Чистая математика и физическая реальность (непрерывность и вычислимость)*

Я. МЫЧИЛЬСКИЙ
Университет Колорадо, США
e-mail: jmyciel@euclid.colorado.edu

УДК 510.21+510.58

Ключевые слова: физическая интерпретация, вещественная функция, непрерывность, вычислимость.

Аннотация

Исходя из интуитивного различия между действительными и воображаемыми математическими объектами (т. е. объектами, имеющими фактически существующие или потенциальные физические интерпретации, и не имеющими их), мы предлагаем математические определения этих концепций. Наше определение класса действительных объектов основывается на некоторой универсальной непрерывной функции. Мы обсуждаем также класс вычислимых вещественных чисел, функций, функционалов, операторов и т. д. и показываем, что он слишком узок, чтобы охватить класс всех действительных объектов.

Abstract

J. Mycielski, Pure mathematics and physical reality (continuity and computability), Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 5, pp. 151—168.

Drawing upon the intuitive distinction between the real and imaginary mathematical objects (i.e., these which have an actual or potential physical interpretations and these which do not), we propose a mathematical definition of these concepts. Our definition of the class of real objects is based on a certain universal continuous function. We also discuss the class of computable reals, functions, functionals, operators, etc. and we argue that it is too narrow to encompass the class of real objects.

1. Введение

Различие между действительными и воображаемыми понятиями неотчётливо, поскольку термины «действительное» и «мнимое» используются в целом спектре различных и перекрывающихся значений. Цель данной статьи состоит в точном определении одного из этих значений, а именно физической (фактически существующей или потенциальной) интерпретации математических объектов появляющихся в приложениях математики. Например, положительное целое число n может быть интерпретировано как свойство некоторых физических

*Пленарный доклад на конференции «Геометрическая топология, дискретная геометрия и теория множеств», посвящённой столетию профессора Л. В. Келдыш (Москва, 24—28 августа 2004 г.).

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 5, с. 151—168.

объектов, тех, которые мы представляем себе как множества из n объектов. С другой стороны, вещественное число r можно интерпретировать как результат некоторого измерения или как физическую константу. Конечно, в этих интерпретациях неявно присутствует сложное взаимодействие (например, счёт или измерение) между человеком и внешней реальностью. Математические объекты с прямыми фактически существующими или потенциальными физическими интерпретациями будут называться *действительными*, а без таких интерпретаций — *мнимыми*.

Грубо говоря, математики до Кантора имели дело главным образом с действительными объектами, а после Кантора ввели много мнимых объектов (таких как подмножества вещественной прямой, множества высокого теоретико-множественного ранга и т. д.). Точнее говоря, и до Кантора были в ходу определённые мнимые объекты и различения; например, различие между двумя рациональными числами, которые достаточно близки, не имеет прямого физического значения. Удивительно, но во многих ситуациях оказывается невозможным дать полезное или понятное описание физической реальности, не прибегая к использованию мнимых объектов. Даже в приложениях математики трудно различить действительное и мнимое, так как действительные модели часто строятся из мнимых компонент. Тем не менее я выберу вид строгого различия (как можно более естественного), определив класс действительных объектов. (История даёт нам много примеров понятий, точное определение которых оказывалось важным. Например, непрерывность или вычислимость функций или понятие истины в математической логике.)

Идея нашего определения основывается на концепции непрерывной вещественной частичной функции. Возьмём разрывную вещественную функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Я утверждаю, что f не имеет прямого естественного физического смысла. Но непрерывная частичная функция

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

имеет такое значение, поскольку она может быть вычислена действительным физическим механизмом. Подобные соображения приведут нас к заключению, что никакое множество вещественных чисел не имеет прямого физического значения, но каждая непрерывная вещественная функция f, заданная на $\mathbf{G}_\delta$-множестве (счётном пересечении открытых множеств), имеет потенциальное физическое значение. Более того, как мы увидим, все функционалы, операторы и т. д., которые могут быть закодированы естественным образом вещественными числами, имеют такие значения (поскольку они также могут быть вычислены физическими механизмами). Так, тождественная функция, определённая на вещественном множестве A класса $\mathbf{G}_\delta$, действительна, а само множество A только мнимо.

Замечание 1.1. Если бы мы собирались ограничиться математикой действительных объектов, мы потеряли бы естественное понимание функций как некоторых множеств упорядоченных пар. Это заставляет меня думать, что человеческий мозг приспособлен для объяснения реальности в терминах различных множеств, которые, как правило, не являются действительными, но только мнимыми, и я буду свободно пользоваться ими в данной статье.

Замечание 1.2. Мы не обсуждаем в этой статье некоторых искусственных физических интерпретаций (отличных от принятых в математических приложениях). Однако укажем, что имеются такие универсальные интерпретации всех математических объектов: каждому объекту можно поставить в соответствие гёделев номер его определения и затем использовать (потенциальное) физическое значение этого числа.

Наш ответ на исходный вопрос даётся не в форме аксиоматической теории структуры действительных объектов, а лишь в форме математического определения этой структуры. И по очевидным причинам мы назовём её *областью непрерывности*. Эта область допускает некоторые естественные операции, так что она может рассматриваться как модель $\mathbf{M}$ в смысле теории моделей (см. раздел 3). Но я не знаю никакой интересной аксиоматизации первого порядка для $\mathbf{M}$. Грубо говоря, $\mathbf{M}$ подобна таким хорошо известным понятиям, как конкретное гильбертово пространство, скажем $L^2[0,1]$ с его функционалами и операторами. (А интересного описания первого порядка для $L^2[0,1]$, кроме универсальной интерпретации математики в теории множеств, нет.)

Заметим, что наш ответ отличается от хорошо известной идеи Э. Фредкина (принятой также С. Вольфрамом) представить физическую реальность как гигантский клеточный автомат. Его точка зрения более ограничительна, так как его модель счётная (и локально конечная), в то время как большинство моделей в математической физике и других науках используют континуумы. Я чувствую, что эти более богатые (несчётные) структуры в значительной мере подсказаны физической реальностью, и при нынешнем состоянии науки они очень естественны.

Однако нельзя ли свести дело к счётной области иным способом? Тут снова имеется универсальный положительный ответ, который следует из того факта, что теория множеств допускает счётные модели. Но в данной статье мы ищем более конкретные идеи. Одну такую идею мы рассмотрим в разделе 5 этой статьи. Вместо того чтобы вводить все вещественные числа, мы ограничим нашу область вычислимыми вещественными числами и объектами, которые кодируются ими. Мы назовём её *областью вычислимости*. Конечно, эта область является счётным множеством. (Вспомним, что все алгебраические числа и все константы анализа, например π и e, вычислимы.) Но имеются основания верить, что существуют также невычислимые вещественные числа с прямым физическим значением. Например, определим *вычислимую* функцию g, область определения которой состоит из всех ненулевых вещественных чисел, которую можно продолжить до непрерывной функции f, определённой также и в нуле, так, что

$f(0)$ является максимальным значением f, но $f(0)$ не вычислимое число. Теперь мы можем утверждать, что это число $f(0)$ имеет прямую физическую интерпретацию в терминах машины, которая вычисляет g. (Вероятно, математическая логика может предложить даже более убедительные примеры?) Все же читатель, склонный к минимализму (менее радикальному, чем у Фредкина), может предпочесть область вычислимости. Ради него мы представим в разделе 5 обсуждение области вычислимости и укажем некоторые из её удивительных свойств и связанные с ними нерешённые проблемы.

[Имея в виду различение действительных и мнимых математических объектов, нужно, может быть, объяснить нашу онтологическую позицию в отношении последних. На самом деле я уже пытался объяснить её в [7, 8], так что позвольте мне ограничиться здесь кратким итогом: я рассматриваю все объекты математики как мысли, т. е. некоторые физические феномены в мозгах людей. Таким образом, я не приписываю им никакой содержательной роли, пока мы не придадим им физических значений. Пока мы думаем о них независимо от приложения, они не представляют собой ничего независимого от человечества. (Тем самым отвергается *платонизм*.) С другой стороны, структура человеческого мозга такова, что чистая математика не является произвольной игрой символов. Например, теория множеств индуцирована естественными способами мышления, которые представлены в мозгах людей. Мы можем вывести это из того, что аксиомы теории множеств почти очевидны для всех математиков, читающих их. (Тем самым *формализм* также отвергается.)

Отметим, что наша философия отличается и от философии Л. Кронекера, который принимал реальность целых, но не вещественных чисел, однако она согласуется с философией Р. Тома, утверждающей, что континуум вещественных чисел имеет фундаментальную и несводимую природу.]

Я признателен Дж. Малицу за долгие беседы на тему вычислимых вещественных функций, которые оказали влияние на раздел 5, а также А. В. Чернавскому и А. Шинцелю за некоторые улучшения.

2. Предварительные сведения о кодировании, физической значимости и вычислимости

Наши термины «действительные объекты» и «мнимые объекты» не нужно путать с обычными действительными и мнимыми числами, которые мы также будем использовать. В математике функции почти всегда понимаются как множества упорядоченных пар, и обозначение $f\colon X \to Y$ означает, что $f \subseteq X \times Y$ и что для каждого $x \in X$ имеется единственный элемент $y \in Y$, такой что $(x, y) \in f$ (этот элемент y обозначается $f(x)$). Но в данной статье некоторые функции f будут примитивными действительными понятиями, в то время как их области определения $D_f = X$ и изменения $R_f = f[X] = \{f(x)\colon x \in X\}$ являются мнимыми объектами (определёнными в терминах f). Однако *элементы* множеств D_f и R_f всегда будут в этой статье действительными объектами.

Тем не менее мы будем пользоваться мнимыми множествами для определения действительных объектов. Может быть, с помощью аксиоматической теории категорий было бы возможно этого избежать, но я чувствую, что такой подход был бы излишне громоздким.

В этой работе $\mathbb{N}$ обозначает множество целых положительных чисел, $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел и $\mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел. Пусть $q_1, q_2, \ldots$ — фиксированное рекурсивное перечисление $\mathbb{Q}$ и $Q_1, Q_2, \ldots$ — фиксированное рекурсивное перечисление всех четвёрок вида (p, m, q, n), где $p, q \in \mathbb{Q}$ и $m, n \in \mathbb{N}$. Каждое иррациональное вещественное число y из открытого интервала $(0, 1)$ имеет единственное разложение в цепную дробь

$$y = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \ldots}}}, \tag{2.1}$$

где $n_i \in \mathbb{N}$, и тем самым y кодирует последовательность $n_1, n_2, \ldots$. Значит, y можно интерпретировать как код некоторой последовательности четвёрок, а именно $Q_{n_1}, Q_{n_2}, \ldots$. Если Q входит в эту последовательность, мы скажем, что Q *лежит в* y.

Вещественное число $t \in \mathbb{R}$ называется *вычислимым* тогда и только тогда, когда существует рекурсивная функция $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, для которой

$$|t - \varphi(n)| < \frac{1}{n}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Легко проверить, что t вычислимо тогда и только тогда, когда рекурсивно десятичное разложение числа t.

Через $\mathbb{T}$ будет обозначаться множество всех вычислимых вещественных чисел. Как хорошо известно, $\mathbb{T}$ является вещественным замкнутым полем и содержит все константы математического анализа.

Отметим, что все рациональные числа вычислимы и что иррациональное число y из интервала $(0, 1)$ вычислимо тогда и только тогда, когда рекурсивна последовательность $n_1, n_2, \ldots$, определённая в (2.1).

Функция $f\colon D \to \mathbb{R}$, где $D \subseteq \mathbb{R}$, называется *вещественной функцией*.

3. Основные определения

С теоретико-модельной точки зрения главной структурой, рассматриваемой в этой статье, является модель

$$\mathbf{M} = \langle \mathbb{R}, U, r \rangle_{r \in \mathbb{R}},$$

где бинарная частичная функция U определена следующим образом. Равенство

$$U(x,y)=z$$

имеет место тогда и только тогда, когда тройка $x,y,z\in\mathbb{R}$ обладает такими двумя свойствами:

1) y есть иррациональное число в интервале $(0,1)$ и для каждого n имеется четвёрка (p,m,q,n) в y, такая что
$$|x-p|<\frac{1}{m}; \tag{3.1}$$
2) для каждой четвёрки (p,m,q,n) в y, если x удовлетворяет (3.1), то
$$|z-q|<\frac{1}{n}.$$

Из этого определения ясно, что U непрерывна (и даже вычислима, см. раздел 5). Действительно, чтобы вычислить $U(x,y)$ в точке (x,y) в области определения U с точностью $\frac{1}{n}$, достаточно вычислить x и y с точностью, достаточной, чтобы найти (p,m,q,n) в y с условием (3.1). Тогда q есть желаемая аппроксимация $U(x,y)$.

U имеет следующее свойство универсальности, которое легко доказать: *если $f\colon D\to\mathbb{R}$ — непрерывная вещественная функция, то найдётся такой элемент y_0, что*
$$f(x)=U(x,y_0)$$
для всех $x\in D$.

Как мы покажем в следующем разделе, справедлива более сильная версия этого предложения. Именно, если D есть $\mathbf{G}_\delta$, то y_0 можно взять таким, что область определения $U(\cdot,y_0)$ есть в точности D. Мы покажем также, что область определения D_U для U есть подмножество $\mathbb{R}^2$ класса $\mathbf{G}_\delta$.

Ввиду универсальности U возможно интерпретировать каждую действительную функцию, каждый функционал, оператор и т. д., непрерывные в подходящем смысле, как вещественное число (или же, *наоборот*, некоторые вещественные числа как такие функции). Действительно, пусть $\mathcal{T}$ (будем называть его множеством *типов*) будет наименьшим таким множеством, что $1\in\mathcal{T}$ и если $\alpha,\beta\in\mathcal{T}$, то упорядоченная пара (α,β) принадлежит $\mathcal{T}$. Мы полагаем 1 типом вещественных чисел и (α,β) типом функции из объектов типа α в объекты типа β. Именно, мы определяем рекурсивно
$$x^1=x$$
для всех $x\in\mathbb{R}$ и
$$y^{(\alpha,\beta)}(x^\alpha)=(U(x,y))^\beta$$
для всех $x,y\in\mathbb{R}$ так, что для всех $z\in\mathbb{R}$, если $z^\alpha=x^\alpha$, то $(U(z,y))^\beta = (U(x,y))^\beta$. Конечно, для многих пар $\alpha\in\mathcal{T}$ и $x\in\mathbb{R}$ символ x^α представляет просто пустую функцию. Мы не будем здесь развивать дальше теорию таких представлений. Это увело бы нас слишком далеко.

[По замечаниям, приведённым выше, теория первого порядка модели $\mathbf{M}$ очень богата. Она содержит теорию вещественно-замкнутых полей и даже арифметику. Поэтому она, конечно, эффективно не аксиоматизируема. В этой статье эта теория не будет рассматриваться.]

Каждое $\mathbf{G}_\delta$-множество A в $\mathbb{R}$ может быть представлено тождественной функцией на A. Каждая конечная или бесконечная последовательность вещественных чисел представляется функцией из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{R}$. Значит, каждая такая последовательность имеет вид $x^{(1,1)}$. Подобным образом *каждая конечная или счётная дискретная структура может быть представлена функцией из* $\mathbb{N}$ *в* $\mathbb{R}$. По этой причине нам не нужно говорить явно об n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$, или о пространстве бесконечных последовательностей вещественных чисел, или о конечных или счётных моделях. (Функция U сама есть объект типа ((1,1),1).) Мы напомним также, что каждое польское пространство с данной счётной последовательностью, всюду плотной в нём, можно идентифицировать с $\mathbf{G}_\delta$-множеством гильбертова куба $[0,1]^\omega$ (см., например, [3]). Всё это ведёт к следующему тезису (той же природы, что и тезис Чёрча).

Онтологический тезис. Объект A чистой математики имеет фактически существующую или потенциальную физическую интерпретацию тогда и только тогда, когда A может быть представлен в виде x^α, где $x \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathcal{T}$.

Класс объектов вида x^α будет называться *областью непрерывности*. Заметим, что по предыдущим замечаниям он включает область всех счётных дискретных структур.

Теперь я разберу три возможные проблемы.

Во-первых, термин «представлен» a priori не ясен. Несколько последующих примеров должны пояснить это место. Этот тезис подобен известному тезису, восходящему к Кантору, Дедекинду и Цермело, что каждый математический объект можно представить как множество (или класс множеств). В действительности, подразумевается, что область действительных математических объектов интерпретируема в модели $\mathbf{M}$ в том же смысле, в каком область математических объектов интерпретируема в модели, состоящей из универсума множеств и отношения принадлежности.

Во-вторых, может показаться, что слишком много объектов имеют форму x^α. На самом деле природа не позволяет нам достаточно хорошо измерять её константы, она не позволяет измерять никакую действительную величину с произвольной точностью! (Только вычислимые вещественные числа могут быть, в принципе, вычислены с произвольной точностью.) Таким образом, тезис основан на утверждении, что каждое вещественное число имеет фактически существующую или потенциальную интерпретацию. Раз это принято, наш тезис следует с необходимостью, так как если природа даёт нам вещественное число x, то x^α представляет физически возможный вычисляющий механизм.

В-третьих, может показаться на первый взгляд, что нет достаточного количества объектов вида x^α. Но опыт говорит нам, что их достаточно. Чтобы убедить в этом читателя, я сделаю четыре замечания.

Замечание 3.1. Топологическое (или дифференциальное) многообразие может быть представлено в виде x^α, поскольку оно может быть представлено последовательностью проецирующих отображений (т. е. координат или карт) и системой непрерывных (дифференцируемых) функций, связывающих эти карты.

Замечание 3.2. Класс эквивалентности измеримой функции $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, определённой с точностью до множества меры 0, также может быть представлен таким способом. Прежде всего, как отмечено выше, последовательность вещественных чисел может быть интерпретирована как функция из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{R}$. Затем, используя изоморфизм гильбертовых пространств $L^2[0,1]$ и l^2, мы можем представить класс эквивалентности функции, интегрируемой с квадратом, одной суммируемой с квадратом последовательностью вещественных чисел. Значит, класс эквивалентности f можно представить последовательностью функций, полученных обрезками её области значений до интервалов $[-n,n]$, поскольку они принадлежат $L^2[0,1]$.

Представи́м и класс эквивалентности функции $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ со свойством Бэра, определённой с точностью до множества первой категории (тощего). Действительно, для каждого такого класса эквивалентности существует единственная непрерывная функция g с областью определения, лежащей в $[0,1]$, не имеющая собственных непрерывных продолжений, причём каждое продолжение g на $[0,1]$ принадлежит этому классу (см. замечание 5.5 ниже). Значит, g может служить представителем этого класса.

Замечание 3.3. Меры и распределения в смысле Соболева—Шварца могут быть интерпретированы как непрерывные функционалы над соответствующими пространствами непрерывных функций.

Замечание 3.4. Непредсказуемость, т. е. неустойчивость, физических процессов не требует объектов, выходящих за область непрерывности. Рассмотрим динамические системы, которые неустойчивы, т. е. траектории которых в фазовом пространстве крайне чувствительны к начальным условиям. Всё же траектории зависят непрерывным образом от начальных положений, когда в пространстве траекторий берётся топология почти равномерной сходимости. Примеры вычислимых динамических систем, заданных простыми формулами, но неустойчивых в каждом начальном положении, были даны И. Кэном [1]. (Такими должны быть, в частности, динамические системы, которые моделируют поток мыслей и эмоции в мозге. В самом деле, представляется естественным интерпретировать свободную волю как непредсказуемость, т. е. неустойчивость системы, см. [4, 5, 9].)

Конечно, все функции, функционалы, операторы и т. д. вида x^α, рассматриваемые как функции от вещественных чисел — кодов их аргументов, — непрерывны относительно топологии $\mathbb{R}$.

Замечание 3.2 даёт другой довод для утверждения, что область непрерывности достаточно богата. Прежде всего, *аксиома выбора* замечательно упрощает и усиливает теорию множеств, но производит при этом много мнимых объектов. Однако во всех приложениях математики достаточно более слабого принципа, *аксиомы зависимых выборов*. Более того, имеется модель $L[\mathbb{R}]$ (класс множеств, конструктивных в смысле Гёделя, с вещественными параметрами), который достаточно обширен для естественной интерпретации всей прикладной математики. И $L[\mathbb{R}]$ удовлетворяет аксиомам теории множеств с заменой аксиомы выбора на аксиому зависимых выборов, плюс дополнительная аксиома, аксиома детерминированности[1]. Тогда (см., например, [6]) из этих аксиом вытекает, что *каждая вещественная функция измерима по Лебегу*. Так как это верно в $L[\mathbb{R}]$, согласно замечанию 3.2 имеется достаточно функций вида x^α для всех приложений математики.

Замечание 3.5. Мы должны подчеркнуть, что в некотором смысле наше определение универсума действительных объектов математики не абсолютно. Чтобы объяснить это, вспомним для начала стандартное определение $\mathbb{R}$ по Евдоксу и Дедекинду. Элемент r принадлежит $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда r имеет следующие четыре свойства: $r \subseteq \mathbb{Q}$; $\varnothing \neq r \neq \mathbb{Q}$; если $p \in \mathbb{Q}$, $q \in r$ и $p < q$, то $p \in r$; в r нет максимального числа. (Другими словами, r — открытый луч влево в $\mathbb{Q}$.) Значит, для каждого множества $X \subseteq \mathbb{R}$, если X ограничено сверху, т. е. $\bigcup(X) \neq \mathbb{Q}$, то $\bigcup(X) \in \mathbb{R}$. (Иначе говоря, $\mathbb{R}$ связно.) Было бы ошибкой вывести, что это определение даёт вполне насыщенную вещественную прямую. В действительности, смысл этого определения зависит от аксиом окружающей теории множеств, так как чем сильнее теория множеств, тем для большего числа открытых влево лучей в $\mathbb{Q}$ может быть доказано существование. А по второй теореме Гёделя о неполноте этот процесс насыщения $\mathbb{R}$ незавершаем.

4. Технические замечания и теоремы

Замечание 4.1. Для того чтобы получить простые определения области непрерывности, я выбрал $\mathbb{R}$ в качестве универсума базисной модели $\mathbf{M}$. (Специалист по теории рекурсии может предпочесть пространство Бэра $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, а специалист по теории множеств может предпочесть канторово множество $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Но тогда представления вещественных функций стали бы более сложными.)

Замечание 4.2. Будет поучительно показать, как определить y, для которого $U(\cdot, y)$ становится постоянной функцией 1 над замкнутым интервалом $[0,\infty)$ или открытым интервалом $(0,\infty)$. (Теорема 2 обобщит эти построения.)

В первом случае пусть y кодирует множество всех четвёрок (p,m,q,n), где $q = 1$, $m = n$ и $p \geqslant 0$. Тогда для каждого n и $x \in [0,\infty)$ вычисление $U(x,y)$ даст 1 (так как имеются такие четвёрки $(p,n,1,n)$ в y, что $|x-p| < \frac{1}{n}$). Но если $x < 0$ и n таковы, что $x + \frac{1}{n} < 0$, поиск четвёрки $(p,n,1,n)$ в y, для которой

[1]Факт, что из стандартной системы аксиом теории множеств ZFC следует, что модель $L[\mathbb{R}]$ удовлетворяет принципу зависимых выборов, несложен (см., например, [2]). Тот же факт, что из системы аксиом ZFC и некоторых аксиом больших кардиналов следует, что $L[\mathbb{R}]$ удовлетворяет аксиоме детерминированности, является глубокой теоремой Д. А. Мартина, Дж. Стила и У. Х. Вудина (см. [10,11] и ссылки там).

$|x-p| < \frac{1}{n}$, никогда не закончится, т. е. x не лежит в области определения $U(\cdot, y)$.

Во втором случае пусть y кодирует множество всех четвёрок $(p, m, 1, n)$, где $p \geqslant \frac{1}{m}$. Тогда если $x \in (0, \infty)$, мы можем для каждого n найти такую четвёрку $(p, m, 1, n)$ в y, что $|x-p| < \frac{1}{m}$ (так как мы обладаем такими четвёрками с условием $\frac{1}{m} < x$). Но если $x \leqslant 0$, не найдётся пары (p, m), такой что $|x-p| < \frac{1}{m}$, и $p \geqslant \frac{1}{m}$ в четвёрках из y. Таким образом, поиск требуемой четвёрки никогда не закончится, значит, x не лежит в области определения $U(\cdot, y)$.

Теперь мы докажем теоремы, о которых говорилось в разделе 3.

Теорема 1. *Область определения D_U функции U является $\mathbf{G}_\delta$-подмножеством $\mathbb{R}^2$.*

Доказательство. Согласно определению U пара (x, y) принадлежит D_U тогда и только тогда, когда

$$0 < y < 1 \;\&\; y \notin \mathbb{Q} \;\&\; \forall n (\exists (p, m, q, n) \text{ в } y) \left[|x-p| < \frac{1}{m} \right] \tag{4.1}$$

и

$$\exists z \; (\forall (p, m, q, n) \text{ в } y) \left[|x-p| < \frac{1}{m} \to |z-q| < \frac{1}{n} \right]. \tag{4.2}$$

Ясно, что (4.1) определяет $\mathbf{G}_\delta$-множество пар (x, y) в $\mathbb{R}^2$. Чтобы доказать то же для (4.2), мы покажем сперва, что (4.2) эквивалентно следующему условию:

$$\begin{aligned} &(\forall k \in \mathbb{N}) \; (\forall (p_1, m_1, q_1, n_1), \ldots, (p_k, m_k, q_k, n_k) \in (\mathbb{Q} \times \mathbb{N})^2) \\ &\left[\forall i \leqslant k \left[(p_i, m_i, q_i, n_i) \text{ лежит в } y \text{ и } |x-p_i| < \frac{1}{m_i} \right] \right. \\ &\to (\exists (p, m, q, n) \text{ в } y) \\ &\left. \left[|x-p| < \frac{1}{m} \;\&\; \left[q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n} \right] \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} \left(q_i - \frac{1}{n_i}, q_i + \frac{1}{n_i} \right) \right] \right], \end{aligned} \tag{4.3}$$

здесь $[a, b]$ и (a, b) — замкнутый и открытый интервалы от a до b соответственно. Ясно, что (4.2) $\to$ (4.3). Чтобы доказать обратное, рассмотрим пересечение

$$A_{x,y} = \bigcap \left[q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n} \right],$$

где пары (q, n) берутся из четвёрок (p, m, q, n) в y с условием $|x-p| < \frac{1}{m}$. Тогда в силу локальной компактности $\mathbb{R}$ из (4.3) вытекает, что $A_{x,y}$ непусто и содержит ровно одну точку. Пусть z — эта точка. Легко установить, что z есть число, существование которого утверждалось в (4.2). Тем самым (4.3) $\to$ (4.2) также доказано.

Ясно, что множество пар (x, y), определённое в (4.3) есть также $\mathbf{G}_\delta$-множество. Значит, и D_U, будучи пересечением множеств, определённых в (4.1) и (4.3), есть $\mathbf{G}_\delta$-множество. □

Каждую непрерывную вещественную функцию f легко расширить до такой непрерывной функции f^*, область определения которой всюду плотна в $\mathbb{R}$, и это расширение максимально. Теорема 1 и следующая теорема 2 показывают, что область определения такой максимальной f^* всегда есть $\mathbf{G}_\delta$-множество.

Теорема 2 (универсальность U). *Вещественная функция $f\colon D \to \mathbb{R}$ непрерывна и $D \in \mathbf{G}_\delta$ тогда и только тогда, когда найдётся такое y_0, что f имеет вид $U(\cdot, y_0)$.*

Доказательство. По теореме 1 верна импликация справа налево. Чтобы доказать обратное, положим $D = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, где A_i — такие открытые множества, что

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots. \tag{4.4}$$

Пусть y_0 кодирует множество четвёрок (p, m, q, n), таких что

$$(\exists\, x \in D) \left[|x - p| < \frac{1}{m} \ \&\ m \geqslant n \ \&\ \left(p - \frac{1}{m}, p + \frac{1}{m} \right) \subseteq A_n \ \&\ |f(x) - q| < \frac{1}{n} \right].$$

Тогда из (4.4) и определения U получаем, что $f = U(\cdot, y_0)$. □

5. Область вычислимости

Функция, функционал, оператор и т. д. будут называться *вычислимыми* тогда и только тогда, когда они имеют вид t^α, где $t \in \mathbb{T}$ (т. е. t есть вычислимое вещественное число) и $\alpha \in \mathcal{T}$. Множество объектов, представимых в этой форме, будет называться *областью вычислимости*.

Мы увидим, что имеются действительные математические объекты, которые не лежат в области вычислимости. В действительности эта область не замкнута относительно некоторых операций, которые представляются имеющими физический смысл. Область непрерывности замкнута относительно этих операций, и теория этой области представляется более простой. Главная цель данного раздела состоит в том, чтобы описать эту ситуацию. Теоремы 3 и 4 заставляют думать, что рамки вычислимости должны быть достаточно широкими, но пример 1, замечания 5.2 и 5.3, пример 3 и замечание 5.6, напротив, приводят к мысли, что они слишком узки. Кроме того, мы хотим указать здесь некоторые нерешённые задачи.

Для области вычислимости мы можем ввести модели, подобные $\mathbf{M}$. Именно, $\langle \mathbb{T}, U_0, t \rangle_{t \in \mathbb{T}}$, где U_0 есть ограничение U на $\mathbb{T}^2$, и $\langle \mathbb{N}, u, n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, где $u\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ определено универсальной машиной Тьюринга. Эти модели дефиниционально эквивалентны. Но, как и в случае $\mathbf{M}$, их теории первого порядка здесь развиваться не будут.

Вычислимые функционалы и операторы изучались в [12,13] (см. также ссылки там). Наши базисные определения будут более простыми и более общими. Главное различие между [13] и данной статьей состоит в том, что мы не ограничиваем определение вычислимых функций интервалами в $\mathbb{R}$. Вместо этого мы рассматриваем частично определённые вычислимые функции, т. е. область t^α определена так же, как в разделе 3. Тем самым я не ограничиваю области определения и изменения t^α вычислимыми объектами, но беру их такими, как если бы они определялись в рамках области непрерывности. (Некоторые связи между теорией вычислимости, теорией меры и случайностью рассматривались в [14] (см. также ссылки там).)

Мы сосредоточимся здесь на вычислимых функциях, т. е. на вещественных функциях $t^{(1,1)}$. Мы имеем следующее альтернативное определение этих функций: функция $f\colon D \to \mathbb{R}$, где $D \subseteq \mathbb{R}$, вычислима тогда и только тогда, когда существует машина Тьюринга M, такая что

$$f(x) = y$$

имеет место тогда и только тогда, когда пара x, y имеет следующее свойство. Каждый раз, когда мы запускаем M на бесконечной ленте, на которой напечатаны полное десятичное разложение x и целое $n \in \mathbb{N}$, после конечного числа шагов M останавливается и даёт на выходе $q \in \mathbb{Q}$, причём

$$|y - q| < \frac{1}{n}.$$

Легко проверить, что это определение эквивалентно существованию некоторого $t \in \mathbb{T}$, для которого $f = t^{(1,1)}$. Отметим два факта, которые будут использоваться далее: если $f\colon D \to \mathbb{R}$ вычислима, то $f[D \cap \mathbb{T}] \subseteq \mathbb{T}$; композиция вычислимых функций также вычислима.

Конечно, все вычислимые вещественные функции непрерывны на своих областях определения, но эти области могут быть лишь $\mathbf{G}_\delta$-множествами. Мы даём два примера:

$$f_1(x) = \sum_{q_n < x} \frac{1}{2^n}, \quad f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin \frac{1}{x - q_n},$$

где $q_1, q_2, \ldots$ есть рекурсивное перечисление $\mathbb{Q}$ и $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Легко проверить, что как f_1, так и f_2 вычислимы, f_1 строго возрастает и эти функции не имеют непрерывных продолжений ни в одну точку $\mathbb{Q}$. Область изменения вычислимой вещественной функции может быть собственным A-множеством (см. [3]).

Замечание 5.1. Если даны две машины Тьюринга, определяющие два вещественных числа t_0 и t_1, отношение $t_0 = t_1$ неразрешимо. Подобным образом для любого $\alpha \in \mathcal{T}$ неразрешимо отношение $t_0^\alpha = t_1^\alpha$. Следовательно, наша форма t^α индивидуальных объектов вычислимого универсума (или, более общо, форма x^α при $x \in \mathbb{R}$) a priori не создаёт ясности относительно этих объектов сколько-нибудь интересным образом. Она служит лишь для того, чтобы задать совокупность вычислимых (или физически интерпретируемых) объектов.

Всякий раз когда мы пишем $f(x)$, мы считаем, что x лежит в области определения f.

Теорема 3 (теорема о вычислимом промежуточном значении). *Если $f\colon D \to \mathbb{R}$ вычислима, $\mathbb{T} \subseteq D$ и $f(a) < f(b)$, то f принимает все вычислимые значения в интервале $[f(a), f(b)]$ в вычислимых точках, иначе говоря,*

$$f[[a,b] \cap \mathbb{T}] \subset [f(a), f(b)] \cap \mathbb{T}.$$

Доказательство. (Идея этого доказательства известна, см. [13, с. 41].) Мы допускаем без потери общности, что $a, b \in \mathbb{T}$. Пусть, напротив, $t \in [f(a), f(b)] \cap \mathbb{T}$, но $f(s) \neq t$ для всех $s \in [a,b] \cap \mathbb{T}$. Тогда вычислим $f\big(\frac{a+b}{2}\big)$ и t с точностью, достаточной для того, чтобы определить, какое из следующих неравенств верно:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) > t, \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right) < t$$

(равенства не может быть согласно нашему допущению). Если верно первое неравенство, заменим интервал $[a,b]$ на $\big[a, \frac{a+b}{2}\big]$, если же второе, заменим его на $\big[\frac{a+b}{2}, b\big]$. Повторяя эту процедуру, мы получим вложенную систему интервалов

$$[a,b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_1, b_2] \supset \ldots,$$

где $|b_n - a_n| = 2^{-n}|b-a|$ и $a_n, b_n \in \mathbb{T}$ для всех n. Значит, $f(a_n) \leqslant t \leqslant f(b_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, существует предел $s = \lim a_n = \lim b_n$ и легко проверить, что $s \in \mathbb{T}$. Тогда $f(s)$ существует и f непрерывна в s. Значит, $\lim f(a_n) = \lim f(b_n) = t$ и

$$f(s) = f(\lim a_n) = \lim f(a_n) = t,$$

что противоречит нашему допущению. Это противоречие завершает доказательство теоремы 3. □

Теорема 4 (теорема о вычислимом максимуме). *Если $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ — вычислимая функция и $f(x) < f(c)$ для всех $x \neq c$, то $c \in \mathbb{T}$.*

Доказательство. (Эта теорема сформулирована в [13] без доказательства.) Пусть $f = U(\cdot, t)$, где $t \in \mathbb{T}$. Так как $[0,1]$ — компакт, мы можем найти для каждого n конечную систему (p_i, m_i, q_i, n), $i = 1, \ldots, k(n)$, четвёрок в t, такую что

$$\bigcup_{i=1}^{k(n)} \left(p_i - \frac{1}{m_i}, p_i + \frac{1}{m_i}\right) \supseteq [0,1].$$

Без потери общности мы можем также допустить, что $p_i \neq p_j$ для $i \neq j$. Затем мы определим

$$g_n(p_i) = q_i$$

и линейно распространим g_n во все другие точки $[0,1]$. Таким образом, g_n кусочно-линейно и

$$|f(x) - g_n(x)| < \frac{1}{n}$$

для всех $x \in [0,1]$. Пусть теперь $[a_n, b_n]$ — кратчайший интервал, содержащий множество

$$A_n = \left\{x\colon g_n(x) \geqslant \max_{0 \leqslant y \leqslant 1} g_n(y) - \frac{2}{n}\right\}.$$

Тогда $a_n \leqslant c \leqslant b_n$ для всех n. Из единственности максимума (которая предполагается в теореме 4) вытекает, что диаметр A_n сходится к 0, т. е. $|b_n - a_n| \to 0$. Так как точки (p_i, q_i) рациональны, числа a_i, b_i также рациональны и эффективно вычислимы. Кроме того, для каждого m можно найти такое целое $n(m) \in \mathbb{N}$, что

$$|c - a_{n(m)}| \leqslant |b_{n(m)} - a_{n(m)}| < \frac{1}{m}.$$

Значит, $c \in \mathbb{T}$. □

Из теоремы 4 немедленно вытекает следствие.

Следствие. *Если $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ вычислима, $f(c) = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} f(x)$ и $c \notin \mathbb{T}$, то c есть точка накопления множества $\{x\colon f(x) = f(c)\}$.*

Проблема 1. Может ли заключение следствия быть усилено до утверждения, что существует совершенное (т. е. замкнутое и плотное на себе) множество P, такое что $c \in P$ и $f(x) = f(c)$ для всех $x \in P$?

Следующий пример (сама функция будет построена позже) также порождает нетривиальные примеры функций, удовлетворяющих допущениям этого следствия.

Пример 1. Существует вычислимая функция $f\colon [0,1] \to [0,1]$, такая что $\min\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} f(x) = 0$, но $f(t) > 0$ для всех $t \in [0,1] \cap \mathbb{T}$.

Замечание 5.2. Этот пример может навести на мысль, что некоторые невычислимые вещественные числа имеют прямую физическую интерпретацию. Если это так, мы не можем заменить прямую Евдокса—Дедекинда $\mathbb{R}$ множеством $\mathbb{T}$ чисел, вычислимых по Тьюрингу (см. также пример 3).

Замечание 5.3. Пример 1 также показывает, насколько хрупким является понятие вычислимости вещественной функции. Действительно, функция f примера состоит из совершенного множества на оси $y = 0$ и счётного количества дуг, внутренности которых лежат над этой прямой. Если теперь мы перебросим любое непустое собственное подмножество этих дуг ниже оси $y = 0$ (изменив знак соответствующей части f), результирующая функция уже не будет вычислимой. (Это немедленно вытекает из теоремы 3.)

Результаты, относящиеся к примеру 1, принадлежат Е. Шпекеру, Г. Крейзелю и Д. Лакомбу (см. [13] и ссылки там). Мы будем использовать этот пример снова для построения примера 2, поэтому для удобства читателя я включаю следующую конструкцию примера 1 (это фольклор, который я узнал от А. Эренфойхта много лет назад и недавно снова от Р. Доугхерти).

Пусть A и B — два рекурсивно перечислимых, но рекурсивно неразделимых подмножества $\mathbb{N}$. (Например, A и B могут быть множествами гёделевых номеров теорем и отрицаний теорем арифметики Пеано.) Пусть $A = \{\alpha(n)\colon n \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{\beta(n)\colon n \in \mathbb{N}\}$, где α и β — рекурсивные и инъективные функции. Бинарное дерево есть множество T конечных последовательностей нулей и единиц, в котором любой начальный сегмент любой последовательности также лежит в T.

Под *бесконечным путём* в T мы понимаем бесконечную последовательность $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$, в которой все начальные сегменты лежат в T.

Лемма. *Существует бинарное рекурсивное бесконечное дерево без рекурсивных бесконечных путей.*

Доказательство. T есть множество всех конечных последовательностей $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, таких что для всех $m \leqslant n$ если $\alpha(m) \leqslant n$, то $\varepsilon_{\alpha(m)} = 1$, и если $\beta(m) \leqslant n$, то $\varepsilon_{\beta(m)} = 0$.

Ясно, что T не может иметь никакого рекурсивного бесконечного пути, так как такой путь определил бы рекурсивное множество, разделяющее A и B. $\square$

Теперь, используя T, мы можем определить функцию f примера 1. Пусть сначала x лежит в тернарном канторовом множестве, т. е. x имеет вид

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon_n}{3^n},$$

где $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$ для всех n. Пусть T — дерево, удовлетворяющее лемме. Тогда для таких x мы определяем

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots) \text{ есть бесконечный путь в } T; \\ \frac{1}{n+1}, & \text{если } (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \text{ есть наибольший начальный сегмент} \\ & (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots), \text{ который лежит в } T. \end{cases}$$

Затем мы распространяем f линейно на все сегменты, дополнительные к канторову множеству. Из леммы ясно, что f имеет все свойства, требуемые в примере 1.

Пример 2. Существует ограниченная вычислимая функция $h\colon D \to \mathbb{R}$, такая что $\mathbb{T} \subseteq D$, но h не имеет непрерывного продолжения на все $\mathbb{R}$.

Для доказательства возьмём f как в примере 1. Функция $g(x) = 1/(e^x + 1)$ есть вложение $\mathbb{R}$ с интервалом $(0, 1)$ в качестве образа, и g вычислима. Значит, $f(g(x))$ ограничена (так как $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$), вычислима, её минимальное значение есть 0 и $f(g(t)) > 0$ для всех $t \in \mathbb{T}$. Положим $h(x) = \sin(1/f(g(x)))$. Тогда h не имеет непрерывного продолжения ни в какую точку x, для которой $f(g(x)) = 0$, но это возможно только для некоторых невычислимых x. Таким образом, h имеет все требуемые свойства.

Замечание 5.4. Эта функция h удовлетворяет допущению теоремы о вычислимом промежуточном значении (теорема 3). Это указывает на подобие теоремы 3 теореме Дарбу, утверждающей, что производная всюду дифференцируемой функции имеет свойство промежуточного значения. В действительности h имеет много точек положительного колебания, и такие производные могут иметь много разрывов.

Замечание 5.5. Для данной непрерывной функции $f\colon D \to \mathbb{R}$, где $D \subseteq \mathbb{R}$, мы обозначим через $S(f)$ множество точек, где f имеет положительное колебание, т. е. множество всех таких $x \in \mathbb{R}$, что

$$(\exists\, \varepsilon > 0)\ (\forall\, \delta > 0)\ (\exists\, u, v \in D)\ [|x - u| < \delta\ \&\ |x - v| < \delta\ \&\ |f(u) - f(v)| > \varepsilon].$$

Из этого определения легко следует, что множество $\mathbb{R} - S(f)$ всегда есть $\mathbf{G}_\delta$-множество, всюду плотное в $\mathbb{R}$. Легко видеть, что каждая непрерывная функция f может быть продолжена до непрерывной функции $f^*\colon (\mathbb{R} - S(f)) \to \mathbb{R}$. Очевидно, f^* является максимальным непрерывным продолжением f.

Проблема 2. Пусть функция $f\colon D \to \mathbb{R}$ вычислима, $\mathbb{T} \subseteq D$ и множество $S(f)$ непусто. Должно ли множество $S(f)$ быть несчётным (и тогда иметь непустое совершенное подмножество)?

Мы покажем, что, несмотря на замечание 5.5, f может быть вычислимой, но при этом f^* окажется невычислимой. Действительно, следующий пример (приведённый без доказательства в [13]) показывает, что, устраняя одну точку из графика некоторой непрерывной, но не вычислимой функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, её можно превратить в вычислимую. Такой точкой будет вершина ультраострого пика графика f.

Пример 3. Существует ограниченная, чётная и непрерывная функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такая что значение $f(0)$ не лежит в $\mathbb{T}$, но ограничение функции f на область $\mathbb{R} - \{0\}$ вычислимо. Более того, $f(0) > f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Действительно, пусть $\gamma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — рекурсивная функция, которая инъективна, но множество её значений $\gamma[\mathbb{N}]$ не рекурсивно. Тогда вещественное число

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\gamma(k)}}$$

не лежит в $\mathbb{T}$. Положим

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{\gamma(k)}}$$

и распространим f так, что $f(x) = f(1)$ для $x \leqslant -1$ и $x \geqslant 1$, f линейна на каждом интервале $\left[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right]$ и $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ и $f(0) = \xi$. Ясно, что f обладает всеми требуемыми свойствами.

Замечание 5.6 (о производных и интегралах). Производная вычислимой функции не обязана быть вычислимой, даже если эта производная непрерывна. Чтобы увидеть это, мы докажем сперва, что интеграл вычислимой функции вычислим. Действительно, если $g = t^{(1,1)}$, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, где $a, b, t \in \mathbb{T}$, то для каждого $N \in \mathbb{N}$ найдётся конечное множество четвёрок (p_i, m_i, q_i, n_i) в t, такое что $n_i > N$ для всех i и открытые интервалы $\left(p_i - \frac{1}{m_i}, p_i + \frac{1}{m_i}\right)$ покрывают $[a,b]$. Конечно, для данного N такое множество четвёрок может быть найдено эффективно. Тогда если $f\colon \mathbb{R} - S \to \mathbb{R}$ есть ограниченная вычислимая функция, где S конечно, то риманов интеграл

$$F(x) = \int_0^x f(u)\,du$$

есть вычислимая функция с областью определения $\mathbb{R}$.

Пусть теперь f — функция примера 3, тогда F вычислима, но её производная есть f, и она не вычислима (другой пример и связанные результаты см. в [13, глава 1]).

Наконец, мы хотим показать, что областью определения вычислимых функций могут быть интервалы с невычислимыми концами (замкнутые и открытые вычислимые концы возможны согласно замечанию 4.2).

Пример 4. Существуют постоянные вычислимые функции с открытой областью определения $(-\infty, \xi)$ и с замкнутой $[\xi, \infty)$, где ξ — невычислимое вещественное число, определённое в примере 3.

Действительно, пусть y_0 рекурсивно кодирует множество четвёрок $(p, m, 0, n)$, таких что

$$p + \frac{1}{m} < \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^{\gamma(k)}},$$

тогда $y_0 \in \mathbb{T}$, область определения $U(x, y_0)$ есть $(-\infty, \xi)$ и значение есть 0 для всех $x < \xi$. Если y_0 кодирует множество четвёрок $(p, m, 0, n)$, таких что

$$p - \frac{1}{m} > \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{\gamma(k)}},$$

то снова $y_0 \in \mathbb{T}$, и область определения становится $[\xi, \infty)$.

Проблема 3. Верно ли, что интервалы $(-\infty, \xi]$ и (ξ, ∞), где ξ то же, что и раньше, не могут быть областями определения вычислимых функций. Верно ли, что если

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\alpha(k)}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\beta(k)}},$$

где α и β как в примере 1, то ни один из четырёх интервалов $(-\infty, \eta)$, $(-\infty, \eta]$, (η, ∞) и $[\eta, \infty)$ не может быть областью определения вычислимой функции.

Как хорошо известно, существуют множества класса $\mathbf{G}_\delta$, которые всюду плотны в $\mathbb{R}$, но имеют меру нуль.

Проблема 4. Существует ли вычислимая вещественная функция, область определения (значений) которой содержит $\mathbb{T}$ и имеет меру нуль?

Проблема 5. Пусть f и g — две вещественные вычислимые функции, для которых объединение $f \cup g$ есть непрерывная функция. Должна ли функция $f \cup g$ быть вычислимой? (Я подозреваю, что ответ отрицателен.)

Литература

[1] Kan I. Open sets of diffeomorphisms having two attractors, each with an everywhere dense basin // Bull. Amer. Math. Soc. — 1994. — Vol. 31. — P. 68—74.

[2] Kanamori A. The Higher Infinite. — Springer, 1994.

[3] Kuratowski K. Topology. — Academic Press, 1966—1968.

[4] Mycielski J. Can mathematics explain natural intelligence? // Physica D. — 1986. — Vol. 22. — P. 366—375.

[5] Mycielski J. A learning theorem for linear operators // Proc. Amer. Math. Soc. — 1988. — Vol. 103. — P. 547—550.

[6] Mycielski J. Games with perfect information // Handbook of Game Theory. Vol. I / R. J. Aumann, S. Hart, eds. — North-Holland, 1992. — P. 41—70.

[7] Mycielski J. On the tension between Tarski's nominalism and his model theory (definitions for a mathematical model of knowledge) // Ann. Pure Appl. Logic. — 2004. — Vol. 126, Proc. Alfred Tarski's Centenary Conference, Warsaw 2001. — P. 215—224.

[8] Mycielski J. Russell's paradox and Hilbert's (much forgotten) view of set theory // One Hundred Years of Russell's Paradox / G. Link, ed. — Berlin: Walter de Gruyter, 2004. — P. 533—547.

[9] Mycielski J., Swierczkowski S. A model of the neocortex // Adv. Appl. Math. — 1988. — Vol. 9. — P. 465—480.

[10] Neeman I. Optimal proofs of determinacy // Bull. Symbolic Logic. — 1995. — Vol. 1. — P. 327—339.

[11] Neeman I. Optimal proofs of determinacy. II // J. Math. Logic. — 2002. — Vol. 2. — P. 227—258.

[12] Pour-El M. B. The structure of computability in analysis and physical theory: An extension of Church's thesis // Handbook of Computability Theory / E. R. Griff, ed., Amsterdam: Elsevier Science, 1999. — P. 449—471.

[13] Pour-El M. B., Richards J. I. Computability in Analysis and Physics. — Springer, 1989.

[14] Volchan S. B. What is a random sequence? // Amer. Math. Monthly. — 2002. — Vol. 109. — P. 46—63.