Принцип аргумента и теорема Руше — топологическая версия*

Е. Г. СКЛЯРЕНКО
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 515.165

Ключевые слова: обобщённый принцип аргумента, области в комплексных многообразиях, голоморфные отображения, форма Мартинелли—Бохнера, дифференциальная форма телесного угла.

Аннотация

В заметке вскрывается топологическая природа известных в многомерном комплексном анализе обобщений классического принципа аргумента. Предлагаемый топологический подход даёт возможность получить более полные результаты о строении множеств полюсов и нулей голоморфных отображений ограниченных областей в комплексных многообразиях. Обнаруживаются связи с интегральными представлениями голоморфных функций, даётся геометрическая интерпретация овеществления комплекснозначной дифференциальной формы Мартинелли—Бохнера.

Abstract

E. G. Sklyarenko, A topological version of the argument principle and Rouche's theorem, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 5, pp. 209—223.

In this paper, the topological nature of the well-known in multidimensional complex analysis generalization of the classic argument principle is discussed. The topological approach offered here, ensures some topological results on the structure of pole and zero sets of holomorphic maps of bounded domains in complex manifolds. Some connections with integral representations of holomorphic functions are studied and a geometric interpretation of the Martinelli–Bochner complex-valued differential-form realization is given.

Интеграл от комплексной функции по замкнутому контуру — это фактически интеграл от комплекснозначной дифференциальной формы степени 1, замкнутой в силу условий Коши—Римана и потому определяющей некоторый класс одномерных когомологий области определения функции. Отправляясь от этой идеи, Иверсен [9] нашёл обобщение классической теоремы Коши о вычетах на случай интегрирования замкнутых комплекснозначных дифференциальных форм по образам гладких отображений $F\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ сферы в евклидово пространство.

Поскольку изолированные особенности — явление, типичное для комплексных функций одного аргумента, результат [9] по своей природе должен быть

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00705, и гранта «Университеты России» № 5407.

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 5, с. 209—223.

чисто топологическим. Близкий результат, но относящийся как раз к теории вычетов замкнутых дифференциальных форм на комплексном многообразии, имеющих особенности на аналитических множествах, представляет собой, например, предложение 13.1 в [1], но оно касается интегрирования по всем циклам, окружающим особенности. О топологичности результата [9] свидетельствует и его формулировка, использующая локальные степени F и соотношения между определяемыми интегрированиями классами когомологий с комплексными коэффициентами, а также то, что несмотря на употребление комплексной терминологии никакой дополнительной структуры на S^{n-1} или $\mathbb{R}^n$ не предполагается. Окончательная топологическая версия результата [9], использующая когомологии (или гомологии) с любыми постоянными коэффициентами, была дана в [5]. Она касается отображений в $\mathbb{R}^n$ любых замкнутых ориентируемых $(n-1)$-мерных топологических многообразий.

В настоящей работе аналогичные идеи и средства применяются для топологической интерпретации принципа аргумента — теоремы о том, что приращение аргумента значений комплексной функции $f(z)$ вдоль границы области W её определения совпадает с умноженной на 2π разностью между числом нулей и числом полюсов $f(z)$ в W (учитываемых вместе с их кратностями и порядками). Как и в [5], окончательная чисто топологическая версия указанной теоремы связана лишь со свойствами непрерывных отображений топологических многообразий в $\mathbb{R}^n$, но, в отличие от [5,9], самостоятельный интерес она представляет и для голоморфных отображений в комплексное пространство $\mathbb{C}^m$ комплексных многообразий.

1. Основные результаты

Пусть W — компактное связное ориентируемое топологическое многообразие размерности $n \geqslant 2$ с краем $\Gamma = \partial W$, $M_1, \ldots, M_k$ — все компоненты края, $k \geqslant 1$. Пусть 0 и θ — пара диаметрально противоположных точек сферы S^n и $F\colon W \to S^n$ — непрерывные отображения, для которого $F(\Gamma) \subset \Sigma$, где Σ — дополнение к точкам 0 и θ. Точку $A \in W$ назовём нулём отображения F, если $F(A) = 0$, полюсом, если $F(A) = \theta$. Пусть $N = F^{-1}(0)$ и $P = F^{-1}(\theta)$ — множества нулей и полюсов отображения F.

Для замкнутого множества A в топологическом пространстве X пусть

$$H^q\langle A\rangle = \varinjlim\{H^q(UA \setminus A)\} —$$

когомологии окружения A в X (предел по всем окрестностям UA множества A). Это определение обсуждается перед предложением 7.1 в [6]. Для любого подпространства $Y \subset X$, для которого $A \subset \operatorname{Int} Y$, точная последовательность (7.5) в [6] обеспечивает точную последовательность

$$\ldots \to H^q(A) \to H^q\langle A\rangle \xrightarrow[\delta(A)]{} H^{q+1}(Y, Y \setminus A) \to H^{q+1}(A) \to \ldots . \qquad (1)$$

Для $A \subset \operatorname{Int} W$ имеется индуцированный включениями гомоморфизм

$$H^{q+1}(W, W \setminus A) \to H^{q+1}(W, \partial W) = H_c^{q+1}(\operatorname{Int} W).$$

Его композиция с $\delta(A)$ определяет преобразование

$$\delta(A)_W \colon H^q\langle A\rangle \to H_c^{q+1}(\operatorname{Int} W).$$

Ниже оно будет использоваться для $q = n - 1$.

Считаем, что многообразия W и S^n ориентированные, а экваториальная сфера $S^{n-1} \subset \Sigma$ снабжена ориентацией, индуцированной её включением в качестве края в ту из полусфер, которая содержит $0 \in S^n$. Заметим, что для когомологий с целочисленными коэффициентами

$$H^{n-1}(S^{n-1}) = H^{n-1}(\Sigma) = Z = H_c^n(\operatorname{Int} W).$$

Для $A = N$ имеется редуцированный F-гомоморфизм

$$(F \restriction N)^* \colon H^{n-1}(\Sigma) \to H^{n-1}\langle A\rangle.$$

Пусть $d(N)$ — образ $1 \in Z = H^{n-1}(\Sigma)$ в группе $Z = H_c^n(\operatorname{Int} W)$ при гомоморфизме $\delta(N)_W(F \restriction N)^*$. Будем называть $d(N)$ алгебраическим числом нулей отображения F. Алгебраическим числом $d(P)$ полюсов отображения F будем называть образ $-1 \in Z = H^{n-1}(\Sigma)$ при композиции $\delta(P)_W(F \restriction P)^*$. Поправка в знаке объясняется тем, что сферу S^{n-1} в этом случае естественно рассматривать в ориентации, индуцированной её включением в полусферу, содержащую θ. Термин «алгебраическое число точек» оправдан тем, что в случае конечных множеств для любой отдельной точки A любого из них $\delta(A)$ — изоморфизм группы $H^n(W, W \setminus A)$ и соответствующее алгебраическое число есть число точек множества, засчитываемых вместе с их «кратностями» или «порядками» — локальными степенями отображения F.

Считаем, что ориентации подмногообразий $M_i \subset \partial W$ обычным образом индуцированы ориентацией W. Так как S^{n-1} — деформационный ретракт Σ, определены степени d_i ограничений F на M_i.

Теорема 1.1 (обобщённый принцип аргумента).

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = d(N) - d(P).$$

Пусть A — одно из множеств N или P. Распадению A в несвязное объединение

$$A = A_1 \cup A_2$$

отвечает распадение в прямую сумму

$$H_q\langle A\rangle = H^q\langle A_1\rangle \oplus H^q\langle A_2\rangle$$

когомологий окружения и, как следствие, разложение в сумму

$$d(A) = d(A_1) + d(A_2)$$

соответствующего алгебраического числа. Числа $d(A_i)$ естественно считать алгебраическими числами точек отображения F вблизи A_i. Их геометрический смысл выясняется в предложении 2.3 для связных A_i. В общем случае такие разложения $d(A)$ не однозначны. Однозначное разложение

$$d(A) = \sum_j d(A_j)$$

возникает в случае, когда A — конечное объединение своих связных компонент. Такая ситуация возникает для отображений комплексных многообразий W размерности m, голоморфных в $\operatorname{Int} W \setminus P$, в комплексное пространство $\mathbb{C}^m$ (см. раздел 3). Теорема 1.1 превращается, очевидно, в естественное многомерное обобщение классического принципа аргумента. При этом под отображениями W в $\mathbb{C}^m$ (или в $\mathbb{R}^n$) условимся понимать ограничения на $W \setminus P$ отображений $F\colon W \to S^n$, где $n = 2m$ и $P = F^{-1}(\infty) \subset \operatorname{Int} W$, при естественном отождествлении S^n с компактификацией пространства $\mathbb{C}^m$ (или $\mathbb{R}^n$) точкой ∞.

Считая, что пространство $\mathbb{R}^n$ снабжено какой-то нормой, через $|A|$ будем обозначать норму вектора $\overline{OA}$. Пусть F_1 — такое же, как F, отображение. Классическая теорема Руше в её сути есть частный случай следующего утверждения.

Предложение 1.2. *При условии, что*

$$|F_1(A) - F(A)| < |F(A)|$$

для всех точек $A \in \Gamma = \partial W$, множество $F_1(\Gamma)$ также содержится в $\mathbb{R}^n \setminus 0$, а фигурирующие в теореме 1.1 *числа d_i одинаковы для F_1 и F.*

Доказательство. Включение $F_1(\Gamma) \subset \mathbb{R}^n \setminus 0$ обеспечивается тем, что из $|F(A)| \neq 0$ и условия предложения следует $|F_1(A)| \neq 0$, так что степени d_i определены и для F_1. Условие справедливо на Γ при $0 \leqslant t \leqslant 1$ и для отображений $F_t = F + t(F_1 - F)$, поскольку

$$|F_t(A) - F(A)| = t|F_1(A) - F(A)| \leqslant |F_1(A) - F(A)|.$$

Поэтому $F_t(\Gamma) \subset \mathbb{R}^n \setminus 0$. Таким образом, F_t — гомотопия между отображениями $F, F_1\colon \Gamma \to \mathbb{R}^n \setminus 0$. □

В форме, использующей координатные соотношения между значениями F и F_1 на Γ, обобщения теоремы Руше даны в [1, теорема 2.5, замечание к ней]. Теорема удобна в рассуждениях, использующих малые изменения отображений [1]. Во всех случаях достаточно, очевидно, наличия гомотопии между F и F_1 на Γ.

В частном случае, когда $W \subset \mathbb{C}^m$ (т. е. когда отображаются ограниченные области комплексного пространства), множество нулей F конечно (хотя бы в силу [3, глава III, п. B, следствие 17]). При $m \geqslant 2$ голоморфные отображения не могут иметь особенностей не только изолированных, но и сосредоточенных внутри кубических окрестностей в картах многообразия, на множествах нулей любых голоморфных функций и некоторых других (см. [3, глава I, п. C]). Поэтому (в том числе в частном случае $W \subset \mathbb{C}^m$) даваемое в работе описание множества P полюсов отображения F не может быть усилено.

Для отображений без особенностей (т. е. при $P = \varnothing$) результат может трактоваться как оценка числа компонент множества нулей. Он рассматривался ранее только для отображений ограниченных областей $W \subset \mathbb{C}^m$ (см. конец раздела 3) и доказывался средствами комплексного анализа, в том числе с использованием справедливого для таких областей W интегрального представления Мартинелли—Бохнера голоморфных функций. Число $d = \sum d_i$ определялось как результат интегрирования по ∂W обратного образа при F некоторой специальной комплекснозначной дифференциальной формы $\tilde{\omega}$ — формы Мартинелли—Бохнера, определяемой аналитическим путём в теории представлений функций.

Понятно, что для гладких F суммарная степень d отображения края ∂W может быть вычислена интегрированием по ∂W обратного образа при проекции F на единичную сферу $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ дифференциальной формы ω_0 ориентированного объёма S^{n-1}. Проще, однако, применять определяемую в разделе 4 $(n-1)$-форму ω ориентированного телесного угла в $\mathbb{R}^n$ (близкая в смысловом значении форма, определяющая образующую в когомологиях $\mathbb{R}^n \setminus 0$, называется в [2, § 6] угловой и используется для одной из интерпретаций класса Тома векторного расслоения). Преимущество ω по сравнению с ω_0 состоит в простоте записи в стандартных координатах пространства $\mathbb{R}^n$. При этом

$$d_i = \frac{1}{\theta(n)} \int\limits_{M_i} F^*\omega,$$

где $\theta(n)$ — объём S^{n-1} (полный телесный угол в $\mathbb{R}^n$).

В разделе 4 показывается, что в результате овеществления форма $\tilde{\omega}$ превращается в $\frac{1}{\theta(2m)}\omega + i\omega'$, где ω' — некоторая точная форма. Это означает, что использование $\tilde{\omega}$ для вычисления d даёт тот же результат. Следствием (теорема 4.4) оказывается и само интегральное представление Мартинелли—Бохнера (доказываемое обычно с помощью разложений голоморфных функций в степенные ряды).

2. Общий случай теоремы

Пусть $W_0 = W \setminus (N \cup P)$. Короткой точной последовательности коцепных комплексов

$$0 \to C_c^*(W_0 \setminus \partial W) \to C^*(W_0) \to C^*(W_0)/C^*(W_0 \setminus \partial W) \to 0$$

отвечает точная последовательность когомологий

$$\ldots \to H_c^{n-1}(W_0, \partial W) \to H^{n-1}(W_0) \to$$
$$\to \left\{ \bigoplus_i H^{n-1}(M_i) \right\} \oplus H^{n-1}\langle N \rangle \oplus H^{n-1}\langle P \rangle \underset{\delta_0}{\longrightarrow} H_c^n(W_0, \partial W) \to \ldots \qquad (\oplus)$$

(убедиться в этом можно, представляя $\operatorname{Int} W_0 = W_0 \setminus \partial W$ как объединение последовательности возрастающих открытых множеств, имеющих компактные замыкания, представляя соответственно этому $C_c^*(W_0 \setminus \partial W)$, а всю короткую точную последовательность комплексов представляя как соответствующее представление $C^*(W_0 \setminus \partial W)$ прямым пределом).

Пусть
$$j_*\colon H_c^n(W_0, \partial W_0) \to H^n(W, \Gamma) \text{ —}$$
гомоморфизм, индуцированный включением $W_0 \subset W$. Выясним структуру композиции $j_*\delta_0$.

Для каждого из многообразий $M_i \subset \partial W_0 = \partial W$ отображение
$$j_*\delta_0 = \delta\colon H^{n-1}(M_i) \to H_c^n(\operatorname{Int} W) = Z \text{ —}$$
обычный связывающий гомоморфизм в когомологической последовательности пары $(\operatorname{Int} W \cup M_i, M_i)$ (см., например, [4, теорема 1.6, п. (2)]).

Лемма 2.1. *Для каждого $i = 1, \ldots, k$ преобразование*
$$\delta = j_*\delta_0\colon H^{n-1}(M_i) \to H_c^n(\operatorname{Int} W)$$
является изоморфизмом.

Доказательство. Пусть U — такое открытое множество в $\operatorname{Int} W \cup M_i$, что $U' = U \cap M_i$ — открытый $(n-1)$-мерный шар, а само U гомеоморфно половине n-мерного открытого шара с $(n-1)$-мерным экваториальным диском. Так как когомологии H_c^* изоморфны (приведённым) когомологиям одноточечной компактификации пространства (см., например, [4, теорема 2.8]), а такая компактификация U есть n-мерный шар, связывающий гомоморфизм
$$H_c^{n-1}(U') \to H_c^n(U, U') = H_c^n(U \setminus U')$$
в когомологиях пары (U, U') — изоморфизм. Включение
$$(U, U') \subset (\operatorname{Int} W \cup U', U')$$
индуцирует отображение когомологических последовательностей этих пар с изоморфизмом
$$H_c^n(U \setminus U') \to H_c^n(\operatorname{Int} W)$$
(см. [4, теорема 3.21]), поэтому изоморфизмом является и связывающий гомоморфизм
$$H_c^{n-1}(U') \to H_c^n(\operatorname{Int} W).$$
Наконец, с учётом включения
$$(\operatorname{Int} W \cup U', U') \subset (\operatorname{Int} W \cup M_i, M_i)$$
утверждение леммы — следствие [4, теорема 1.6, п. (4)]. $\square$

Пусть A — одно из множеств N или P и $\delta(A)_W$ — преобразование, определённое в разделе 1.

Лемма 2.2. *На прямом слагаемом $H^{n-1}\langle A\rangle$ имеет место соотношение*

$$j_*\delta_0 = -\delta(A)_W.$$

Доказательство. Пусть UA — некоторая окрестность A. Помимо точной последовательности (1), когомологическая последовательность (7.5) из [6] даёт «симметричную» по отношению к (1) точную последовательность

$$\ldots \to H^q\langle A\rangle \xrightarrow[\delta_2(A)]{} H_c^{q+1}(Y, A) \to H_{c\cap(Y\setminus A)}^{q+1}(Y\setminus A) \to \ldots. \tag{2}$$

Здесь c — семейство компактных множеств в подпространстве Y; группы $H^q\langle A\rangle$ определяются при переходе к пределу группами

$$H^q_{c\cap(UA\setminus A)}(UA\setminus A) = H^q(UA\setminus A).$$

Когомологическая последовательность (7.4) из [6] превращается в рассматриваемой ситуации в точную последовательность

$$\ldots \to H^q\langle A\rangle \to H^{q+1}(Y, Y\setminus A) \oplus H_c^{q+1}(Y, A) \to H_c^{q+1}(Y) \to \ldots. \tag{3}$$

Определяющие эти точные последовательности коцепные комплексы, конструируемые средствами теории пучков, таковы, что имеется естественное преобразование последовательности (1) в (3) и, в свою очередь, (3) в (2), в силу чего связывающий гомоморфизм в (3) совпадает с $\delta(A)\oplus\delta_2(A)$. Пусть j_1, j_2 — включения в $Y = U_0A$ множеств A и $U_0A\setminus A$. Из сказанного имеем гомоморфизм

$$j_{1*}\delta(A) = -j_{2*}\delta_2(A)\colon H^{n-1}\langle A\rangle \to H_c^n(U_0A).$$

Конструкции в [6] естественны по отношению к включениям U_0A в $\operatorname{Int} W$. Лемма доказана. □

Пусть $F^*_\oplus$ — индуцированный F гомоморфизм группы $Z = H^{n-1}(\Sigma)$ в прямую сумму, содержащуюся в последовательности ($\oplus$). В силу лемм 2.1 и 2.2

$$j_*\delta_0 F^*_\oplus(1) = \sum_i d_i - d(N) + d(P).$$

Этот элемент равен нулю: так как $F^*_\oplus$ накрывается отображением

$$H^{n-1}(\Sigma) \to H^{n-1}(W_0),$$

то $\delta_0 F^*_\oplus = 0$. Это означает справедливость утверждения теоремы 1.1.

Числа $d(N)$ и $d(P)$ могут быть определены ещё и следующим образом, удобным для выяснения их связи с локальным строением F. Для малой шарообразной окрестности $\mathcal{O}$ нуля 0 (или полюса θ) сферы S^n изоморфизм

$$H^{n-1}(\mathcal{O}\setminus 0) \to H^n(\mathcal{O}, \mathcal{O}\setminus 0)$$

переводит $1 \in Z = H^{n-1}(\Sigma)$ в $1 \in Z = H^n(S^n)$ (для θ при той же ориентации $\mathcal{O}\setminus\theta$, что и у $\Sigma \sim S^{n-1}$, — отрицательную единицу -1 в 1). Определяющий

$d(N)$ гомоморфизм $\delta(N)_W(F \restriction N)^*$ может быть заменён (с учётом вырезаний и естественности связывающих гомоморфизмов) композицией

$$Z = H^n(\mathcal{O}, \mathcal{O} \setminus 0) \xrightarrow{F^*} H^n(W, W \setminus N) \to H^n_c(\operatorname{Int} W).$$

Заменой 0 на θ получается композиция, определяющая $d(P)$. Отображение F^* естественно по отношению к расщеплениям $H^n(W, W \setminus N)$ в прямые суммы, отвечающие распадениям N в конечные несвязные объединения (аналогично для P).

Пусть A — связная компонента множества N или P, UA — достаточно тесная окрестность A, $\mathcal{O}$ — шарообразная окрестность 0 (или θ), не пересекающаяся с компактным множеством $F(\partial UA)$, $\mathcal{M}$ — содержащая A связная компонента множества $F^{-1}(\mathcal{O})$. Для любого компактного множества $C \subset \mathcal{O}$ множество $F^{-1}(C) \cap \mathcal{M}$ замкнуто в $\mathcal{M}$ и не может иметь предельных точек в $\partial\mathcal{M}$, поэтому ограничение $F \restriction \mathcal{M}$ отображения F является собственным. Следовательно, определена его степень $\deg(F \restriction \mathcal{M})$.

Предложение 2.3. *Для связных компонент A (в N или P) $d(A) = \deg(F \restriction \mathcal{M})$.*

Доказательство. Пусть

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \supset \mathcal{M}_2 \supset \ldots -$$

последовательность связных окрестностей множества A, вписанных друг в друга с замыканиями, для которых

$$A = \bigcap_j \mathcal{M}_j.$$

В соответствии с [8, теорема 1] возникает точная последовательность

$$0 \to \varprojlim_j{}^1 \{H^{n-1}_c(\mathcal{M}_j)\} \to H^n(W, W \setminus A) \to \varprojlim_j \{H^n_c(\mathcal{M}_j)\} \to 0.$$

Группы $H^n_c(\mathcal{M}_j)$ канонически изоморфны $Z = H^n_c(\operatorname{Int} W)$, поэтому число $d(A)$, определяемое исходя из гомоморфизма

$$H^n(\mathcal{O}, \mathcal{O} \setminus 0) \to H^n(W, W \setminus A),$$

можно считать элементом группы $Z = H^n_c(\mathcal{M})$. Тот же элемент служит образом

$$1 \in Z = H^n(\mathcal{O}, \mathcal{O} \setminus 0) = H^n_c(\mathcal{O})$$

при отображении $(F \restriction \mathcal{M})^*$. Предложение доказано. □

3. Голоморфные отображения

Пусть W — ограниченная область в комплексном многообразии размерности m с гладкой или кусочно гладкой границей, $F\colon W \setminus P \to \mathbb{C}^m$ — непрерывное отображение, голоморфное в $\operatorname{Int} W$, с множеством нулей $N \subset \operatorname{Int} W$. Предполагаем, что $P \subset \operatorname{Int} W$, а композицией F с вложением $\mathbb{C}^m \subset S^{2m}$ определяется непрерывное отображение $W \to S^{2m}$, переводящее P в точку $\theta = S^{2m} \setminus \mathbb{C}^m$. Для такого F определены числа d_i, $d(N)$ и $d(P)$, и в силу теоремы 1.1

$$\sum d_i = d(N) - d(P).$$

Лемма 3.1. *Пусть A — связная компонента одного из множеств N или P, $d(A)$ — алгебраическое число соответствующих точек отображения F вблизи A. Тогда $d(A)$ — число прообразов вблизи A регулярных значений F вблизи* 0 (*соответственно вблизи $\theta = \infty$*).

Для изолированных нулей F этим подтверждается эквивалентность определения кратности, используемого в работе, определению, используемому в [1].

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{O}$ — достаточно малые окрестности A и 0, для которых $F \restriction \mathcal{M}\colon \mathcal{M} \to \mathcal{O}$ — собственное отображение (см. раздел 2) (если $A \subset P$, то $\mathcal{O}$ — окрестность бесконечно удалённой точки $\infty = \theta$). Пусть $J(F)$ — матрица Якоби ограничения F на некоторую карту W. Якобиан $|J(F)|$ — голоморфная функция. Если он обращается в нуль в окрестности некоторой точки, то $|J(F)| = 0$ на всей карте (ср. [3, глава I, п. A, теорема 6]). В этом случае та же картина возникнет на всех других картах. Подобное отображение F будем называть вырожденным. При собственном отображении $F \restriction \mathcal{M}$ образ $\mathcal{M}$ — замкнутое множество в $\mathcal{O}$. Для вырожденного F это аналитическое множество вещественной размерности не более $2m - 2$ (ср. [3, глава V, п. C]), поэтому $d(A) = 0$. Регулярными значениями в $\mathcal{O}$ могут служить лишь точки, не принадлежащие образу $F \restriction \mathcal{M}$. В силу теоремы Сарда [7, глава II, теорема 3.1]) множество таких точек непусто вблизи 0 (или $\infty = \theta$). Это даёт утверждение леммы для вырожденного F.

Заметим, что для вырожденных отображений $d_i = d(N) = d(P) = 0$, поэтому теорема 1.1 не даёт информации о структуре множеств нулей и полюсов F.

Лемма 3.2. *Пусть отображение F невырожденное. Тогда $F(\mathcal{M}) = \mathcal{O}$.*

Доказательство. Пусть L — множество точек в $\mathcal{M}$, в которых $|J(F)| = 0$. Это замкнутое (аналитическое) множество в комплексном многообразии $\mathcal{M}$ вещественной коразмерности не меньше 2 (см. [3, глава II, п. F, определение I, теоремы 2 и 3]). В силу собственности $F \restriction \mathcal{M}$ множества $F(L)$ и $F(\mathcal{M})$ замкнуты в $\mathcal{O}$, причём $F(L)$ — аналитическое множество вещественной коразмерности не меньше 2 (ср. [3, глава V, п. A, пример 12 и п. C, теорема 5]), поэтому $\mathcal{O} \setminus F(L) \neq \varnothing$ и множество $F(\mathcal{M}) \cap (\mathcal{O} \setminus F(L))$ замкнуто в $\mathcal{O} \setminus F(L)$. Из-за регулярности всех точек в $(F \restriction \mathcal{M})^{-1}(\mathcal{O} \setminus F(L))$ ограничение F на это множество — накрывающее отображение, поэтому множество $F(\mathcal{M}) \cap (\mathcal{O} \setminus F(L))$ также открыто в $\mathcal{O} \setminus F(L)$. Так как это множество связно, $F(\mathcal{M}) \cap (\mathcal{O} \setminus F(L)) = \mathcal{O} \setminus F(L)$, поэтому $F(\mathcal{M}) = \mathcal{O}$. ☐

Возвращаясь к доказательству леммы 3.1, условимся рассматривать многообразия $\mathcal{M}$ и $\mathcal{O}$ как вещественные. Локальные координаты, определяемые при овеществлении комплексными, формируют на $\mathcal{M}$ атлас, задающий ориентацию $\mathcal{M}$. Посредством локальных гомоморфизмов вокруг прообразов в $\mathcal{M}$

некоторых регулярных значений $F \restriction \mathcal{M}$ в $\mathcal{O} \setminus F(L)$ определяется соответствующая ориентация $\mathcal{O}$. В силу предложения 2.3 $d(A)$ — степень отображения $F \restriction \mathcal{M}$. Степень же собственного отображения в сферу (как одноточечную компактификацию $\mathcal{O}$) совпадает с числом прообразов регулярных значений, засчитываемых со знаками якобианов в каждом из них. Однако якобиан отображения $F \restriction \mathcal{M}$, рассматриваемого как вещественное, положителен (в точках $\mathcal{M} \setminus L$). Лемма доказана. □

Следствие 3.3. *Для связной компоненты A множества нулей или полюсов невырожденного отображения F всегда $d(A) > 0$. При этом $d(A) = 1$ в том и только в том случае, когда A — регулярная точка из множества нулей отображения F или когда ограничения F на малые окрестности подмножества A полюсов отображения F — биголоморфные отображения* (*на дополнениях к* A).

Первое утверждение — следствие лемм 3.1 и 3.2. При $d(A) = 1$ отображение $F \restriction \mathcal{M}$ обратимо на $\mathcal{O} \setminus F(L)$. Так как $F(L)$ — аналитическое множество вещественной размерности не больше $2m-2$ (см. лемму 3.2), оно тонко в смысле [3, глава I, п. C], поэтому в силу [3, глава I, п. C, теорема 3] отображение $F \restriction \mathcal{M}$ продолжается с $\mathcal{O} \setminus F(L)$ до голоморфного отображения $\mathcal{O} \to \mathcal{M}$. Так как все точки L предельные для $\mathcal{M} \setminus L$, то отображение $\mathcal{O} \to \mathcal{M}$ обратно к $F \restriction \mathcal{M}$. Это означает, в частности, что $L = \varnothing$, а в случае множества нулей — регулярность F на A, что возможно лишь когда A — изолированный нуль отображения F.

Следствие 3.4. *Множества нулей N и полюсов P невырожденного отображения F состоят из конечного числа своих связных компонент, ограниченного соответственно числами $d(N)$ и $d(P)$.*

Следствие 3.5. *Для невырожденного отображения F, не имеющего особенностей в* $\operatorname{Int} W$ (*т. е. при* $P = \varnothing$), *суммарная степень $\sum_{i=1}^{k} d_i$ ограничения F на $\Gamma = \partial W$ неотрицательна и равна нулю тогда и только тогда, когда F не имеет нулей. При этом $\sum d_i = \sum d(A_j)$, где A_j — связные компоненты множества нулей F. В частности, число этих компонент не больше $\sum d_i$.*

В частном случае, когда W — ограниченная область в $\mathbb{C}^m$, множество нулей конечно (см. раздел 1). Первое утверждение следствия 3.5 в этом случае справедливо и для вырожденных F. В самом деле, если A — нуль отображения F, пусть $F_1 = F + f$, где f — линейное отображение с центром в точке A, задаваемое постоянной матрицей с достаточно малыми её членами. Матрица может быть выбрана так, чтобы F_1, оказавшись невырожденным, удовлетворяло условию предложения 1.2. В этом случае, вопреки утверждению следствия 3.5, A окажется для F_1 нулём при $\sum d_i = 0$.

Для отображений без особенностей областей $W \subset \mathbb{C}^m$ эти результаты чисто аналитическими методами получены в [1, теоремы 2.4 и 2.9] и называются там принципом аргумента.

Заметим, что в общем случае вырожденное отображение $F\colon W \to \mathbb{C}^m$ может иметь нули (нулевой кратности!). Это происходит, например, когда W — декартово произведение ограниченной области $W^1 \subset \mathbb{C}^r$ на замкнутое $(m-r)$-мерное комплексное многообразие, а F — проекция на первый множитель.

4. Дифференциальная форма телесного угла

Как отмечено в разделе 1, для гладких F степени d_i могут быть определены как

$$d_i = \theta(n)^{-1} \int\limits_{M_i} F^* p^* \omega_0,$$

где p — стандартная проекция $\mathbb{R}^n \setminus 0 = S^{n-1} \times \mathbb{R}^1$ на единичную сферу $S^{n-1} \subset \subset \mathbb{R}^n$. Определённая в $\mathbb{R}^n \setminus 0$ форма $\omega = p^*\omega_0$ замкнута (как прообраз формы объёма на единичной сфере S^{n-1}). Интеграл от ω по любой расположенной в $\mathbb{R}^n \setminus 0$ ориентированной гиперповерхности (возможно, с самопересечениями или складками) равен ориентированному телесному углу, замещаемому в $\mathbb{R}^n$ этой гиперповерхностью. Будем называть ω дифференциальной формой ориентированного телесного угла в $\mathbb{R}^n$. В частности,

$$d_i = \theta(n)^{-1} \int\limits_{M_i} F^* \omega \text{ —}$$

число «оборотов» $F(M_i)$ вокруг начала координат $0 \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 4.1. *В стандартных евклидовых координатах ω имеет вид*

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

где

$$\omega_j = (-1)^{j-1} \frac{x^j}{r^n}, \quad r = \sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2}.$$

Доказательство. Пусть $A = (x^1, \ldots, x^n)$ — произвольная точка в $\mathbb{R}^n \setminus 0$. По определению обратного образа ω_0 при проекции p коэффициент ω_j равен ориентированному объёму параллелепипеда на векторах, служащих центральными проекциями на касательную к S^{n-1} плоскость векторов $e_1, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, \ldots, e_n$ стандартного базиса $\mathbb{R}^n$, помещённых в точке A. Определяемый ими $(n-1)$-мерный объём в $\mathbb{R}^n$ равен 1. Угол ориентированной линейной оболочки $e_1, \ldots, e_{j-1}$, $e_{j+1}, \ldots, e_n$ с ориентированной касательной плоскостью к сфере радиуса r в точке A совпадает с углом между векторами $(-1)^{j-1} e_j$ и $\overline{OA}$. Объём спроектированного сперва на эту касательную плоскость параллелепипеда, совпадая с косинусом угла между векторами $(-1)^{j-1} e_j$ и $\overline{OA}$, равен $(-1)^{j-1} \frac{x^j}{r}$. Элемент же телесного угла, замещаемого этим ориентированным объёмом, отличается от последнего множителем r^{1-n}. Этим подтверждается указанный в теореме вид коэффициентов ω_j. $\square$

Отметим, что в [2, глава I, § 4] аналогичная координатная запись представлена для формы $r^{n-1}\omega$, которая интерпретируется как форма объёма сфер S_r^{n-1} произвольного радиуса r. В отличие от ω, форма $r^{n-1}\omega$ оказывается незамкнутой.

Ниже потребуется следующее явное выражение для полного телесного угла $\theta(n)$.

Предложение 4.2.

$$\theta(n) = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (n-4)(n-2)},$$

если n чётно, и

$$\theta(n) = \frac{2\cdot(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-4)(n-2)}$$

для нечётных n.

Доказательство. Интерпретируя $S^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$ как гладкую надстройку над $S^{n-2}\subset\mathbb{R}^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$, отнесём точке $A\in S^{n-1}$ следующие координаты: угол φ между векторами $(0,\ldots,0,1)$ и $\overline{OA}$ и координаты точки пересечения с S^{n-2} определяемого этими векторами меридиана. В силу ортогональности координатных φ-линий всем остальным для метрических тензоров G и G' на S^{n-1} и S^{n-2} имеет место соотношение $\sqrt{|G|}=\sqrt{|G'|}\sin^{n-2}\varphi$ (поскольку $\sin\varphi$ — радиус сечения $\varphi=\mathrm{const}$ сферы S^{n-1}). Таким образом,

$$\theta(n) = \theta(n-1)\int\limits_0^\pi \sin^{n-2}\varphi\,d\varphi.$$

Воспользуемся известным соотношением

$$\int \sin^m\varphi\,d\varphi = -\frac{\sin^{m-1}\varphi\cos\varphi}{m} + \frac{m-1}{m}\int\sin^{m-2}\varphi\,d\varphi,\quad m>0.$$

При интегрировании в пределах $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ и $m>1$ интерес в правой части представляет лишь второе слагаемое. Имеем

$$\int\limits_0^\pi \sin\varphi\,d\varphi = 2,\qquad \int\limits_0^\pi \sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Предложение доказывается индукцией по n. Имеем

$$\theta(2)=2\pi,\quad \theta(3)=2\pi\cdot 2=4\pi,\quad \theta(4)=4\pi\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi^2,$$

что согласуется с выражениями в предложении. Итерируя рекуррентное соотношение, получим для нечётных m

$$\int\limits_0^\pi \sin^m\varphi\,d\varphi = \frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-3}{m-2}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}\cdot 2.$$

Для чётных m имеем

$$\int\limits_0^\pi \sin^m\varphi\,d\varphi = \frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-3}{m-2}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Если n нечётно, по предположению индукции для чётного $n-1$ имеем

$$\theta(n-1) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n-3)}.$$

После умножения на

$$\int\limits_0^\pi \sin^{n-2}\varphi\,d\varphi$$

получаем выражение для $\theta(n)$ из предложения.

Если n чётно, для нечётного $n-1$ по предположению индукции

$$\theta(n-1) = \frac{2\cdot(2\pi)^{\frac{n-2}{2}}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(n-3)}.$$

После умножения на

$$\int\limits_0^\pi \sin^{n-2}\varphi\,d\varphi$$

получаем выражение для $\theta(n)$ из предложения, отвечающее чётному n. □

Дифференциальная форма Мартинелли—Бохнера в $\mathbb{C}^m\setminus 0$ определяется как

$$\tilde\omega = \frac{(m-1)!}{(2\pi i)^m r^{2m}}\times$$
$$\times\sum_{j=1}^m(-1)^{j-1}\bar z^j\,d\bar z^1\wedge\ldots\wedge d\bar z^{j-1}\wedge d\bar z^{j+1}\wedge\ldots\wedge d\bar z^m\wedge dz^1\wedge\ldots\wedge dz^m,$$

где $r=\sqrt{z^1\bar z^1+\ldots+z^m\bar z^m}$. Как обычно, в этом выражении в комплексных координатах $z^j=x^j+iy^j$ в качестве базисных дифференциальных форм вместо dx^j и dy^j взяты линейные комбинации $dz^j=dx^j+idy^j$ и $d\bar z^j=dx^j-idy^j$.

Предложение 4.3. *В вещественных координатах $x^1,\ldots,x^m,y^1,\ldots,y^m$ форма $\tilde\omega$ записывается как*

$$\tilde\omega = \frac{1}{\theta(2m)}\omega + i\omega',$$

где ω' — некоторая точная форма, а ω — форма телесного угла.

В частности, форма $\tilde{\omega}$ замкнута.

Доказательство. В общий член с номером $j \neq \alpha$ дифференциалы $d\bar{z}^\alpha$ и dz^α с точностью до знака определяют «вклад»

$$d\bar{z}^\alpha \wedge dz^\alpha = 2idx^\alpha \wedge dy^\alpha.$$

При этом dy^α придётся переместить на его место в произведении всех дифференциалов таким же числом соседних перестановок, как для члена dz^α при его перемещении к $d\bar{z}^\alpha$, так что все операции вместе знак $(-1)^{j-1}$ рассматриваемого члена суммы не изменят. При подобных преобразованиях, сделанных поочерёдно для всех $\alpha \neq j$ и во всех членах суммы, из суммы удастся вынести множитель $2^{m-1}i^{m-1}$, поэтому вместо $(m-1)!$ в числителе перед суммой появится число $2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-2)$, где $n = 2m$, в знаменателе же окажется $i(2\pi)^{\frac{n}{2}}$. Множитель $\bar{z}^j \wedge dz^j$ в члене с номером j даёт

$$\bar{z}^j \wedge dz^j = i(x^j\, dy^j - y^j\, dx^j) + x^j\, dx^j + y^j\, dy^j.$$

Два последних слагаемых в этом выражении вместе с остальными дифференциалами члена с номером j дают, очевидно, точные $(n-1)$-формы, которые после суммирования с учётом коэффициентов определяют форму ω'. Мнимая единица i сокращается с оставшимся в знаменателе множителем i. Слагаемое общей суммы, в котором оказывается $x^j\, dy^j$, входит в неё с нужным знаком $(-1)^{j-1}$. Дифференциал dx^j с занимаемого им вначале места с номером $m+j$ с помощью $m-1$ соседних перестановок следует переместить на отведённое для него место с номером j, и содержащее $y^j\, dx^j$ слагаемое войдёт в сумму с общим знаком $(-1)^{j-1}(-1)(-1)^{m-1} = (-1)^{m+j-1}$. Остаётся сравнить результат преобразований с теоремой 4.1 и предложением 4.2. □

Для иллюстрации отметим, что при $m = 1$ имеем

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{2\pi i|z|^2}\bar{z}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\frac{dz}{z}.$$

При переходе к координатам x, y, кроме

$$\frac{1}{2\pi}\omega = \frac{1}{2\pi r^2}(x\, dy - y\, dx),$$

получаем мнимое слагаемое

$$\frac{1}{2\pi i r^2}(x\, dx + y\, dy).$$

Простым следствием оказывается теорема об интегральном представлении Мартинелли—Бохнера голоморфных функций. Пусть $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^m)$ — произвольная точка в $\mathbb{C}^m$ и $\tilde{\omega}_\xi$ — задаваемая соотношением

$$\tilde{\omega}_\xi(z^1, \ldots, z^m) = \tilde{\omega}(z^1 - \xi^1, \ldots, z^m - \xi^m)$$

дифференциальная форма, $z = (z^1, \ldots, z^m)$ — переменные координаты в $\mathbb{C}^m$.

Теорема 4.4. *Пусть W — ограниченная замкнутая область в $\mathbb{C}^m$ с кусочно гладкой границей Γ. Для любой непрерывной на W комплексной функции $\varphi(z) = \varphi(z^1, \ldots, z^m)$, голоморфной внутри W, значение интеграла*

$$\int\limits_{\Gamma} \varphi(z)\tilde{\omega}_\xi(z)$$

совпадает с $\varphi(\xi)$, если $\xi \in \operatorname{Int} W$, и равно нулю для $\xi \in \mathbb{C}^m \setminus W$.

Доказательство. В самом деле, так как

$$d\varphi = \sum_j \frac{\partial\varphi}{\partial z^j} dz^j,$$

то $d\varphi \wedge \tilde{\omega}_\xi = 0$, поэтому $\varphi\tilde{\omega}_\xi$ — замкнутая форма. Следовательно, интеграл от неё по Γ равен нулю, если $\xi \in \mathbb{C}^m \setminus W$ (теорема Стокса). Если $\xi \in \operatorname{Int} W$, форма $\varphi\tilde{\omega}_\xi$ определена во всех точках $\operatorname{Int} W$, кроме ξ, и по тем же причинам обсуждаемый интеграл совпадает с интегралом по границе сколь угодно малой шарообразной окрестности точки ξ. Остаётся учесть, что значение $\varphi(z)$ на границе такой окрестности с уменьшением её радиуса стремится к $\varphi(\xi)$, в то время как интеграл от самой формы $\tilde{\omega}_\xi$ в соответствии с предложением 4.3 такой же, как от $\frac{1}{\theta(2m)}\omega$, то есть равен 1. $\square$

Литература

[1] Айзенберг Л. А., Южаков А. П. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. — Новосибирск: Наука, 1979.

[2] Ботт Р., Ту Л. В. Дифференциальные формы в алгебраической топологии. — М.: Наука, 1989.

[3] Ганнинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. — М.: Мир, 1969.

[4] Масси У. Теория гомологий и когомологий. — М.: Мир, 1981.

[5] Скляренко Е. Г. Многомерная версия теоремы Коши о вычетах // Мат. заметки. — 1991. — Т. 49 № 3. — С. 109—113.

[6] Скляренко Е. Г. Гомологии и когомологии связи между множествами. Гомологии и когомологии окружения замкнутого множества // Изв. РАН. Сер. мат. — 1992. — Т. 56, № 5. — С. 1040—1071.

[7] Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. — М.: Мир, 1970.

[8] Харлап А. Э. Локальные гомологии и когомологии, гомологическая размерность и обобщённые многообразия // Мат. сб. — 1975. — Т. 96, № 3. — С. 347—373.

[9] Iversen B. Cauchy residues and de Rham homology // Prepr. Ser. Mat. Inst. Aarhus Univ. — 1986—1987. — Vol. 26. — P. 1—25.