределом монтелевских пространств Фреше $\Omega_{F_s}^m(M)$, наделённым топологией индуктивного предела. Эта топология в силу рефлексивности $\Omega_c^m(M)$ является топологией Макки τ , т. е. наибольшей топологией, согласующейся с двойственностью, которая, очевидно, совпадает с β . Известно, что в этом случае

$$\Omega_m(M) = (\Omega_c^m(M))' = \varprojlim_s (\Omega_{F_s}^m)'$$

(см. [21, предложение 15, с. 128]), причём проективный (обратный) предел наделён двойственной проективной топологией, которая делает эти пространства сильно сопряжёнными друг другу.

Рассмотрим спектральную последовательность, порождённую точной парой (A^{-s}, E^{-s}) с

$$A^{-s} = H^m(\Omega_{F_s}^*(M)), \quad E^{-s} = H^m(\Omega_{F_s}^*(M), \Omega_{F_{s-1}}^*(M)),$$

которая является спектральной последовательностью «левой полуплоскости» и сильно сходится к

$$A^{-\infty} = H^m(\Omega_c^*(M)) = H_c^m(M) = \varinjlim_s H^m(\Omega_{F_s}^*(M)).$$

Для кофильтрации $\Omega_*(M) \rightarrow (\Omega_{F_s}^*(M))'$ рассмотрим двойственную спектральную последовательность, порождённую точной парой (C^s, E^s) с

$$C^s = H_m((\Omega_{F_s}^*(M))'), \quad E^s = H_m(\text{Ker}((\Omega_{F_s}^*(M))' \rightarrow (\Omega_{F_{s-1}}^*(M))')),$$

которая условно сходится к C^∞ . Более того, так как $\varprojlim_r^1 E_r^s = 0$ в силу того, что в нашем случае рассматриваются модули над инъективным кольцом K , спектральная последовательность сильно сходится к $C^\infty = \varprojlim_s C^s = H_m(M)$.

В силу теоремы 9 когомологии $H^m(\Omega_{F_s}^*)$ и гомологии $H_m((\Omega_{F_s}^*)')$ двойственны между собой в ослабленных топологиях. Покажем, что векторное пространство $H^m(\Omega_{F_s}^*)$ конечномерно. Действительно, вложим гладко полиэдр F_s в сферу S^k достаточно высокой размерности k и введём обозначение $U = S^k \setminus F_s$. В силу теоремы двойственности Александера—Понтрягина сингулярные когомологии $H^m(U; K)$ изоморфны $H_{k-m-1}(F_s; K)$ и, следовательно, конечномерны. Тогда из длинной точной последовательности для сингулярных когомологий получаем конечномерность когомологий $H^m(S^k, U; K)$, которые в силу теоремы де Рама совпадают с когомологиями $H^m(\Omega^*(F_s))$. Тем самым на $H^m(\Omega^*(F_s))$ и на $H_m((\Omega^*(F_s))')$ все топологии, делающие их локально выпуклыми линейными векторными пространствами, совпадают между собой. Они и задают искомые отделимые топологии на $H_c^m(M) = \varinjlim_s H^m(\Omega^*(F_s))$ и на $H_m(M) = \varprojlim_s H_m((\Omega^*(F_s))')$ как топологию *индуктивного предела* и топологию *проективного предела* соответственно. Так как в силу конечномерности $H^m(\Omega^*(F_s))$ это строгий индуктивный предел рефлексивных пространств, его предел будет также рефлексивным пространством [4, глава IV, § 3, упражнение 17 б), с. 246]. Более того, топология на $H_c^m(M)$ будет сильнейшей и, следовательно, будет совпадать с топологией Макки, сохраняющейся при индуктивных пределах (см. [21, глава V, дополнение 4, с. 146, 147]), т. е. $\tau = \beta$. Сильно сопряжённым к $H_c^m(M)$ будет пространство $H_m(M) = \varprojlim_s H_m((\Omega^*(F_s))')$, наделённое слабой топологией σ (так как прямая и обратная системы сопряжены по построению), которая в этом случае будет совпадать с τ и β (ср. [21, глава V, дополнение 4, с. 147] и следствие 1 ниже).

Для доказательства аналогичного утверждения для $H^*(M)$ и $H_*^c(M)$ рассмотрим спектральную последовательность, порождённую точной парой (C^s, E^s) с

$$C^s = H^m(\Omega^*(M)|_{F_s}), \quad E^s = H^m(\text{Ker}(\Omega^*(M)|_{F_s} \rightarrow \Omega^*(M)|_{F_{s-1}})),$$

которая, как легко видеть, является спектральной последовательностью «правой полуплоскости» и условно сходится к C^∞ . Более того, так как K — инъективный модуль, то $\varprojlim_r^1 E_r^s = 0$. Поэтому спектральная последовательность полностью сходится к

$$H^m(\Omega^*(M)) = H^m(M) = \varinjlim_s H^m(\Omega^*(M)|_{F_s}).$$

Для фильтрации $\Omega_*^{F_s}(M)$ потоками с компактными носителями, лежащими в F_s , для которой

$$\varinjlim_s \Omega_*^{F_s}(M) = \Omega_*^c(M),$$

рассмотрим спектральную последовательность, порождённую точной парой (A^{-s}, E^{-s}) с

$$A^{-s} = H_m(\Omega_*^{F_s}(M)), \quad E^{-s} = H_m(\Omega_*^{F_s}(M)/\Omega_*^{F_{s-1}}(M)),$$

которая является спектральной последовательностью «левой полуплоскости» и сильно сходится к $A^{-\infty} = \varinjlim_s H_m(\Omega_*^{F_s}(M)) = H_m^c(M)$. В силу того, что F^s — компактные полиэдры, векторные пространства $H^m(\Omega^*(M)|_{F_s}) \cong H^m(F^s; K)$ являются конечномерными и двойственными к $H_m(\Omega_*(F_s)) \cong H_m(F_s; K)$, все топологии на них совпадают, и они задают, как и выше, топологии на векторных пространствах $H^m(M)$ и $H_m^c(M)$, являющихся пределами обратной и прямой сопряжённых систем, в виде слабой топологии *проективного предела* и в виде топологии Макки *индуктивного предела* соответственно, которые двойственны между собой и определяют рефлексивные пространства.

Сильная топология β на $C_m(M)$ совпадает с топологией Макки τ , так как это рефлексивное пространство. Но последняя сохраняется при факторизации, т. е. на $\Omega_m(M)/B_m(M)$ имеем топологию Макки τ . Но в $\Omega_m(M)/B_m(M)$ имеется подпространство $H_m(M)$ минимального типа (см. ниже), и поэтому оно обладает топологическим дополнением, которое в нашем случае изоморфно $B_{m-1}(M)$. Следовательно, пространство $(\Omega_m(M)/B_m(M))/B_{m-1}(M)$, изоморфное $H_m(M)$, наследует топологию Макки τ , которая в этом случае совпадает со слабой топологией σ .

Доказательство для $\Omega^m(M)$ и $H^m(M)$ аналогично.

Докажем, что топология Макки τ на $\Omega_c^m(M)$ индуцирует топологию индуктивного предела на $H_c^m(M)$. Как и выше, $H_c^m(M)$ является векторным подпространством в $\Omega_c^m(M)/B_c^m(M)$, но на нём имеется уже две топологии: индуцированная топологией на $\Omega_c^m(M)$ (топология подпространства) и топология Макки индуктивного предела, которая, вообще говоря, мажорирует первую. Докажем, что они совпадают. Легко видеть, что

$$\Omega_c^m(M)/B_c^m(M) \cong \varinjlim_s \Omega_{F_s}^m(M)/B_{F_s}^m(M)$$

в топологиях Макки τ , в каждом $\Omega_{F_s}^m(M)/B_{F_s}^m(M)$ имеется конечномерное подпространство $H_{F_s}^m(M)$, которое имеет топологическое дополнение, изоморфное $B_{F_s}^{m+1}(M)$. Поэтому проекции $\Omega_{F_s}^m(M)/B_{F_s}^m(M) \rightarrow H_{F_s}^m(M)$ являются непрерывными линейными отображениями (см. [21, с. 141]), которые индуцируют при переходе к прямому пределу непрерывную проекцию $\Omega_c^m(M)/B_c^m(M) \rightarrow H_c^m(M)$ в топологиях τ . Это тем более так, если на $H_c^m(M)$ рассмотреть более слабую топологию подпространства. Но топологическое прямое слагаемое $H_c^m(M)$ наследует топологию Макки. Следовательно, в данном случае топология подпространства является топологией Макки. Теорема 10 доказана полностью.

Доказательство теоремы 10' совершенно аналогично изложенному.

Замечание 5. Доказать подобное утверждение для $H_m^c(M)$ и $\Omega_m^c(M)$ не представляется возможным, поскольку априори исходная сильная топология на $\Omega_m^c(M)$ слабее топологии индуктивного предела $\varinjlim_s \Omega_m^{F_s}(M) = \Omega_m^c(M)$. Поэто-

му из того, что $\Omega_m^{F_s}(M)/B_m^{F_s}(M) \rightarrow H_m^c(M)$ в случае аналогичного построения является непрерывной проекцией в топологиях индуктивного предела, не сле-

дует, вообще говоря, что она будет непрерывной в исходной сильной топологии пространства и индуцированной топологии подпространства.

Рассмотренные нами обычные цепи де Рама $\Omega^*(M)$ задают на C^∞ -многообразии M пучок Ω_* , который определяется следующим образом. На категории открытых множеств U в M и морфизмов, являющихся включениями $V \subseteq U$, рассмотрим ковариантный функтор Ω_c^* обычного коцепного комплекса де Рама с компактными носителями (см. [1, глава I, § 2, с. 33]), который в силу теоремы 10 определяет контравариантный функтор Ω_* обычных цепей де Рама, являющийся предпучком. Индуцированный им пучок обозначим также через Ω_* . Нетрудно видеть, что это s -мягкий пучок (ср. [12, глава 2, п. 2.9, с. 187, 188]), он является даже тонким пучком (см. [7, глава II, § 3, с. 182], [23, с. 181]). Тогда $\Omega_m(M)$ совпадает с глобальными непрерывными сечениями $\Gamma(M; \Omega_m)$, а $\Omega_m^c(M)$ совпадает с глобальными непрерывными сечениями $\Gamma_c(M; \Omega_m)$ с компактными носителями. Пучок Ω_* является дифференциальным и его производные пучки $\mathcal{H}_m(\Omega_*)$ являются пучками локальных гомотопий, слои которых совпадают с $H_m(p) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_U H_m(\Omega_*(U))$, где U — все окрестности точки $p \in M$. Зная гомотопии второго рода евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, которые равны нулю всегда, кроме $H_n(\mathbb{R}^n) = K$, получим единственный отличный от нуля производный пучок $\mathcal{H}_n(\Omega_*)$, равный ориентирующему пучку $\mathcal{O}$ C^∞ -многообразия M . Следовательно, s -мягкий дифференциальный пучок

$$0 \leftarrow \Omega_0 \leftarrow \Omega_1 \leftarrow \dots \leftarrow \Omega_n \leftarrow 0$$

определяет s -мягкую резольвенту

$$0 \leftarrow \Omega_0 \leftarrow \Omega_1 \leftarrow \dots \leftarrow \Omega_n \leftarrow \mathcal{O} \leftarrow 0$$

ориентирующего пучка $\mathcal{O}$, а глобальные непрерывные сечения дают отождествления

$$\begin{aligned} \Omega_m(M) &= \Gamma(M; \Omega_m) = \Omega^{n-m}(M; \mathcal{O}), \\ \Omega_m^c(M) &= \Gamma_c(M; \Omega_m) = \Omega_c^{n-m}(M; \mathcal{O}), \end{aligned}$$

как и

$$\begin{aligned} H_m(M) &= H^{n-m}(M; \mathcal{O}), \\ H_m^c(M) &= H_c^{n-m}(M; \mathcal{O}). \end{aligned}$$

Эту конструкцию можно обобщить, рассмотрев гомотопии де Рама с коэффициентами в локально постоянных пучках $\mathcal{A}$ K -модулей с конечно порождёнными слоями. Действительно, умножая тензорно дифференциальный пучок Ω_* на $\mathcal{A}$, получим дифференциальный s -мягкий пучок $\Omega_* \otimes \mathcal{A}$, глобальные непрерывные сечения которого по определению задают цепной комплекс де Рама с коэффициентами в $\mathcal{A}$, т. е. $\Omega_m(M; \mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma(M; \Omega_m \otimes \mathcal{A})$, и цепной комплекс де Рама с компактными носителями с коэффициентами в $\mathcal{A}$, т. е. $\Omega_m^c(M; \mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_c(M; \Omega_m \otimes \mathcal{A})$. Это определение полностью согласуется с нашими предыдущими построениями.

Действительно, рассмотрим открытое множество $U \subseteq M$, на котором пучок $\mathcal{A}$ постоянен и имеет конечномерные слои, например, размерности l . Тогда очевидно, что

$$\begin{aligned}\Omega_m(U) \otimes \mathcal{A}|_U &= \Omega_m(U) \otimes K^l = \text{Hom}(\Omega_c^m(U), K) \otimes K^l \cong \sum_{i=1}^l \text{Hom}(\Omega_c^m(U), K) \cong \\ &\cong \text{Hom}\left(\sum_{i=1}^l \Omega_c^m(U), K\right) \cong \text{Hom}(\Omega_c^m(U) \otimes K^l, K) = (\Omega_c^m(U) \otimes \mathcal{A}|_U)'.\end{aligned}$$

(Под функтором Hom здесь понимается функтор всех непрерывных функционалов, хотя рассмотренные тождества в силу конечномерности K^l верны и для любых линейных функционалов.) Отсюда выводим, что $\Omega_m \otimes \mathcal{A} \cong (\Omega_c^m \otimes \mathcal{A})'$, в частности $\Omega_m(U; \mathcal{O}) \cong \Omega_m(U) \otimes \mathcal{O}$. Комплексы $\Omega_m(M; \mathcal{A})$ и $\Omega_c^m(M; \mathcal{A})$ в силу точности функтора тензорного умножения на пучок $\mathcal{A}$ без кручения отождествляются, как выше, с коцепными комплексами $\Omega^m(M; \mathcal{H}_n(\mathcal{A}))$ и $\Omega_c^m(M; \mathcal{H}_n(\mathcal{A}))$ соответственно, где $\mathcal{H}_n(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{O}$.

Замечание 6. В [26] на градуированном пространстве $\Omega_*(M; \mathcal{E})$ гладких тензорных полей поливекторов (контравариантных кососимметричных тензоров) на многообразии M с локально постоянными вещественными значениями определён оператор div (ср. с определением дивергенции или внутренней производной дифференцируемого m -векторного поля в [28, глава 4, § 4.1, с. 376]), превращающий его в дифференциальный комплекс, который отождествляется с комплексом дифференциальных форм $\Omega^{n-*}(M; \mathcal{E} \otimes \mathcal{O})$, а также в дифференциальный подкомплекс $\Omega_*^c(M; \mathcal{E})$, который отождествляется с комплексом дифференциальных форм с компактными носителями $\Omega_c^{n-*}(M; \mathcal{E} \otimes \mathcal{O})$. Так как последние отождествляются с классическими цепными комплексами $C_*(M; \mathcal{E})$ и $C_*^c(M; \mathcal{E})$ второго и первого рода соответственно, то тем самым в [26] дано ещё одно доказательство теоремы де Рама.

Следствие 1. *Определённый нами цепной комплекс де Рама $\Omega_m(M; \mathcal{A})$ совпадает с цепным комплексом $\Omega_m(M; \mathcal{A})$ гладких тензорных полей m -поливекторов, определённым в [26].*

Интересно отметить, что построение цепного комплекса, двойственного коцепному комплексу де Рама, проведено в [26] чисто алгебраически, и топологии на этих пространствах не рассматривались.

Следствие 2 (двойственность Пуанкаре). *На всяком многообразии M размерности n имеют место невырожденные спаривания*

$$H^m(M) \otimes_K H_c^{n-m}(M; \mathcal{O}) \rightarrow K \quad (33)$$

и

$$H_c^m(M) \otimes_K H^{n-m}(M; \mathcal{O}) \rightarrow K. \quad (34)$$

Действительно, по теореме 10 имеется невырожденное спаривание

$$H_{n-m}(M; \mathcal{O}) \otimes_K H_c^{n-m}(M; \mathcal{O}) \rightarrow K, \quad (35)$$

но по предыдущему

$$\Omega_{n-m}(M; \mathcal{O}) = \Omega^{n-n+m}(M; \mathcal{O} \otimes \mathcal{O}) = \Omega^m(M; K) = \Omega^m(M),$$

так как $\mathcal{O} \otimes \mathcal{O} = K$ (см. [26, с. 240]).

Следствие 2 является обобщением аналогичного результата [1, теорема 7.8, с. 97], который получен для любых многообразий, но с конечномерными (ко)гомологиями.

Замечание 7. Рассмотренная выше ситуация топологически сопряжённых (ко)гомологических локально выпуклых векторных пространств весьма типична. Упомянем здесь несколько похожих примеров. Пусть M — аналитическое многообразие, или, короче, C^ω -многообразие, а $C_\omega^m(M; \mathcal{N}_\omega)$ — аналитические формы на нём со значениями в ориентирующем пучке $\mathcal{N}_\omega = C_{\omega M}^n \otimes \mathcal{O}$ с так называемой топологией DFS-пространства (см. [12, глава 2, § 2.9.6, с. 187, 188]). Рассмотрим топологическое векторное пространство форм $C_m(X; \mathcal{B})$, коэффициентами которых являются гиперфункции Сато $\mathcal{B}$ (см. [41]), которые складываются в вялые пучки C_* (см. [12]). Получим, например, сильную двойственность топологических векторных пространств $\Gamma_c(M; C_m)$ и $C_\omega^m(M; \mathcal{N}_\omega)$. Подробности и детали остальных случаев опускаем. Известно также [21, глава II, дополнение 4, с. 65, 66], что пространство всех голоморфных функций $\mathcal{H}(D)$ в области $D \subset \mathbb{C}$, наделённое топологией компактной сходимости, есть монтелевское пространство Фреше. Топологически двойственным к нему является пространство локально голоморфных функций на дополнении $\mathbb{C} \setminus D$. Построения, описанные выше, распространяются очевидным образом на комплексные многообразия размерности n , которое представляет собой $\mathbb{C}$ -окольцованное пространство $(X, \mathcal{H}_X)$, локально изоморфное $(\mathbb{C}, \mathcal{H}_\mathbb{C})$, где $\mathcal{H}_\mathbb{C}$ обозначает пучок голоморфных функций на $\mathbb{C}$, и могут быть применены для комплексов Дальбо (см. [12, глава 2, § 2.9, с. 188–190]).

Замечание 8. Известно [8], что коцепной комплекс де Рама $\Omega^*(M)$ компактного C^∞ -многообразия M обладает тем преимуществом перед всеми другими коцепными комплексами, определяющими те же когомологии, что умножение коцепей в нём косокоммутативно, т. е. $\omega^m \wedge \tau^q = (-1)^{mq} \tau^q \wedge \omega^m$. Это свойство позволяет определить $\mathbb{R}$ -гомотопический тип многообразия M . В [36] была поставлена *проблема существования кокоммутативных цепей* на C^∞ -многообразии M , т. е. такой дифференциальной градуированной коалгебры $C_*(M; K)$ ($C_m(M; K) = 0$, $m < 0$) над полем $K = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{R}$ или $K = \mathbb{C}$ с двумя градуированными гомоморфизмами

$$\Delta: C_* \rightarrow C_* \otimes C_*, \quad \varepsilon: C_* \rightarrow K,$$

$\varepsilon(C_m) = 0$, если $m \neq 0$, такими что

$$(\text{id} \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes \text{id})\Delta, \quad (\text{id} \otimes \varepsilon)\Delta = (\varepsilon \otimes \text{id})\Delta, \quad d \otimes \text{id} + \overline{\text{id}} \otimes d = \Delta,$$

где

$$\overline{\text{id}}(c_m) = (-1)^m c_m, \quad \Delta = \chi \Delta, \quad \chi(c_m \otimes c_q) = (-1)^{mq} c_q \otimes c_m.$$

Ясно, что для $K = \mathbb{R}$ в силу теоремы 10' $\Omega_*(M)$ несёт всю информацию о K -гомотопическом типе C^∞ -многообразия M . Это обстоятельство, собственно, и привлекло внимание автора к изучению потоков де Рама на многообразиях. Однако вопрос о кокоммутативном умножении в алгебраическом смысле остаётся открытым и решается только для топологизированных тензорных произведений (точнее, для их пополнений) топологических векторных пространств. Обычно на тензорном произведении различают две топологии: проективную и более слабую топологию равностепенно непрерывной сходимости, они в большинстве случаев неполные, и приходится пополнять эти пространства. К счастью, $\Omega^*(M)$ и $\Omega_*(M)$ являются ядерными пространствами, для которых топологическое тензорное произведение с каждым локально выпуклым топологическим векторным пространством E имеет одно и то же пополнение в указанных двух топологиях (см. [21, глава VII, дополнение 2, с. 203, 204]). Это подчёркивает исключительность топологий на (ко)цепных комплексах де Рама. В [36] изложена целая программа изучения K -гомотопического типа, вообще говоря, некомпактного многообразия M , включающая в себя изучение собственного K -гомотопического типа и K -гомотопического типа на бесконечности, но это выходит за рамки данной статьи.

В заключение покажем, что существуют топологии в сингулярных (ко)цепных комплексах и (ко)цепных комплексах Масси, которые, во-первых, делают эти пространства рефлексивными, во-вторых, индуцируют сильные рефлексивные топологии на (ко)гомологиях.

Замечание 9. Известно, что любое векторное пространство E можно сделать отделимым локально выпуклым пространством, если в качестве базиса окрестностей начала взять множество всех абсолютно выпуклых поглощающих множеств. Обозначим здесь эту сильнейшую топологию через ω . Сопряжённым к векторному пространству E с этой топологией ω является обычное алгебраически сопряжённое пространство E^* . Сильная топология $\beta(E^*, E)$ совпадает с топологией Макки $\tau(E^*, E)$ и со слабой топологией $\sigma(E^*, E)$, топология Макки $\tau(E, E^*)$ на E совпадает с сильной топологией $\beta(E, E^*)$ и сильнейшей топологией ω . Более того, оба пространства являются монтелиевскими, следовательно рефлексивными, значит, сильно сопряжёнными друг другу. Каждое подпространство в E замкнуто и обладает топологическим дополнением (см. [4, с. 89, 209]).

Замечание 10. Минимальной топологией α на E называют такую топологию, что на E не существует никакой отделимой локально выпуклой топологии, более слабой, чем α . Известно, что если E' — пространство, сопряжённое к пространству E (наделённому топологией α), то $\alpha = \sigma(E, E')$ и $E = E'^*$. Не всякое пространство E обладает минимальной топологией (в отличие от максимальной топологии), т. е. является пространством минимального типа. Для того чтобы E было пространством минимального типа, необходимо и достаточно, чтобы оно было изоморфно топологическому произведению $K^I = \prod_I K$. Всякое замкнутое векторное подпространство пространства минимального типа есть пространство

минимального типа. Более того, каждое подпространство E минимального типа в отделимом локально выпуклом пространстве F обладает топологическим дополнением и, в частности, замкнуто (см. [4, с. 209, 210]).

Из замечаний 9 и 10 немедленно вытекают следующие теоремы, дающие описание довольно простого строения пространств (ко)гомологий локально компактного полиэдра.

Теорема 11. *Цепной комплекс Масси $C_m(X; K)$ локально компактного хаусдорфова пространства X и сингулярный коцепной комплекс произвольного топологического пространства X $C^m(X; K)$ являются пространствами минимального типа.*

Доказательство. Так как коцепи Масси $C_c^m(X; K)$ являются свободным комплексом [17, часть I, глава 4, § 4.4, с. 92], то

$$C_c^m(X; K) \cong \sum_I K.$$

Тогда

$$C_m(X; K) = \text{Hom}(C_c^m(X; K), K) \cong \prod_I K.$$

Аналогично, так как сингулярный цепной комплекс $C_m^c(X; K)$ по определению свободный,

$$C_m^c(X; K) \cong \sum_I K,$$

следовательно,

$$C^m(X; K) = \text{Hom}(C_m^c(X; K), K) \cong \prod_I K.$$

Теорема 12. *Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство, в частности многообразие. Тогда коцепной комплекс Масси $C_c^m(M; K)$, наделённый сильнейшей топологией ω , и цепной комплекс Масси $C_m(X; K)$, наделённый минимальной топологией α , сильно двойственны друг другу и индуцируют сильнейшую топологию ω на $H_c^m(X; K)$ и минимальную топологию α на $H_m(X; K)$, делающие их сильно сопряжёнными друг другу. В этом случае $\tau = \beta = \omega$ и $\alpha = \sigma = \tau = \beta$.*

Теорема 13. *Пусть X — произвольное топологическое пространство. Тогда сингулярный цепной комплекс $C_m^c(X; K)$, наделённый сильнейшей топологией ω , и сингулярный коцепной комплекс $C^m(X; K)$, наделённый минимальной топологией α , сильно двойственны друг другу и индуцируют сильнейшую топологию ω на $H_m^c(X; K)$ и минимальную топологию α на $H^m(X; K)$, делающие их сильно сопряжёнными друг другу. В этом случае $\tau = \beta = \omega$ и $\alpha = \sigma = \tau = \beta$.*

Доказательство. Известно [21, с. 113], что сильнейшая локально выпуклая топология делает пространство монтелевским, следовательно рефлексивным, и его сопряжённое является также монтелевским с топологией $\beta = \tau = \sigma$. В силу

замечания 9 и теоремы 11 $Z_m(X; K)$ и $B_m(X; K)$ обладают топологическими дополнениями. Следовательно, пространство

$$C_m(X; K) \cong B_m(X; K) \oplus H_m(X; K) \oplus B_{m-1}(X; K)$$

двойственно к

$$B_c^{m+1}(X; K) \oplus H_c^m(X; K) \oplus B_c^m(X; K) \cong C_c^m(X; K),$$

и наоборот. При этом индуцированные топологии на гомологиях и когомологиях будут минимальные и сильнейшие соответственно.

Для сингулярных (ко)гомологий доказательство идентично.

Следствие 3. Для любого локально компактного хаусдорфова пространства X когомологии Масси $H_m^c(X; K)$ изоморфны $\sum_I K$, а гомологии Масси $H_m(X; K)$ изоморфны $\prod_I K$.

Заметим, что если множество индексов I пусто, то мы считаем, что $\sum_I K = \prod_I K = 0$.

Доказательство. По теореме 12 топология на гомологиях Масси минимальная, следовательно, по замечанию 9 $H_m(X; K) \cong \prod_I K$. По теореме 12 и предложению 26 из [21, глава V, § 6, с. 139], утверждающему, что сопряжённое пространство к топологическому произведению есть топологическая сумма сопряжённых пространств, получим $H_c^m(X; K) \cong \sum_I K$.

Следствие 4. Для любого топологического пространства X сингулярные гомологии $H_m^c(X; K)$ изоморфны $\sum_I K$, а сингулярные когомологии $H^m(X; K)$ изоморфны $\prod_I K$.

Доказательство следствия 4 аналогично доказательству следствия 3.

Замечание 11. Так как сингулярные (ко)гомологии произвольного топологического пространства X изоморфны обычным (ко)гомологиям геометрической реализации $|S(X)|$ сингулярного симплициального функтора S из категории симплициальных множеств в категорию CW -пространств [5, приложение 2, § 1, с. 265], а (ко)гомологии второго рода произвольного локально компактного хаусдорфова пространства X изоморфны (ко)гомологиям Стиррода одноточечной компактификации ωX пространства X , то в следствиях 3 и 4 мы фактически изучили структуру клеточных и (чеховских) стирродовских (ко)гомологий в двойственных категориях CW -пространств и компактных хаусдорфовых пространств соответственно. Такая двойственность подкатегорий категории топологических пространств не очевидна, если не обратить внимание на то, что сингулярные цепи на CW -пространствах и коцепи Масси на компактных пространствах свободны. Для прямого предела $\varinjlim_\lambda X_\lambda = X$, где X — CW -пространство, а X_λ — его компактные CW -подпространства, и для любого обратного

предела $\varprojlim_{\lambda} X_{\lambda} = X$, где X — компактное хаусдорфово пространство, а X_{λ} — компактные полиэдры, известны (см., например, [25]) двойственные короткие точные последовательности

$$0 \rightarrow \varprojlim_{\lambda}^1 H^{m-1}(X_{\lambda}; G) \rightarrow H^m(X; G) \rightarrow \varprojlim_{\lambda} H^m(X_{\lambda}; G) \rightarrow 0 \quad (36)$$

и

$$0 \rightarrow \varprojlim_{\lambda}^1 H_{m+1}(X_{\lambda}; G) \rightarrow H_m(X; G) \rightarrow \varprojlim_{\lambda} H_m(X_{\lambda}; G) \rightarrow 0, \quad (37)$$

которые являются сильным вырождением спектральных последовательностей для когерентных когомологий и когерентных гомологий (см. [15, § 12, с. 145]), причём в структурной теореме 4 из [15] двойная бесконечная фильтрация вырождается до двух компонент $I^1 \subseteq I^0$. Если же группа коэффициентов G есть $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то эта фильтрация вырождается до одной компоненты I^0 и спектральная последовательность сводится к изоморфизмам $H^m(X; K) \cong \varprojlim_{\lambda} H^m(X_{\lambda}; K)$ и $H_m(X; K) \cong \varprojlim_{\lambda} H_m(X_{\lambda}; K)$.

Этим замечанием мы заканчиваем наше изложение теории спектральных последовательностей в произвольных абелевых категориях.

Литература

- [1] Ботт Р., Ту Л. В. Дифференциальные формы в алгебраической топологии. — М.: Наука, 1989.
- [2] Бредон Г. Теория пучков. — М.: Наука, 1988.
- [3] Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. — М.: Мир, 1972.
- [4] Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. — М.: Изд. иностр. лит., 1959.
- [5] Габриель П., Цисман М. Категории частных и теория гомотопий. — М.: Мир, 1971.
- [6] Гельфанд С. И., Манин Ю. И. Методы гомологической алгебры. Т. I. Введение в теорию когомологий и производные функторы. — М.: Наука, 1988.
- [7] Гудман Р. Алгебраическая топология и теория пучков. — М.: Изд. иностр. лит., 1961.
- [8] Грифиц Ф. А., Морган Д. В. Рациональная теория гомотопий и дифференциальные формы. — М.: Наука, 1990.
- [9] Дольд А. Лекции по алгебраической топологии. — М.: Мир, 1976.
- [10] Дринфельд В. Г. О квазитреугольных квазихопфовых алгебрах и группе, связанной с $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ // Алгебра и анализ. — 1990. — Т. 2, № 4. — С. 149—181.
- [11] Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. — М.: Изд. иностр. лит., 1960.
- [12] Касивара М., Шапира П. Пучки на многообразиях. — М.: Мир, 1997.
- [13] Кассель К. Квантовые группы. — М.: Фазис, 1999.
- [14] Лисица Ю. Т. О (ко)гомологически локально связных пространствах // Успехи мат. наук. — 2004. — Т. 58, вып. 6. — С. 153—154.

- [15] Лисица Ю. Т. Теория спектральных последовательностей. I // Тр. МИРАН им. В. А. Стеклова. — 2004. — Т. 247. — С. 129—150.
- [16] Маклейн С. Категории для работающего математика. — М.: Физматлит, 2004.
- [17] Масси У. Теория гомологий и когомологий. — М.: Мир, 1981.
- [18] Моррис С. Двойственность Понтрягина и строение локально компактных абелевых групп. — М.: Мир, 1980.
- [19] Райков Д. А. Некоторые линейно-топологические свойства пространств $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ // Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1967. — С. 298—250.
- [20] Де Рам Ж. Дифференцируемые многообразия. — М.: Изд. иностр. лит., 1956.
- [21] Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1967.
- [22] Свитцер Р. М. Алгебраическая топология — гомотопии и гомологии. — М.: Наука, 1985.
- [23] Скляренко Е. Г. Гомологии и когомологии общих пространств // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. математики. Т. 50. — М.: ВИНТИ, 1989. — С. 129—266.
- [24] Скляренко Е. Г. Гомологии и когомологии связи между множествами. Гомологии и когомологии окружения замкнутого множества // Успехи мат. наук. — 1992. — Т. 56. — С. 1040—1071.
- [25] Скляренко Е. Г. Гипер(ко)гомологии для точных слева ковариантных функторов и теория гомологий топологических пространств // Успехи мат. наук. — 1995. — Т. 50. — С. 109—146.
- [26] Скляренко Е. Г. Гомологии, дуальные когомологиям де Рама // Тр. МИРАН им. В. А. Стеклова. — 2004. — Т. 247. — С. 237—246.
- [27] Уитни Х. Геометрическая теория интегрирования. — М.: Изд. иностр. лит., 1960.
- [28] Федерер Г. Геометрическая теория меры. — М.: Наука, 1987.
- [29] Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. — М.: Мир, 1981.
- [30] Чогошвили Г. С. О законах двойственности для произвольных множеств // Мат. сб. — 1951. — Т. 28. — С. 89—118.
- [31] Almgren F. J. The homotopy groups of integral cycle groups // Topology. — 1962. — Vol. 1. — P. 257—299.
- [32] Boardman J. M. Conditionally convergent spectral sequences. — Preprint. — Baltimore: John Hopkins Univ., 1981.
- [33] Dold A., Thom R. Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte // Ann. Math. — 1958. — Vol. 67. — P. 230—281.
- [34] Eilenberg S., Moore J. C. Limits and spectral sequences // Topology. — 1962. — Vol. 1. — P. 1—23.
- [35] Lisica Ju. T. On the compact $\varinjlim$ -functor in the category of compact groups // Glas. Mat. — 1997. — Vol. 32. — P. 301—314.
- [36] Lisica Ju. T. On cocommutative chains problem // Int. Conf. on Topology and its Appl., Abstracts, Skopje, 2004. — P. 19—22.
- [37] Lisica Ju. T. Strong bonding homology and cohomology // Topology Appl. — 2005. — Vol. 153. — P. 394—447.

- [38] Milnor J. On axiomatic homology theory // *Pacific J. Math.* — 1962. — V. 12. — P. 337—341.
- [39] Polishchuk A. *Abelian Varieties, Theta Functions and the Fourier Transform.* — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003. — (Cambridge Tracts Math.; Vol. 153).
- [40] Quillen D. Rational homotopy theory // *Ann. Math.* — 1969. — Vol. 90. — P. 205—295.
- [41] Sato M. Theory of hyperfunctions. I, II // *Fac. Sci. Univ. Tokyo.* — 1959—1960. — Vol. 8. — P. 139—193; 387—436.
- [42] Schwartz L. *Théorie des distribution. I.* — Paris: Hermann, 1950.
- [43] Sullivan D. Infinitesimal computation in topology // *Publ. IHES.* — 1978. — Vol. 47. — P. 269—331.
- [44] *Essays on Mirror Manifolds* / Yau S.-T., ed. — Hong Kong: International Press, 1992.

