Разложимость линделёфовых пространств

М. А. ФИЛАТОВА
Уральский государственный университет
e-mail: Maria.Filatova@usu.ru

УДК 515.122.24+515.122.29

Ключевые слова: разложимое пространство, τ-разложимое пространство, дисперсионный характер, финально компактное пространство.

Аннотация

В работе доказана ω-разложимость наследственно финально компактного пространства несчётного дисперсионного характера. Также доказана разложимость пространства со свойством Линделёфа, дисперсионный характер которого несчётен.

Abstract

M. A. Filatova, Resolvability of Lindelöf spaces, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 5, pp. 225—231.

We prove the ω-resolvability of hereditarily finally compact spaces and the resolvability of Lindelöf spaces whose dispersion character is uncountable.

Введение

Понятия разложимого, τ-разложимого и неразложимого топологических пространств были введены Хьюиттом [5]. Пространство X *разложимо* (*τ-разложимо*), если X можно представить в виде дизъюнктного объединения двух (τ) плотных в X множеств. Дисперсионным характером $\Delta(X)$ называется минимум мощностей непустых открытых подмножеств пространства X. Пространство X *максимально разложимо*, если оно $\Delta(X)$-разложимо.

Топологическое пространство X называется финально компактным, если из каждого открытого покрытия этого пространства можно выделить счётное подпокрытие. Если при этом X регулярно, то говорят, что X — линделёфово пространство, или пространство со свойством Линделёфа [3].

В. И. Малыхин (см., например, [1, 4]) поставил следующую проблему: *разложимо ли регулярное финально компактное пространство несчётного дисперсионного характера?*

Требование несчётности дисперсионного характера вполне естественно, поскольку существуют счётные тихоновские неразложимые пространства (такие примеры построил ещё Хьюитт в [5]).

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 5, с. 225—231.

В. И. Малыхиным в [6] доказана максимальная разложимость финально компактных групп несчётного дисперсионного характера, а в [1] построен пример неразложимого хаусдорфова финально компактного пространства несчётного дисперсионного характера.

О. Павловым доказана ω-разложимость регулярного финально компактного пространства, дисперсионный характер которого больше ω_1, а также, в предположении отрицания континуум-гипотезы, доказана (максимальная) ω-разложимость связного (наследственно) финально компактного пространства (см. [7]). О. Павловым, в частности, сформулирован следующий вопрос: *существуют ли в предположении континуум-гипотезы неразложимые наследственно финально компактные пространства несчётного дисперсионного характера?*

В работе доказывается ω-разложимость наследственно финально компактного пространства несчётного дисперсионного характера. Тем самым получен отрицательный ответ на вопрос О. Павлова. В [2] вопрос о разложимости линделёфова пространства сведён к вопросу о разложимости регулярного наследственно финально компактного пространства несчётного дисперсионного характера. Таким образом, поскольку ω-разложимое пространство очевидно разложимо, получено положительное решение проблемы В. И. Малыхина.

Все рассматриваемые в работе пространства предполагаются плотными в себе (без изолированных точек). Замыкание множества A обозначается $[A]$. Если не оговорено противное, мы не предполагаем никаких аксиом отделимости.

Нам потребуется следующее утверждение.

Критерий разложимости Хьюитта. *Пространство X разложимо (τ-разложимо) тогда и только тогда, когда всякое его открытое подмножество содержит плотное в себе разложимое (τ-разложимое) подпространство.*

Из критерия Хьюитта, в частности, следует, что при доказательстве разложимости достаточно ограничиться случаем, когда $\Delta(X) = |X|$.

Разложимость наследственно финально компактного пространства

Следующее определение задаёт ключевое понятие данной работы.

Определение 1. Пространство X назовём ортогонально τ-разбиваемым, если $\Delta(X) = |X|$ и найдётся τ разбиений $\{\mathscr{A}^\gamma = \{A^\gamma_\alpha \mid \alpha < |X|\},\ \gamma \leqslant \tau\}$ множества X, обладающих следующими свойствами:

1) $|A^{\gamma'}_{\alpha'} \cap A^{\gamma''}_{\alpha''}| \leqslant 1$ для всех $\gamma' \neq \gamma''$ и $\alpha', \alpha'' < |X|$ (малая мощность пересечений);
2) $\Delta(A^\gamma_\alpha) = |X|$ для всех $\gamma \leqslant \tau$, $\alpha < |X|$ (большой дисперсионный характер подпространств A^γ_α).

Если пространство ортогонально 2-разбиваемо, то будем говорить, что оно ортогонально разбиваемо.

Следующая очевидная лемма полезна при доказательстве теоремы 1.

Лемма 1. *Пусть* $A \subset X$ *и* $\Delta(A) = |X|$, *тогда для всякого* $B \subset A$, *такого что* $|A \setminus B| < |X|$, *имеют место равенство* $\Delta(B) = |X|$ *и включение* $A \subset [B]$. $\square$

Теорема 1. *Ортогонально* τ*-разбиваемое пространство регулярной мощности* τ*-разложимо.*

Доказательство. Пусть $X = \{x_\alpha \mid \alpha < |X|\}$. Заметим, что для всех $\delta < |X|$, $\gamma \leqslant \tau$ найдётся такой индекс $\alpha(\delta, \gamma)$, что $x_\delta \in A^\gamma_{\alpha(\delta,\gamma)}$.

Сначала докажем теорему для случая $\tau < \Delta(X)$. Индукций по α построим такие множества D^γ_α, $\gamma \leqslant \tau$, что $x_\alpha \in [D^\gamma_\alpha]$ для $\gamma \leqslant \tau$ и $D^{\gamma'}_\alpha \cap D^{\gamma''}_\alpha = \varnothing$ при $\gamma' \neq \gamma''$. Кроме того, D^γ_α образуют монотонное по α семейство множеств.

База индукции. Для $x_1 \in X$ найдутся такие множества $A^\gamma_{\alpha(1,\gamma)}$, что $x_1 \in A^\gamma_{\alpha(1,\gamma)}$, $\gamma \leqslant \tau$. Положим $C^\gamma_1 = D^\gamma_1 = A^\gamma_{\alpha(1,\gamma)} \setminus \{x_1\}$. Тогда пересечение $D^{\gamma'}_1 \cap D^{\gamma''}_1$ пусто при $\gamma' \neq \gamma''$ в силу условия 1) определения 1 и $x_1 \in [D^\gamma_1]$ для всех $\gamma \leqslant \tau$ по лемме 1.

Шаг индукции. Предположим, что для всех $\beta < \delta < |X|$ построены множества C^γ_β, D^γ_β, $\gamma \leqslant \tau$, удовлетворяющие следующим условиям:

а) семейство $\{C^\gamma_\beta \mid \gamma \leqslant \tau,\ \beta < \delta\}$ дизъюнктно;

б) если $C^\gamma_\beta = \varnothing$ для некоторого $\gamma \leqslant \tau$, то $x_\beta \in C^\gamma_{\beta'}$ для некоторого $\beta' < \beta$;

в) если $C^\gamma_\beta \neq \varnothing$ для некоторого $\gamma \leqslant \tau$, то $C^\gamma_\beta \subset A^\gamma_{\alpha(\beta,\gamma)}$ и мощность разности $A^\gamma_{\alpha(\beta,\gamma)} \setminus C^\gamma_\beta$ меньше $|X|$, при этом $x_\beta \in A^\gamma_{\alpha(\beta,\gamma)}$, $x_\beta \notin C^\gamma_\beta$ (из этого условия и условия 2) определения 1 в силу леммы 1 следует, что $x_\beta \in [C^\gamma_\beta]$);

г) $D^\gamma_\beta = \bigcup\limits_{\beta' \leqslant \beta} C^\gamma_\beta$.

Из перечисленных условий и условия 1) определения 1 следует, что множества $\{D^\gamma_\beta \mid \gamma \leqslant \tau\}$ образуют при фиксированном β дизъюнктное семейство и $x_{\beta'} \in [D^\gamma_\beta]$ для $\beta' \leqslant \beta$, $\gamma \leqslant \tau$.

Зафиксируем произвольный индекс γ. Если $x_\delta = \bigcup\limits_{\beta < \gamma} D^\gamma_\beta$, положим $C^\gamma_\delta = \varnothing$. В противном случае найдётся такое множество $A^\gamma_{\alpha(\delta,\gamma)} \in \mathscr{A}^\gamma$, что $x_\delta \in A^\gamma_{\alpha(\delta,\gamma)}$. В этом случае положим

$$C^\gamma_\delta = A^\gamma_{\alpha(\delta,\gamma)} \setminus \Bigl(\bigcup_{\beta<\delta,\, \gamma' \leqslant \tau} D^{\gamma'}_\beta \cup \{x_\delta\} \Bigr).$$

Поскольку мощность пересечения

$$A^\gamma_{\alpha(\delta,\gamma)} \cap \Bigl(\bigcup_{\beta<\delta,\, \gamma' \leqslant \tau} D^{\gamma'}_\beta \cup \{x_\delta\} \Bigr)$$

меньше мощности X (это следует из условия 1) определения 1, условий в), г) и регулярности $|X|$), то условие в) выполнено в силу условия 2) определения 1 и леммы 1. Из построения следует, что условия а) и б) также выполнены. Положим

$$D_\delta^\gamma = \bigcup_{\beta \leqslant \gamma} C_\beta^\gamma,$$

тогда D_δ^γ дизъюнктны по γ и $x_\beta \in [D_\delta^\gamma]$ для всех $\beta \leqslant \delta$, $\gamma \leqslant \tau$. Процесс построения завершён.

Положим

$$X_\gamma = \bigcup_{\delta < |X|} D_\delta^\gamma.$$

Тогда X_γ дизъюнктны и плотны в X.

Теперь рассмотрим случай, когда $\tau = |X|$. В этой ситуации нам удобно перенумеровать семейства $\mathscr{A}^\gamma$ следующим образом: $\{\mathscr{A}^\gamma \mid \gamma < |X|\}$.

Индукцией по $\alpha < |X|$ построим множества C_α^γ.

База индукции. Для $x_1 \in X$ найдётся такое множество $A^1_{\alpha(1,1)}$, что $x_1 \in A^1_{\alpha(1,1)}$. Положим $C_1^1 = A^1_{\alpha(1,1)} \setminus \{x_1\}$. Очевидно, что $x_1 \in [C_1^1]$.

Шаг индукции. Пусть для всех β, $\gamma < \delta < |X|$, построены множества C_β^γ, обладающие следующими свойствами:

а) семейство $\{C_\beta^\gamma \mid \gamma \leqslant \beta,\ \beta < \delta\}$ дизъюнктно;

б) если $C_\beta^\gamma = \varnothing$, то $x_\beta \in C_{\beta'}^\gamma$ для некоторого $\beta' < \beta$;

в) если $C_\beta^\gamma \neq \varnothing$, то $x_\beta \in [C_\beta^\gamma]$.

Для $x_1 \in X$ найдётся такое множество $A^\delta_{\alpha(1,\delta)} \in \mathscr{A}^\delta$, что $x_1 \in A^\delta_{\alpha(1,\delta)}$. Положим

$$C_1^\delta = A^\delta_{\alpha(1,\delta)} \setminus \Bigl(\bigcup_{\beta<\delta,\, \gamma<\delta} C_\beta^\gamma \cup \{x_1\} \Bigr).$$

Тогда $x_1 \in [C_1^\delta]$. Пусть для всех $\nu' < \nu < \delta$ построены $C_{\nu'}^\delta$ с нужными нам свойствами. Если $x_\nu \in C_{\beta'}^\nu$ для некоторого $\beta' < \nu$, то положим $C_\nu^\delta = \varnothing$, иначе положим

$$C_\nu^\delta = A^\delta_{\alpha(\nu,\delta)} \setminus \Bigl(\bigcup_{\beta<\delta,\, \gamma<\delta} C_\beta^\gamma \cup \bigcup_{\nu'<\nu} C_{\nu'}^\delta \cup \{x_\nu\} \Bigr).$$

Для x_δ и фиксированного $\gamma \leqslant \delta$ построим C_δ^γ следующим образом:

$$C_\delta^\gamma = A^\gamma_{\alpha(\delta,\gamma)} \setminus \Bigl(\bigcup_{\beta<\delta,\, \gamma\leqslant\delta} C_\beta^\gamma \cup \{x_\delta\} \Bigr),$$

если x_δ не принадлежит ни одному из построенных ранее множеств, и $C_\delta^\gamma = \varnothing$ в противном случае. Процесс построения завершён.

Положим

$$X_\alpha = \bigcup_{\delta<|X|} C_\delta^\alpha.$$

Построенные таким образом множества X_α дизъюнктны и плотны в X. Теорема доказана. □

Теорема 2. *Наследственно финально компактное пространство несчётного дисперсионного характера ω-разложимо.*

Доказательство. Сперва докажем разложимость пространства X. Для этого покажем, что всякое открытое непустое подмножество пространства X содержит ортогонально разбиваемое подпространство мощности (и дисперсионного характера) ω_1, и воспользуемся теоремой 1 и критерием разложимости Хьюитта.

Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2. *В условиях теоремы пусть $A \subset X$ такое, что $|A| = \omega_1$. Тогда найдётся такое не более чем счётное подмножество $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$, что разность $B = A \setminus \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ имеет несчётный дисперсионный характер.*

Доказательство. Пусть $A' = \{x \in A \mid \Delta(x, A) \leqslant \omega\}$. Множество A' счётно. Действительно, если A' несчётно, то в каждой точке $x \in A'$ зафиксируем такую окрестность $U(x)$ точки x, что $|U(x) \cap A| \leqslant \omega$. Тогда множества $U(x)$, $x \in A'$, образуют открытое покрытие A', из которого нельзя выделить счётное подпокрытие, что противоречит наследственной финальной компактности пространства X.

Из определения и счётности множества A' следует, что множество $B = A \setminus A'$ имеет несчётный дисперсионный характер. Лемма доказана. □

Продолжим доказывать теорему.

Пусть U — открытое подмножество X. Поскольку мощность множества U несчётна, то в U найдётся дизъюнктное семейство $\{B_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ таких множеств, что мощность каждого из них равна ω_1. В силу леммы 2 можно считать, что все множества B_α имеют несчётный дисперсионный характер.

В каждом множестве B_α возьмём по точке. Из полученного множества точек, пользуясь леммой 2, выделим подмножество C_1 несчётного дисперсионного характера. Пусть для всех $\beta < \tau$ построены такие дизъюнктные множества C_β несчётного дисперсионного характера, что $|B_\alpha \cap C_\beta| \leqslant 1$ для всех $\alpha < \omega_1$, $\beta < \tau$. Если множество индексов

$$\Bigl\{\alpha \mid B_\alpha \not\subset \bigcup_{\beta<\tau} C_\beta\Bigr\}$$

конечно или счётно, то процесс построения завершён. Если это множество несчётно, то в каждой непустой разности

$$B_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\tau} C_\beta$$

возьмём по точке и из полученного множества, пользуясь леммой 2, выделим подмножество C_τ несчётного дисперсионного характера. Ясно, что описанный выше процесс построения не может завершиться на счётном ординале τ и ограничен сверху числом ω_2. Результатом этого процесса будет семейство мощности ω_1 множеств C_β. Перенумеруем построенное семейство индексами, меньшими ω_1.

Пусть

$$I = \Big\{ \alpha \mid B_\alpha \not\subset \bigcup_{\beta<\omega_1} C_\beta \Big\}.$$

Из построения следует, что I — не более чем счётное множество. Положим

$$V = \bigcup_{\beta<\omega_1} C_\beta \setminus \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha, \quad A^1_\alpha = B_\alpha \cap V, \quad A^2_\alpha = C_\alpha \cap V,$$

то есть из семейства $\{B_\alpha\}$ удалили не более чем счётное число множеств, а из каждого множества C_α удалили не более чем счётное число точек. Легко видеть, что построенные таким образом семейства

$$\{A^1_\alpha \mid \alpha < \omega_1,\ \alpha \notin I\}, \quad \{A^2_\alpha \mid \alpha < \omega_1,\ \alpha \notin I\}$$

удовлетворяют условиям 1) и 2) определения 1, следовательно, V — ортогонально разбиваемое подпространство пространства U.

Итак, доказана разложимость наследственно финально компактного пространства несчётного дисперсионного характера.

Теперь докажем ω-разложимость пространства X. Поскольку X разложимо, найдутся такие множества X_1 и Y_1, что $X \supset X_1 \cup Y_1$, причём X_1, Y_1 дизъюнктны, плотны в X и дисперсионный характер Y_1 несчётен. Действительно, из доказательства следует, что X_1 и Y_1 являются объединениями множеств несчётного дисперсионного характера, следовательно, дисперсионный характер X_1 и Y_1 несчётен. Пространство Y_1 финально компактно, имеет несчётный дисперсионный характер, а значит, разложимо. Следовательно, существуют такие множества X_2 и Y_2, что $Y_1 \supset X_2 \cup Y_2$, при этом X_2, Y_2 дизъюнктны, плотны в Y_1 (значит, плотны в X, так как Y_1 плотно в X) и дисперсионный характер Y_2 несчётен. Продолжив процесс для натуральных чисел n, получим последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ попарно дизъюнктных плотных в X множеств. Следовательно, пространство X ω-разложимо. $\square$

В [2] доказаны следующие два утверждения.

Теорема 3. *Регулярное финально компактное пространство X, никакое открытое подмножество которого не является наследственно финально компактным, разложимо.*

Утверждение 1. *Пусть X — регулярное финально компактное пространство несчётного дисперсионного характера. Тогда найдутся два дизъюнктных множества A_1, A_2, объединение которых плотно в X, такие что A_1 удовлетворяет условиям теоремы 3, а множество A_2 локально наследственно финально компактно и имеет несчётный дисперсионный характер.*

Из теорем 2, 3, утверждения 1 и критерия разложимости Хьюитта непосредственно следует теорема 4.

Теорема 4. *Линделёфово пространство несчётного дисперсионного характера разложимо.*

Литература

[1] Малыхин В. И. Борелевская разложимость компактов и их подпространств // Мат. заметки. — 1998. — Т. 64, вып. 5. — С. 701—712.

[2] Филатова М. А. О разложимости финально компактных пространств // Математический и прикладной анализ: сб. науч. тр. — Тюмень: Изд-во ТюмГУ, 2003. — С. 204—212.

[3] Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986.

[4] Comfort W. W., Garsia-Ferreira S. Resolvabilitj: a selective curvey and some new result // Topology Appl. — 1996. — Vol. 74. — P. 149—167.

[5] Hewitt E. A problem of set-theoretic topology // Duke Math. J. — 1943. — Vol. 10. — P. 309—333.

[6] Malykhin V. I., Protasov I. V. Maximal resolvability of bounded groups // Topology Appl. — 1996. — Vol. 73. — P. 227—232.

[7] Pavlov O. On resolvability of topological spaces // Topology Appl. — 2002. — Vol. 126. — P. 37—47.