

Неявный функционал и задачи на собственные значения

И. Л. ПОКРОВСКИЙ

Московский государственный
технический университет им. Н. Э. Баумана
e-mail: pleon@dataforce.net

УДК 515.168

Ключевые слова: нелинейные задачи, собственные значения, спектр Фучика, p -лапласиан, задачи с весом.

Аннотация

В работе изложен подход к нелинейным положительно однородным задачам на собственные значения, основанный на использовании спектрального параметра в качестве функционала типа Эйлера и позволяющий представить область изменения параметра как бифуркационную диаграмму. Рассмотрены задачи о спектре Фучика, классическая и для p -лапласиана, а также задачи с нелинейным вхождением параметра в весовую функцию.

Abstract

I. L. Pokrovski, Implicit functional and eigenvalue problems, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 5, pp. 169—186.

An approach is suggested to nonlinear, positively homogeneous eigenvalue problems based on the using of the spectral parameter as functional of Euler type. It allows one to present the spectral parameter domain as a bifurcation diagram of the problem. Fučík spectrum problems (classic and for p -Laplacian) and the problem with a nonlinear dependence of the weight function on the spectral parameter are considered.

1. Конструкция неявного функционала

Рассмотрим следующую задачу на собственные значения:

$$A(u) = B(\Lambda, u), \quad (1.1)$$

где A и B являются, вообще говоря, нелинейными операторами, действующими из банахова пространства X со слабо компактной сферой в сопряжённое пространство X^* . Параметр Λ принимает значения в некотором частично упорядоченном множестве L , которое в дальнейшем предполагается линейным (банаховым) пространством.

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 5, с. 169—186.

© 2005 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

Требуется найти значения Λ , для которых задача (1.1) имеет нетривиальное решение $u \neq 0$. Будем называть такие значения собственными значениями задачи (1.1) или *точками спектра*. Дополнение к спектру назовём *резольвентным множеством* задачи (1.1).

Предположим, что операторы A и B обладают следующими свойствами ($\mathcal{C}^{1,1}(X, Y)$ обозначает класс отображений из X в Y , имеющих липшицеву производную).

1°. A и B положительно однородны одной и той же степени однородности:

$$A(tu) = t^\alpha A(u), \quad B(\Lambda, tu) = t^\alpha B(\Lambda, u), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

2°. $A \in \mathcal{C}^{1,1}(X, X^*)$ и $B \in \mathcal{C}^{1,1}(L \times X, X^*)$ — локально липшицевы отображения, т. е.

$$\begin{aligned} \|A(u_2) - A(u_1)\|_{X^*} &\leq L_A(R) \|u_2 - u_1\|_X, \\ \|(\Lambda_2, u_2) - B(\Lambda_1, u_1)\|_{X^*} &\leq L_B(R) (\|\Lambda_2 - \Lambda_1\|_L + \|u_2 - u_1\|_X) \end{aligned}$$

для любых пар (Λ_1, u_1) и (Λ_2, u_2) из шаров радиуса R в $L \times X$, где функции $L_A(R)$ и $L_B(R)$ ограничены при ограниченных и отграниченных от нуля значениях аргументов.

3°. Оператор B вполне непрерывный по u , при любом значении $\Lambda \in L$.

4°. Оператор A ограничен, непрерывен и имеет непрерывный обратный.

Условие 1° позволяет впоследствии рассматривать задачу (1.1) лишь на сфере $S = \{u \in X : \|u\| = 1\}$, где $\|\cdot\|$ обозначает норму в X .

Предположим, что существуют функционал

$$F \in L \times (X \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}^1,$$

однородный по второму аргументу и, значит, допускающий задание на сфере S , и путь $\gamma: \lambda \mapsto \Lambda(\lambda) \in L$, такие что

(F1) $F \in \mathcal{C}^{1,1}(L \times S, \mathbb{R}^1)$;

(F2) для любого $u \in S$ найдётся элемент $\Lambda \in L$, такой что $F(\Lambda, u) = 0$;

(F3) $F_\Lambda(\Lambda, u) > 0 \in L^*$ для любого $u \in S$, где F_Λ — частная производная функционала $F(\Lambda, u)$, L^* — сопряжённое пространство к L ;

(Λ1) функция $\Lambda(\lambda)$ принадлежит классу $\mathcal{C}^{1,1}(\mathbb{R}^1, L)$ (имеет липшицеву производную);

(Λ2) $\Lambda'(\lambda) > 0 \in L$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}^1$;

(Λ3) $\Lambda(\lambda) \rightarrow \pm\infty$ при $\lambda \rightarrow \pm\infty$, т. е. для каждого $\Lambda_0 \in L$ найдутся $\lambda_*, \lambda_{**} \in \mathbb{R}^1$, такие что

$$(\lambda < \lambda_* \implies \Lambda(\lambda) < \Lambda_0) \ \& \ (\lambda > \lambda_{**} \implies \Lambda(\lambda) > \Lambda_0).$$

Лемма 1.1. Соотношение

$$F(\Lambda(\lambda(u)), u) \equiv 0 \tag{1.2}$$

определяет функционал $\lambda(u) \in \mathcal{C}^{1,1}(S, \mathbb{R}^1)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольный элемент $u \in S$. Согласно свойству (F2) существует элемент $\Lambda_0 \in L$, такой что $F(\Lambda_0, u) = 0$. Обозначим $\varphi(\lambda) \equiv F(\Lambda(\lambda), u)$. Из свойства (Λ3) следует, что найдутся числа λ_* и λ_{**} , такие что $\varphi(\lambda_*) < 0$ и $\varphi(\lambda_{**}) > 0$. Принимая во внимание непрерывность функции $\varphi(\lambda)$, из свойств (F1) и (Λ1) получаем, что функция $\varphi(\lambda)$ обращается в нуль в некоторой точке $\lambda = \lambda(u)$. Функция $\varphi(\lambda)$ монотонно возрастает по λ в силу свойств (F3) и (Λ2), откуда следует единственность определённого значения $\lambda(u)$. Из хорошо известной теоремы о неявной функции и очевидного в силу свойств (F3) и (Λ2) неравенства

$$\frac{d}{d\lambda} F(\Lambda(\lambda), u) = (F_\Lambda(\Lambda(\lambda), u), \Lambda'(\lambda)) > 0$$

следует, что $\lambda(u)$ — функционал класса $\mathcal{C}^{1,1}$. Лемма доказана. $\square$

Предположим, что функционал $\lambda(u)$ обладает следующим свойством:

$$\lambda'(u) = 0 \iff A(u) = B(\Lambda(\lambda(u)), u). \quad (1.3)$$

Более удобно использовать вместо (1.3) следующее условие:

$$\lambda'(u) = G(u)(A(u) - B(\Lambda(\lambda(u)), u)), \quad (1.4)$$

где функционал $G(u)$ удовлетворяет требованию

(G1) существует $m > 0$, такое что для любого $u \in S$ выполняется $|G(u)| \geq m$.

Определение 1.1. Назовём функционал $\lambda(u)$, определённый в (1.2) и удовлетворяющий (1.3) (в частности, (1.4)) *неявным функционалом*.

Лемма 1.2. Множество меньших значений

$$M_c(\lambda(u)) \equiv \{u \in S: \lambda(u) \leq c\}$$

задаётся неравенством

$$F(\Lambda(c), u) \geq 0. \quad (1.5)$$

Доказательство. Сопоставление неравенства (1.5) с соотношением (1.2), определяющим неявный функционал $\lambda(u)$, с учётом условий монотонности (F2) и (Λ2), делает утверждение леммы очевидным. $\square$

Следствие. Пусть $\Lambda(c) = \Lambda_0$. Тогда множество $M_c(\lambda(u))$ не зависит от выбора пути γ , что оправдывает следующее определение: $M_c(\lambda(u)) \equiv M(\Lambda_0)$.

Покажем, что неявный функционал $\lambda(u)$ удовлетворяет хорошо известным условиям Пале—Смейла.

Лемма 1.3. Пусть последовательность $\{u_n\} \subset S$ такова, что множество $\{\lambda(u_n)\}$ ограничено и имеет место сходимость

$$A(u_n) - B(\Lambda(\lambda(u_n)), u_n) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (1.6)$$

Тогда из $\{u_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Предположим, не ограничивая общности, что последовательность $\{u_n\} \subset S$ слабо сходится в X и что числовая последовательность $\{\lambda(u_n)\}$ сходится. Тогда из условий 3° , $(F1)$ и $(\Lambda 1)$ следует сильная сходимость последовательности $\{B(\Lambda(\lambda(u_n)), u_n)\}$ к некоторому элементу $v \in X^*$. Отсюда и из (1.6) можно вывести сильную сходимость $A(u_n) \rightarrow v$ и, имея в виду свойство 4° , получить, что $u_n \rightarrow A^{-1}(v)$ при $n \rightarrow \infty$. Лемма доказана. $\square$

Следствие. Функционал удовлетворяет условиям Пале—Смейла [13].

Доказательство. Предположим, что функционал $\lambda(u)$ ограничен на множестве $N \subset S$ и последовательность $\{u_n\} \subset N$ такова, что $\lambda'(u_n) \rightarrow 0 \in X^*$ при $n \rightarrow \infty$. Из вида (1.4) производной $\lambda'(u)$ и свойства $(G1)$ следует, что эта последовательность удовлетворяет условиям леммы 1.3 и, следовательно, сильно сходится в X , причём предел принадлежит замыканию множества N . Следствие доказано. $\square$

Это следствие, а также лемма 1.1, в которой была показана принадлежность $\lambda(u)$ классу $C^{1,1}(S, \mathbb{R}^1)$, позволяют применить к неявному функционалу $\lambda(u)$ результаты [13] и получить следующее утверждение.

Лемма 1.4. Пусть функционал $\lambda(u)$, определённый в (1.2), не имеет критических значений в интервале $[c, d]$. Тогда множество $M_c(\lambda(u))$ является деформационным ретрактом множества $M_d(\lambda(u))$ и вложение

$$M_c(\lambda(u)) \rightarrow M_d(\lambda(u))$$

есть гомотопическая эквивалентность. $\square$

Лемма 1.5. Множество точек спектра задачи (1.1) замкнуто в L .

Доказательство. Пусть $\{\Lambda_n, n = 1, 2, \dots\}$ — последовательность собственных значений задачи (1.1), сходящаяся к некоторому элементу $\Lambda \in L$ при $n \rightarrow \infty$. Обозначим через u_n соответствующие нормированные ($\|u_n\|_X = 1$) собственные функции:

$$A(u_n) = B(\Lambda_n, u_n). \quad (1.7)$$

Преобразуем (1.7) к виду

$$A(u_n) - B(\Lambda, u_n) = B(\Lambda_n, u_n) - B(\Lambda, u_n),$$

откуда с учётом условия 2° липшицевости оператора B по Λ получим

$$\|A(u_n) - B(\Lambda, u_n)\| \leq L_B(\|u_n\|)\|\Lambda_n - \Lambda\|_L \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

значит,

$$A(u_n) - B(\Lambda, u_n) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (1.8)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность $\{u_n\}$ слабо сходится в X к некоторому элементу u . Отсюда и из полной непрерывности оператора B по u следует сильная сходимость

$$B(\Lambda, u_n) \rightarrow w \equiv B(\Lambda, u) \quad (1.9)$$

для некоторого $v \in X$. При этом согласно (1.8) $A(u_n) \rightarrow w$ сильно в X , и по свойству 4° оператора A последовательность $\{u_n\}$ также сходится сильно. При этом $u_n \rightarrow u$, и в силу непрерывности операторов A и B

$$A(u_n) \rightarrow A(u), \quad B(\Lambda, u_n) \rightarrow B(\Lambda, u),$$

поэтому

$$A(u) = B(\Lambda, u),$$

т. е. Λ является точкой спектра задачи (1.1). Лемма доказана. $\square$

Следствие. Резольвентное множество $\mathfrak{R}$ задачи (1.1) открыто.

Сформулируем теперь основное утверждение и его следствие, позволяющие рассматривать множество L как бифуркационную диаграмму задачи (1.1).

Теорема 1.1. На любой связной компоненте ρ резольвентного множества $\mathfrak{R}$ задачи (1.1) гомотопический тип множества $M(A)$, $A \in \rho$, сохраняется.

Доказательство. Соединим две точки A и B связной компоненты ρ непрерывной кривой σ конечной длины. Множество $\mathfrak{R}$, согласно следствию леммы 1.5, открыто. Из соображений компактности следует, что существует конечное открытое покрытие кривой σ . Любые две точки выпуклого множества из этого элемента покрытия можно соединить с некоторой третьей точкой этого же множества двумя монотонно возрастающими кривыми класса $C^{1,1}$, вдоль каждой из которых гомотопический тип соответствующего множества меньших значений не меняется в силу леммы 1.4. Теорема доказана. $\square$

Следствие. Пусть точки A и B принадлежат резольвентному множеству $\mathfrak{R}$ задачи (1.1). Пусть множества $M(A)$ и $M(B)$ не являются гомотопически эквивалентными. Тогда на любой непрерывной кривой, соединяющей точки A и B , имеются точки спектра задачи (1.1).

Доказательство. Из гомотопической неэквивалентности $M(A) \not\cong M(B)$ и теоремы 1.1 следует, что точки A и B принадлежат различным связным компонентам резольвентного множества $\mathfrak{R}$. Отсюда сразу получаем утверждение следствия. $\square$

2. Задача о спектре Фучика p -лапласиана

Рассмотрим следующую квазилинейную эллиптическую задачу на собственные значения:

$$\begin{cases} -\Delta_p(u) - \lambda_+ |u|^{p-2} u^+ + \lambda_- |u|^{p-2} u^- = 0, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область, $p > 1$, $u^\pm \equiv \max\{\pm u, 0\}$, $\lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}^1$. Здесь $X = W_p^1(\Omega)$ — пространство С. Л. Соболева (см. [10]) функций $u(x)$,

являющееся замыканием по норме

$$\|\nabla u\|_p \equiv \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}$$

пространства финитных бесконечно дифференцируемых функций; $X^* = W_q^{-1}(\Omega)$ — сопряжённое к нему линейное пространство; $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; p -лапласиан

$$\Delta_p \equiv \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u): \dot{W}_p^1(\Omega) \rightarrow W_q^{-1}(\Omega)$$

понимается также в смысле замыкания;

$$S_p \equiv \{u \in \dot{W}_p^1(\Omega): \|\nabla u\|_p = 1\} —$$

единичная сфера в $X = \dot{W}_p^1(\Omega)$; $L = \{(\lambda_+, \lambda_-)\}$ — двумерная вещественная плоскость; операторы A и B имеют вид

$$A = -\Delta_p, \quad B(\Lambda, u) \equiv \lambda_+ |u|^{p-2} u^+ - \lambda_- |u|^{p-2} u^-.$$

В случае $\lambda_+ = \lambda_-$ задача (2.1) принимает вид

$$\begin{cases} -\Delta_p(u) - \lambda |u|^{p-2} u = 0, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Определим первое собственное значение задачи (2.2) как

$$\lambda_{1,p} \equiv \min_{u \neq 0} \frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_p^p} = \min_{u \in S_p} \frac{1}{\|u\|_p^p}. \quad (2.3)$$

Множество Σ пар (λ_+, λ_-) , для которых задача (2.1) имеет нетривиальные решения, называется *спектром Фучика p -лапласиана* в области Ω . О первом собственном значении $\lambda_{1,p}$ задачи (2.2) известно, что оно положительное, простое и соответствующая собственная функция знакопостоянная [12]. Следовательно, спектр Σ задачи (2.1) содержит две прямые линии $\lambda_{1,p} \times \mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}^1 \times \lambda_{1,p}$. В спектральное множество задачи (2.2) входит также неограниченная последовательность $\{\lambda_{n,p}\}$ собственных значений, которой соответствуют точки $\{(\lambda_{n,p}, \lambda_{n,p})\}$ спектра Σ задачи (2.1). В [3] построена первая нетривиальная кривая, состоящая из точек спектра Σ задачи (2.1), проходящая через точку $\{(\lambda_{2,p}, \lambda_{2,p})\}$, где $\lambda_{2,p}$ — второе собственное значение задачи (2.2), и асимптотически выходящая на прямые $\lambda_{1,p} \times \mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}^1 \times \lambda_{1,p}$, принадлежащие Σ . Для обыкновенных дифференциальных уравнений ($N = 1$) показано [2], что спектральное множество Σ состоит из последовательности квазигипербол, проходящих по две (с учётом кратности) через каждую диагональную точку спектра $\{(\lambda_{n,p}, \lambda_{n,p})\}$.

Лемма 2.1. Операторы $A(u)$ и $B(\Lambda, u)$ удовлетворяют условиям 1° – 4° .

Доказательство. Операторы $A(u)$ и $B(\Lambda, u)$ очевидно являются положительно однородными степени однородности $p - 1$. Условия 2° и 4° леммы выполняются согласно результатам [6]. Оператор $B(\Lambda, u)$ линейно зависит от λ_+ и λ_- , поэтому он липшицев по этим аргументам. $\square$

Лемма 2.2. Функционал

$$F(\lambda_+, \lambda_-; u) \equiv \lambda_+ \|u^+\|_p^p + \lambda_- \|u^-\|_p^p - \|\nabla u\|_p^p$$

удовлетворяет условиям (F1)–(F3).

Доказательство. Функционал $F(\lambda_+, \lambda_-; u)$ удовлетворяет условию (F1) согласно [2, 6] и лемме 2.1.

Зафиксируем произвольный элемент $u \in S$. Функционал $F(\lambda_+, \lambda_-; u)$ линейно зависит от λ_+ и λ_- , значит, существует пара (λ_+, λ_-) , такая что $F(\lambda_+, \lambda_-; u) = 0$. Поэтому выполнено условия (F2).

Проверим, что функционал $F(\lambda_+, \lambda_-; u)$ удовлетворяет условию (F3). Легко видеть, что

$$F_\Lambda(\lambda_+, \lambda_-; u) = (\|u^+\|_p^p, \|u^-\|_p^p) > (0, 0)$$

для любого $u \in S_p$, откуда следует монотонность $F(\lambda_+, \lambda_-; u)$ по Λ . Лемма доказана. $\square$

Пусть $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ есть некоторая монотонно возрастающая дважды дифференцируемая функция, такая что

$$\left. \begin{aligned} f(\lambda_{1,p}) &= \lambda_{1,p}, \\ \delta \leq f' \leq C \text{ для некоторых } \delta, C > 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

С функцией $f(\lambda)$ связан путь $\gamma: \lambda \mapsto \Lambda(\lambda) \equiv (\lambda, f(\lambda))$ на плоскости (λ_+, λ_-) . В этом случае выполнение условий (Λ1)–(Λ3) очевидно благодаря условиям (2.4) на функцию $f(\lambda)$, что доказывает следующее утверждение.

Лемма 2.3. Путь $\gamma: \lambda \mapsto (\lambda, f(\lambda))$ удовлетворяет условиям (Λ1)–(Λ3). $\square$

Покажем, что соотношение $F(\Lambda(\lambda(u)), u) \equiv 0$ вида (1.2) порождает неявный функционал $\lambda(u)$, подходящий для исследования задачи (2.1).

Лемма 2.4. Соотношение

$$\lambda(u) \|u^+\|_p^p + f(\lambda(u)) \|u^-\|_p^p \equiv \|\nabla u\|_p^p \quad (2.5)$$

определяет неявный функционал $\lambda(u)$, обладающий свойствами (1.3): функция $u(x)$ является собственной функцией (2.1), соответствующей собственному значению $(\lambda_+, \lambda_-) = (\lambda(u), f(\lambda(u)))$, тогда и только тогда, когда $\lambda'(u) = 0$ (точнее, вариационная производная функционала $\lambda(u)$ имеет вид (1.4)).

Доказательство. Применяя леммы 2.1–2.3, а затем и лемму 1.1, легко убедиться, что соотношение (2.5) действительно определяет неявный функционал $\lambda(u)$. Непосредственно применяя далее теорему о неявной функции к соотношению (2.5), определяющему неявный функционал, получим выражение для вариационной производной $\lambda'(u) = -\frac{F_u}{F_\lambda}$ вида (1.4):

$$\lambda'(u) = \frac{p(-\Delta_p(u) - \lambda(u)|u|^{p-2}u^+ + f(\lambda(u))|u|^{p-2}u^-)}{\|u^+\|_p^p + f'(\lambda(u))\|u^-\|_p^p}. \quad (2.6)$$

Из условия (2.4) следует, что знаменатель выражения (2.6) не обращается в нуль на сфере S_p . Лемма доказана. $\square$

Заметим, что из определения (2.3) первого собственного значения $\lambda_{1,p}$ задачи (2.2) следует, что неявный функционал $\lambda(u)$ зависит лишь от поведения функции $f(\lambda)$ при $\lambda \geq \lambda_{1,p}$.

Отметим также, что для функционала $\lambda(u)$, определяемого соотношением (2.5), неравенство (1.5) имеет вид

$$c\|u^+\|_p^p + f(c)\|u^-\|_p^p \geq \|\nabla u\|_p^p.$$

Следующее утверждение непосредственно выводится из лемм 2.1–2.4 и доказательств теоремы 1.1.

Утверждение 2.1. *Утверждения теоремы 1.1 и её следствия верны для задачи (2.1).*

3. Задача о спектре Фучика оператора Лапласа

Положим в задаче (2.1) $p = 2$:

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda_+ u^+ + \lambda_- u^- = 0, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Как и раньше в разделе 2, $X = \dot{W}_2^1(\Omega)$ — пространство С. Л. Соболева функций $u(x)$ с нормой

$$\|\nabla u\| \equiv \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2},$$

$X^* = W_2^{-1}(\Omega)$ — сопряжённое к нему линейное пространство,

$$S = \{u \in \dot{W}_2^1(\Omega) : \|\nabla u\| = 1\} —$$

единичная сфера в X , $L = \{(\lambda_+, \lambda_-)\}$ — двумерная плоскость, линейный оператор $A = -\Delta$ является изометрическим изоморфизмом $\dot{W}_2^1(\Omega) \rightarrow W_2^{-1}(\Omega)$, нелинейный оператор B имеет вид $B(\lambda, u) \equiv \lambda_+ u^+ - \lambda_- u^-$. Всюду в дальнейшем $\|\cdot\|$ — норма в пространстве $L_2(\Omega)$.

Наряду с задачей (3.1) рассмотрим линейную задачу

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = 0, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Известно [1], что в случае граничных условий (3.2) оператор $(-\Delta)$ имеет дискретный спектр $\{\lambda_n; n \in \mathbb{N}\}$, такой что

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty.$$

В некотором смысле задача (3.1) является наиболее простой нелинейной задачей на собственные значения: линейная функция $u \mapsto \lambda u$ из задачи (3.2)

заменена здесь на кусочно-линейную функцию $u \mapsto \lambda_+ u^+ - \lambda_- u^-$, график которой состоит из двух лучей, соединённых в начале координат. Нелинейность такого типа известна как *скачкообразная нелинейность* [9].

Задача (3.1) — классическая задача о спектре Фучика. Она была поставлена и полностью решена в одномерном случае С. Фучиком в [8]. Именно, было показано, что спектр Σ задачи

$$\begin{cases} -y'' - \lambda_+ y^+ + \lambda_- y^- = 0, \\ y(0) = y(l) = 0 \end{cases}$$

состоит из семейства квазигипербол

$$\lambda_+ = 1, \quad \lambda_- = 1, \\ \frac{\sqrt{\lambda_+} \sqrt{\lambda_-}}{\sqrt{\lambda_+} + \sqrt{\lambda_-}} \in \mathbb{N}, \quad \frac{\sqrt{\lambda_+}(\sqrt{\lambda_-} - 1)}{\sqrt{\lambda_+} + \sqrt{\lambda_-}} \in \mathbb{N}, \quad \frac{(\sqrt{\lambda_+} - 1)\sqrt{\lambda_-}}{\sqrt{\lambda_+} + \sqrt{\lambda_-}} \in \mathbb{N},$$

проходящих (с учётом кратности по две) через каждую точку (n^2, n^2) спектра (в случае $l = \pi$) соответствующей линейной задачи

$$\begin{cases} -y'' - \lambda y = 0, \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Подробное изложение обобщения этих результатов на случай самосопряжённого оператора в дивергентной форме

$$Lu \equiv -\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du}{dx} \right) - a_0(x)u$$

можно найти в [5]. Важный результат о резольвентном множестве задачи (3.1) в многомерном случае ($N > 1$) был получен Е. Н. Данцером [4]. В частности, было показано, что прямые $\lambda_+ = \lambda_1$ и $\lambda_- = \lambda_1$ принадлежат спектру Σ задачи (3.1) и располагаются изолированно от остальных частей спектра. Было показано, что множества

$$\{\lambda_+ < \lambda_1; \lambda_- < \lambda_1\}, \quad \{\lambda_+ < \lambda_1; \lambda_- > \lambda_1\}, \quad \{\lambda_+ > \lambda_1; \lambda_- < \lambda_1\}$$

и «околодиагональные» квадраты

$$\{\lambda_n \leq \lambda_+, \lambda_- \leq \lambda_{n+1}; (\lambda_+, \lambda_-) \neq (\lambda_k, \lambda_k), k = n, n+1\}$$

на плоскости $\{(\lambda_+, \lambda_-)\}$, за исключением их вершин вида (λ_k, λ_k) , $k \in \{n, n+1\}$ (точки спектра задачи (3.2)), принадлежат резольвентному множеству задачи (3.1).

В [7] вариационными методами доказывается существование первой нетривиальной (т. е. содержащейся в области $(\lambda_+, \lambda_-) > (\lambda_1, \lambda_1)$) кривой спектра Фучика, монотонно убывающей, симметричной относительно диагонали $\lambda_+ = \lambda_-$ и асимптотически выходящей на прямые $\lambda_+ = \lambda_1$ и $\lambda_- = \lambda_1$.

В примере 3.1 подробно рассмотрен результат М. Шехтера [14] относящийся к прохождению спектральных кривых по квадрату $(\lambda_{m-1}; \lambda_{m+1}) \times (\lambda_{m-1}; \lambda_{m+1})$.

Пусть функция $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, как и в разделе 2, монотонно возрастающая, дважды дифференцируемая и удовлетворяет условиям (2.4): $f(\lambda_1) = \lambda_1$, $\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} f(\lambda) = \pm\infty$, $\delta \leq f'(\lambda) \leq C$ для некоторых $\delta, C > 0$. Здесь $\lambda_{1,2} \equiv \lambda_1$ — первое собственное значение задачи (3.2),

$$\lambda_1 = \inf_{u \neq 0} \frac{\|\nabla u\|^2}{\|u\|^2},$$

связанное с известным неравенством Фридрихса [1]

$$\lambda_1 \|u\|^2 \leq \|\nabla u\|^2, \quad (3.3)$$

справедливым для любого $u \in \dot{W}_2^1(\Omega)$. Как легко видеть, выбирая $\hat{f}(\lambda) \equiv \lambda$ (см. раздел 2), получим неявный функционал $\hat{\lambda}: S \rightarrow \mathbb{R}$ (заданный в данном случае явно),

$$\hat{\lambda}(u) \equiv \frac{\|\nabla u\|^2}{\|u\|^2}, \quad (3.4)$$

такой что элемент $u \in S$ является решением (3.2), отвечающим собственному значению $\lambda = \hat{\lambda}(u)$, тогда и только тогда, когда $\hat{\lambda}'(u) = 0$ (см. (2.5) при $p = 2$). Исследуем множество меньших значений $M_c(\hat{\lambda}(u))$ в предположении $\lambda_n < c < \lambda_{n+1}$ (собственные значения λ_n и λ_{n+1} не обязательно являются простыми). Обозначим через e_n решение задачи (3.2), соответствующее собственному значению λ_n и нормированное так, что $\|\nabla e_n\| = 1$. Система $\{e_n; n = 1, 2, \dots\}$ образует ортогональный базис в $\dot{W}_2^1(\Omega)$ [13]. При этом естественным образом возникает представление $\dot{W}_2^1(\Omega)$ в виде прямой суммы

$$\dot{W}_2^1(\Omega) = V^n \oplus W_n,$$

где

$$V^n \equiv \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}, \quad W_n \equiv \text{span}\{e_{n+1}, e_{n+2}, \dots\},$$

и каждый вектор $u \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ представим единственным образом в виде

$$u = v + w,$$

где $v \in V^n$, $w \in W_n$.

В силу монотонности последовательности собственных значений задачи (3.2) $\{\lambda_n; n = 1, 2, \dots\}$, а также выражения (3.4) для $\hat{\lambda}(u)$ имеют место неравенства

$$\hat{\lambda}(v) < c < \hat{\lambda}(w), \quad v, w \neq 0. \quad (3.5)$$

Теорема 3.1. Сфера $S^{n-1} = S \cap V^n$ является деформационным ретрактом [6] множества $M_c(\hat{\lambda}(u))$.

Доказательство. Зафиксируем v и w , $v \in V^n$, $w \in W_n$, такие что $v + w \in S$, т. е.

$$\|\nabla v\|^2 + \|\nabla w\|^2 = 1.$$

Рассмотрим на сфере S окружность

$$S_1(v, w) \equiv \{tv + sw; t, s \in \mathbb{R}; \|\nabla(tv + sw)\| = 1\},$$

являющуюся сечением сферы S двумерной плоскостью, порождённой векторами v и w , $S^1(v, w) = S \cap \text{span}\{v, w\}$. Для того чтобы вектор $tv + sw$, $w \neq 0$, принадлежал $S^1(v, w)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$t^2 \|\nabla v\|^2 + s^2 \|\nabla w\|^2 = 1,$$

и следовательно,

$$s^2 = \frac{1 - t^2 \|\nabla v\|^2}{\|\nabla w\|^2}. \quad (3.6)$$

Условие принадлежности $tv + sw$ множеству $M_c(\hat{\lambda}(u))$ запишется согласно (3.4) в виде

$$t^2 \|v\|^2 + s^2 \|w\|^2 \geq \frac{1}{c}.$$

Преобразуем полученное неравенство с учётом (3.6) к виду

$$t^2 \|v\|^2 + \left(\frac{1 - t^2 \|\nabla v\|^2}{\|\nabla w\|^2} \right) \|\nabla w\|^2 \geq \frac{1}{c}$$

и решим его относительно t^2 :

$$t^2 \geq \left(\frac{\frac{1}{c} - \frac{\|w\|^2}{\|\nabla w\|^2}}{\frac{\|v\|^2}{\|\nabla v\|^2} - \frac{\|w\|^2}{\|\nabla w\|^2}} \right) = \left(\frac{\frac{1}{c} - \frac{1}{\hat{\lambda}(w)}}{\frac{1}{\hat{\lambda}(v)} - \frac{1}{\hat{\lambda}(w)}} \right) \frac{1}{\|\nabla v\|^2} \equiv A.$$

Из неравенств (3.5) следует

$$0 < A \geq \frac{1}{\|\nabla v\|^2},$$

что позволяет произвести деформацию, при которой $M_c(\hat{\lambda}(u))$ стягивается на S^{n-1} , по указанным ранее окружностям $S^1(v, w)$. Теорема 3.1 доказана. $\square$

Пример 3.1. Запишем отрезок последовательности собственных значений задачи (3.2) с учётом кратностей в виде

$$\dots < \sigma_{i_{k-1}} \equiv \lambda_{k-1} < \sigma_{i_k} \equiv \lambda_k < \dots < \sigma_{i_m} \equiv \lambda_m < \sigma_{i_{m+1}} \equiv \lambda_{m+1} \leq \dots$$

при этом суммарная кратность собственных значений $\sigma_k, \dots, \sigma_m$ равна $m - k + 1$. Согласно [14] множество точек спектра задачи (3.1), находящееся в прямоугольнике $\Pi_l \equiv]\sigma_l, \sigma_{l+1}[\times]\sigma_{l-1}, \sigma_l[$, $l = 2, 3, \dots$, представляет собой две непрерывные монотонно невозрастающие линии, проходящие через точку (σ_l, σ_l) , а также, возможно, через некоторые точки, находящиеся между этими линиями. Отсюда и из результатов [4] о резольвентном множестве $\mathfrak{R}$ задачи (3.1) для любых натуральных чисел k и m , $k < m$, таких что

$$\dots \leq \lambda_{k-1} < \lambda_k \leq \dots \leq \lambda_m < \lambda_{m+1} \leq \dots,$$

существуют числа ν_k и μ_m , такие что $\nu_k < \lambda_{k-1}$, $\mu_m > \lambda_{m+1}$ и интервалы $I_k \equiv \{(\lambda_k, t); \nu_k \leq t < \lambda_{k-1}\}$ и $I^m \equiv \{(t, \lambda_m); \lambda_{m+1} < t \leq \mu_m\}$ принадлежат

тем же компонентам связности резольвентного множества $\mathfrak{R}$, что и диагональные квадраты (с удалёнными вершинами вида (λ_j, λ_j)) $[\lambda_{k-1}, \lambda_k] \times [\lambda_{k-1}, \lambda_k]$ и $[\lambda_m, \lambda_{m+1}] \times [\lambda_m, \lambda_{m+1}]$ соответственно. Пусть точки C и D таковы, что $C \in I_k$ и $D \in I^m$. Согласно теореме 3.1 множества $M(C)$ и $M(D)$ имеют различные гомотопические типы, S^{k-1} и S^{m-1} соответственно. Применяя утверждение 2.1 при $p = 2$, получим наличие точек спектра задачи (3.1) на любой непрерывной кривой, соединяющей точки C и D . При этом интерес представляют те кривые, которые проходят целиком вне прямоугольников и на которых расположены точки спектра задачи (3.1), заведомо не принадлежащие областям, рассматриваемым в [14].

В заключение заметим, что в силу очевидной симметрии спектра и резольвентного множества задачи (3.1) относительно диагонали $\lambda_+ = \lambda_-$ рассуждения, проведённые для области $\lambda_+ > \lambda_-$, могут быть полностью повторены для области $\lambda_+ < \lambda_-$.

4. Нелинейная зависимость весовой функции от спектрального параметра

Рассмотрим следующую линейную задачу на собственные значения:

$$\begin{cases} -\Delta u - \Lambda(x)u = 0, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Здесь, как и в разделе 3, $X = \dot{W}_2^1(\Omega)$, $S = \{u \in \dot{W}_2^1(\Omega) : \|\nabla u\| = 1\}$, $X^* = W_2^{-1}(\Omega)$, $L = L_\infty(\Omega)$ — пространство существенно ограниченных функций с нормой $\|v(x)\|_{L_\infty} \equiv \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |v(x)|$, $A = -\Delta$, $B(\Lambda, u) \equiv \Lambda(x)u$.

Требуется найти функции $\Lambda(\cdot) \in L_\infty(\Omega)$, при которых задача (4.1) имеет нетривиальные решения, т. е. роль спектрального параметра играют существенно ограниченные функции.

Лемма 4.1. Оператор $B(\Lambda, u)$ удовлетворяет условиям 1° – 3° .

Доказательство. Оператор $B(\Lambda, u)$ линеен и потому положительно однороден. Вложение $\dot{W}_2^1(\Omega) \subseteq W_2^1(\Omega)$ вполне непрерывно [10], значит, линейный (по u) оператор $B(\Lambda, u)$ вполне непрерывен по u , откуда следует его усиленная непрерывность (см. [11]). Лемма доказана. $\square$

Лемма 4.2. Функционал

$$F(\Lambda, u) \equiv \int_{\Omega} \Lambda(x)u^2 dx - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

удовлетворяет условиям $(F1)$ – $(F3)$.

Доказательство. Условие (F1) выполнено, поскольку функционал $F(\Lambda, u)$ линейный по Λ и квадратичный по u , следовательно, он дважды дифференцируем по обоим аргументам.

Проверим условие (F2). Фиксируем произвольный элемент $u \in S$. Ввиду линейной зависимости функционала $F(\Lambda, u)$ от Λ можно выбрать весовую функцию так, чтобы $F(\Lambda, u) = 0$.

Непосредственное вычисление производной функционала $F(\Lambda, u)$ по Λ даёт

$$F_\Lambda(\Lambda, u) = u^2 > 0 \in \Lambda_\infty(\Omega).$$

Таким образом, выполнено условие (F3). Лемма доказана. $\square$

Пусть функция $a(\lambda, x)$, удовлетворяет следующим условиям (схожими с условиями (2.4) на функцию $f(\lambda)$):

- 1) $a(\lambda, x) \in C^2(\mathbb{R}, \Lambda_\infty(\Omega))$;
- 2) $\delta < a_\lambda(\lambda, x) < C$ почти всюду в Ω для некоторых $\delta, C > 0$;
- 3) $a(\lambda, x) \rightarrow \pm\infty$ при $\lambda \rightarrow \pm\infty$ равномерно в $L_\infty(\Omega)$ по $x \in \Omega$.

При этом становится естественным и удобным для дальнейшего исследования рассмотреть задачу (4.1) в следующей постановке:

$$\begin{cases} -\Delta u - a(\lambda, x)u = 0, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

и здесь уже требуется найти значения вещественного параметра λ , при которых задача (4.2) имеет нетривиальные решения.

Если положить $a(\lambda, x) \equiv \lambda$, то задача (4.2) превращается в задачу (3.2).

Вид свойств 1)–3) функции $a(\lambda, x)$ позволяет легко получить следующее утверждение.

Лемма 4.3. Путь $\gamma: \lambda \mapsto a(\lambda, x)$ удовлетворяет условиям (Λ1)–(Λ3).

С геометрической точки зрения путь γ , определённый с помощью функции $a(\lambda, x)$, проходит в силу свойства (Λ2) вдоль поля положительных конусов в $L_\infty(\Omega)$.

Определим неявный функционал $\lambda(u): \mathring{W}_2^1(\Omega) \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}$. Соотношение (1.2) примет вид

$$\int_{\Omega} a(\lambda(u), x) u^2(x) dx \equiv \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \quad (4.3)$$

(аналогично определению (2.4)). Соотношение (4.3) однородно, поэтому определяемый им неявный функционал $\lambda(u)$ можно рассматривать лишь на сфере $S = \{u \in \mathring{W}_2^1(\Omega): \|\nabla u\| = 1\}$.

Покажем, что точная нижняя грань множества значений построенного в (4.3) неявного функционала конечна и достижима.

Лемма 4.4. Пусть функция $a(\lambda, x)$ удовлетворяет условиям 1)–3). Тогда

$$\lambda_1^a \equiv \inf \left\{ \lambda \in \mathbb{R}: \text{найдётся } u \in S, \text{ для которого} \right. \\ \left. \int_{\Omega} a(\lambda, x) u^2(x) dx = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right\} > -\infty. \quad (4.4)$$

Кроме того, точная нижняя грань в (4.4) достигается, т. е. существует элемент $u_1 \in S$, такой что

$$\int_{\Omega} |\nabla u_1(x)|^2 dx = \int_{\Omega} a(\lambda_1^a, x) u_1^2(x) dx.$$

Доказательство. Обозначим

$$N_c \equiv \left\{ u \in S: \int_{\Omega} a(c, x) u^2(x) dx \geq \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right\}.$$

Из равномерного стремления функции $a(\lambda, x)$ к $(+\infty)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ (условие 3)) следует, что множество N_c будет непустым для достаточно больших значений c .

Далее, из неравенства Фридрихса (3.3), а также из равномерного стремления функции $a(\lambda, x)$ к $(-\infty)$ при $\lambda \rightarrow -\infty$ (условие 3)) следует существование числа λ_* , такого что $a(\lambda_*, x) < \lambda_1$ для п. в. $x \in \Omega$. Сопоставляя равенство из (4.4) при $c = \lambda_*$ с неравенством Фридрихса (3.3), получим первое утверждение (4.4) леммы 4.4.

Докажем утверждение второй части леммы. Множество N_c , как было показано, является непустым для достаточно больших c . Ясно также, что оно является замкнутым. Вложение множеств $N_{c_1} \subseteq N_{c_2}$ при $c_1 \leq c_2$ имеет место в силу монотонности функции $a(\lambda, x)$ по λ (условие 1)). Поэтому с монотонно убывающей последовательностью $\{\lambda^{(n)}, n = 1, 2, \dots\}$, такой что $\lambda_1^a = \inf_{n=1,2,\dots} \{\lambda^{(n)}\}$, связана следующая последовательность вложений замкнутых множеств:

$$\dots \subseteq N_{\lambda^{(n)}} \subseteq \dots \subseteq N_{\lambda^{(2)}} \subseteq N_{\lambda^{(1)}}.$$

Согласно принципу вложенных замкнутых множеств, являющемуся обобщением принципа Кантора [11], предельное множество $\lim_{n \rightarrow \infty} N_{\lambda^{(n)}}$ окажется непустым, т. е. существует элемент $u_1 \in S$, такой что

$$\int_{\Omega} |\nabla u_1(x)|^2 dx \leq \int_{\Omega} a(\lambda_1^a, x) u_1^2(x) dx.$$

Заметим, что из определения λ_1^a и непрерывности по λ функции $a(\lambda, x)$ (вытекающей из свойства 1)) следует, что последнее нестрогое неравенство является равенством. Вторая часть утверждения леммы 4.4 доказана. $\square$

Как и в разделе 2, заметим, что из соотношения (4.3) следует, что на определение неявного функционала $\lambda(u)$ оказывает влияние лишь поведение функции

$a(\lambda, x)$ при $\lambda \geq \lambda_1^a$, где λ_1^a — первое собственное значение задачи (4.2), определённое в лемме 4.5.

Следующее утверждение устанавливает связь между построенным неявным функционалом $\lambda(u)$ и задачей (4.2).

Лемма 4.5. Соотношение (4.3) определяет неявный функционал $\lambda(u) \in C^2(S, \mathbb{R}^1)$, для которого выполнено свойство (1.3): функция является собственной функцией задачи (4.2), соответствующей собственному значению $\lambda(u)$, тогда и только тогда, когда $\lambda'(u) = 0$.

Доказательство. Корректность определения неявного функционала следует из лемм 4.1–4.3 и леммы 1.1. Из того, что вложение $\dot{W}_2^1(\Omega) \subseteq W_2^{-1}(\Omega)$ вполне непрерывно, следует непрерывность линейного отображения $u \mapsto 2a(\lambda, x)u$, рассматриваемого как оператор $\dot{W}_2^1(\Omega) \rightarrow W_2^{-1}(\Omega)$, значит, существует производная по Фреше вида

$$\frac{\delta}{\delta u} \int_{\Omega} a(\lambda, x) u^2(x) dx = 2a(\lambda, x)u.$$

Применяя далее хорошо известную теорему о неявной функции к соотношению (4.3), определяющему неявный функционал $\lambda(u)$, и пользуясь условием 1°, получим выражение для вариационной производной $\lambda'(u) = -\frac{F_{\lambda}}{F_u}$ в виде (1.4):

$$\lambda'(u) = \frac{2(-\Delta u - a(\lambda(u), x)u)}{\int_{\Omega} \frac{\partial a(\lambda(u), x)}{\partial \lambda} u^2(x) dx}. \quad (4.5)$$

Из условия (Λ2) следует, что знаменатель в правой части (4.5) не обращается в нуль на сфере S . Справедливость второго утверждения вытекает из сопоставления уравнения (4.2) с видом (4.5) вариационной производной $\lambda'(u)$ неявного функционала $\lambda(u)$. Лемма доказана. $\square$

Следствие 1 лемм 4.4 и 4.5. Функция $u_1(x)$ (определённая в лемме 4.4) является знакопостоянной собственной функцией задачи (4.2), отвечающей первому собственному значению λ_1^a .

Доказательство. Из леммы 4.4 следует, что неявный функционал $\lambda(u)$ достигает минимума в точке $u_1 \in S$. Из вида (4.5) вариационной производной $\lambda'(u)$ вытекает, что u_1 есть решение задачи на собственные значения (4.2), соответствующее первому собственному значению λ_1^a . Предположим, что функция $u_1(x)$ знакопеременная, т. е. $u_1^+ \not\equiv 0$ и $u_1^- \not\equiv 0$. Из вариационного определения λ_1^a (4.4) следует, что имеют место следующие равенства:

$$\int_{\Omega} a(\lambda_1^a, x) (u_1^{\pm})^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla(u_1^{\pm})|^2 dx \quad (4.6)$$

(действительно, ввиду минимальности определённого в (4.4) значения λ_1^a знак $>$ в соотношениях (4.6) невозможен, а появление знака $<$ сразу приводит к неравенству

$$\int_{\Omega} a(\lambda_1^a, x)(u_1)^2 dx < \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 dx,$$

которое противоречит определению (4.4)). Но тогда из равенств (4.6) и вариационного определения (4.4) первого собственного значения следует, что функции u_1^+ и u_1^- являются обобщёнными решениями линейной задачи (4.2), т. е. удовлетворяют уравнению $L_a v = 0$, где $L_a \equiv \Delta + a(\lambda_1^a, x)$. Оператор L_a удовлетворяет условиям теоремы Харнака. Но функции u_1^+ и u_1^- равны тождественно нулю на множествах $\Omega_+ \equiv \{x \in \Omega: u(x) < 0\}$ и $\Omega_- \equiv \{x \in \Omega: u(x) > 0\}$ соответственно, что приводит к очевидному противоречию со следующей оценкой (неравенством Харнака):

$$\sup_{\Omega'} v \leq C \inf_{\Omega'} v, \quad v = u_1^{\pm}, \quad \Omega' \subset \Omega, \quad C > 0$$

(при надлежащем выборе Ω' , при котором $v(x_1) > 0$ и $v(x_2) = 0$ для некоторых $x_{1,2} \in \Omega'$). Это означает, что функция $u_1(x)$ является знакоопределённой в области Ω , например $u_1(x) > 0$, $x \in \Omega \setminus \partial\Omega$. Следствие доказано. $\square$

Следствие 2 лемм 4.4 и 4.5. Первое собственное значение λ_1^a задачи (4.2) является простым.

Доказательство. Предположим, от противного, что существуют два линейно независимых решения $u_1^{(1)}$ и $u_1^{(2)}$ задачи (4.2), отвечающих собственному значению λ_1^a . Легко видеть, что тогда можно выбрать постоянные α_1 и α_2 , такие что линейная комбинация $w_1 = \alpha_1 u_1^{(1)} + \alpha_2 u_1^{(2)}$ окажется знакопеременной, $w_1^+ \not\equiv 0$ и $w_1^- \not\equiv 0$. С другой стороны, функция $w_1(x)$ является собственной функцией задачи (4.2), отвечающей собственному значению λ_1^a ,

$$\begin{cases} -\Delta w_1 - a(\lambda_1^a, x)w_1 = 0, & x \in \Omega, \\ w_1|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

что противоречит утверждению следствия 1 лемм 4.4 и 4.5 о знакоопределённости собственной функции, соответствующей первому собственному значению. Следствие 2 лемм 4.4 и 4.5 доказано. $\square$

Из леммы 1.2 следует, что множество меньших значений $M_c(\lambda(u))$ неявного функционала $\lambda(u)$ задаётся неравенством

$$\int_{\Omega} a(c, x)u^2 dx \geq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

Более того, из следствия леммы 1.2 следует, что для любой функции $\Lambda(x)$ из $L_{\infty}(\Omega)$ неравенство

$$\int_{\Omega} \Lambda(x)u^2 dx \geq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad (4.7)$$

определяет множество меньших значений точки $M(\Lambda)$, совпадающее с множеством меньших значений $M_c(\lambda(u))$ неявного функционала $\lambda_a(u)$, порождённого

функцией $a(\lambda, x)$, такой что $a(c, x) = \Lambda(x)$. Последнее утверждение позволяет говорить о пространстве $\Lambda_\infty(\Omega)$ как о бифуркационной диаграмме задачи (4.1).

Утверждение 4.1. Теорема 1.1 и её следствие справедливы для задачи (4.1).

Утверждение является следствием лемм 4.1—4.3, 4.5, а также утверждений раздела 1.

Пример 4.1. Предложенный подход позволяет в некоторых случаях установить наличие точек спектра задачи на собственные значения (4.1), основываясь на топологических характеристиках некоторых точек резольвентного множества. Хорошо известно [1], что для задачи на собственные значения с весовой функцией и линейным вхождением спектрального параметра λ

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda \rho(x)u = 0, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (4.8)$$

где $\rho(x) \in L_\infty(\Omega)$, $\rho(x) > 0$ для п. в. $x \in \Omega$, имеется (так же как и для рассмотренной ранее задачи (3.2) с весовой функцией $\rho(x) \equiv 1$) бесконечное множество собственных значений $C_p \equiv \{\lambda_n^p; n \in \mathbb{N}\}$, таких что

$$0 < \lambda_1^p < \lambda_2^p \leq \lambda_3^p \leq \dots \leq \lambda_n^p \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^p \equiv +\infty.$$

Соответствующие собственные функции $e_n^p(x)$ образуют ортогональную систему векторов. Неявный функционал для задачи (4.8) имеет явное выражение

$$\lambda_p(u) = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega \rho(x) u^2 dx},$$

и множество его критических значений совпадает с C_p .

Теорема 3.1 может быть обобщена на случай весовой функции $\rho(x)$ в задаче (4.8). Пусть $\lambda_n^p < c < \lambda_{n+1}^p$ для некоторого натурального n . Тогда в обозначениях раздела 3 получим следующее утверждение.

Теорема 4.1. Сфера $S^{n_1} = S \cap V^n$ является деформационным ретрактом множества $M_c(\lambda_p(u))$, где $V^n \equiv \text{span}\{\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p\}$.

Рассмотрим два неколлинеарных элемента $\rho_{1,2}(x) \in L_\infty(\Omega)$, $\rho_{1,2}(x) > 0$ для п. в. $x \in \Omega$. Каждой весовой функции $p_i(x)$, $i = 1, 2$, соответствует последовательность собственных значений $\{\lambda_n^{p_i}; n \in \mathbb{N}\}$. Зафиксируем натуральные числа k и m , $k \neq m$, и числа c_1 и c_2 , такие что

$$\lambda_k^{p_1} < c_1 < \lambda_{k+1}^{p_1}, \quad \lambda_m^{p_2} < c_2 < \lambda_{m+1}^{p_2}. \quad (4.9)$$

Обозначим $\Lambda_1(x) \equiv c_1 \rho_1(x)$ и $\Lambda_2(x) \equiv c_2 \rho_2(x)$.

Утверждение 4.2. На любом непрерывном пути в $L_\infty(\Omega)$, соединяющем $\Lambda_1(x)$ и $\Lambda_2(x)$, имеются точки спектра задачи (4.1).

Доказательство. Из (4.9) и теоремы 3.1, применённой к задаче (4.8), следует, что точки $\Lambda_1(x)$ и $\Lambda_2(x)$ принадлежат резольвентному множеству задачи (4.8), причём множества $M(\Lambda_1)$ и $M(\Lambda_2)$ гомотопически неэквивалентны,

$$M(\Lambda_1) \approx S^{k-1} \not\approx S^{m_1} \approx M(\Lambda_2).$$

Тогда в силу следствия теоремы 1.1 на любой непрерывной кривой, соединяющей точки $\Lambda_1(x)$ и $\Lambda_2(x)$ в $L_\infty(\Omega)$, имеются точки спектра задачи (4.8). Утверждение доказано. $\square$

Литература

- [1] Courant R., Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*. — New York: Interscience, 1962.
- [2] Cuesta M. On the Fučík spectrum of the Laplacian and the p -Laplacian // *Seminar in Differential Equations*. Kvilda. May 29–June 2, 2000. *Proc. of the Seminar*. — Univ. of West Bohemia in Pilsen. — P. 65–96.
- [3] Cuesta M., de Figueiredo D., Gossez J.-P. The beginning of the Fučík spectrum for the p -Laplacian // *J. Differential Equations*. — 1999. — Vol. 159, No. 1. — P. 212–238.
- [4] Dancer E. N. On the Dirichlet problem for weakly non-linear elliptic partial differential equations // *Proc. Roy. Soc. Edinburg. Sect. A*. — 1977. — Vol. 76. — P. 283–300.
- [5] Dràbek P. *Solvability and Bifurcations of Nonlinear Equations*. — Harlow: Longman Scientific and Technical; New York: John Wiley and Sons, 1992. — (Pitman Research Notes Math.; Vol. 264).
- [6] Dràbek P., Robinson S. Resonance problem for the p -Laplacian // *J. Funct. Anal.* — 1999. — Vol. 169, no. 1. — P. 189–200.
- [7] De Figueiredo D. G., Gossez J.-P. Sur la première courbe du spectre de Fučík d'un opérateur elliptique // *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I*. — 1993. — Vol. 316. — P. 1295–1298.
- [8] Fučík S. Boundary value problems with jumping nonlinearities // *Cas. Pest. Mat.* — 1976. — Vol. 101. — P. 69–87.
- [9] Fučík S., Kufner A. *Nonlinear Differential Equations*. — Amsterdam: Elsevier Science, 1980. — (Stud. Appl. Mech.; Vol. 2).
- [10] Gajevski H., Gröger K., Zacharias K. *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operator-differentialgleichungen*. — Berlin: Akademie, 1974. — (Math. Monograph.; Bd. 38).
- [11] Gilbarg D., Trudinger N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. — Berlin: Springer, 1983.
- [12] Lindqvist P. On the equation $\operatorname{div}(|\nabla|^{p-2}\nabla u) + \lambda|u|^{p-2}u = 0$ // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1990. — Vol. 109, no. 1. — P. 157–164. Addendum: *ibid.* — 1992. — Vol. 116, no. 2. — P. 583–584.
- [13] Palais R. S. Lusternik–Schnirelman theory on Banach manifolds // *Topology*. — 1966. — Vol. 5. — P. 115–132.
- [14] Schechter M. The Fučík spectrum // *Indiana Univ. Math. J.* — 1994. — Vol. 43. — P. 1139–1157.