Заметки о нестандартной теории классов

К. ХРБАЧЕК
Нью-йоркский городской университет, США
e-mail: khrbacek@ccny.cuny.edu

УДК 510.223

Ключевые слова: нестандартная теория множеств, NCT, теория множеств Гёделя—Бернайса, теория множеств Келли—Морса, аксиома хроматических классов, элементарное вложение, ультрапроизведение.

Аннотация

Статья отвечает на несколько остававшихся открытыми вопросов, касающихся классов в нестандартной теории множеств.

Abstract

K. Hrbacek, Some remarks on nonstandard theory of classes, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 5, pp. 233—255.

In the paper, we discuss several hitherto open problems concerning classes in nonstandard set theory.

Аксиоматическая нестандартная теория классов была предложена в [3, 9] в качестве основания практики нестандартного анализа и распространения классической теории множеств на больший универсум, содержащий бесконечно бóльшие натуральные числа, бесконечно малые вещественные числа и другие «нестандартные» объекты. Подробное изложение нестандартной теории множеств и её достижений можно найти в [8].

Большинство аксиоматических систем для нестандартной теории множеств постулируют некоторый универсум *множеств*, двуместное отношение *принадлежности* $\in$ и одноместный предикат *стандартности* **st**. Согласно принятой теоретико-множественной практике *классы* в этих теориях используются неформально, для обозначения расширений формул. Однако имеется несколько веских причин для того, чтобы рассматривать нестандартные теории, в которых классы фигурируют формально, как примитивное понятие, аналогично тому, как это происходит в теории NBG фон Неймана—Бернайса—Гёделя.

1. Нестандартные теории множеств можно разделить на два вида. *Внутренние* теории, подобные BST или IST, аксиоматизируют только стандартные и внутренние множества. *Внешние* теории, подобные HST, пытаются аксиоматизировать также и внешние множества. Не удивительно, что внешние теории, как правило, более сложны. Для многих практических целей нужны лишь внешние подмножества универсума внутренних множеств; разумный компромисс состоит в том, чтобы сделать их классами в аксиоматической теории классов, надеясь,

с одной стороны, сохранить простоту внутренних теорий множеств и, с другой стороны, расширить область их применения. По-видимому, это и было причиной создания NCT (сокращение от nonstandard class theory), *нестандартной теории классов* Андреева и Гордона [1]. Изучение метаматематических свойств NCT и её вариантов является предметом настоящей статьи.

2. Неформальное употребление классов позволяет иметь дело только с *определимыми* классами. Последние, как оказывается, обладают особыми свойствами. Так, в BST любой определимый класс может быть определён некоторой $\Sigma_2^{\mathbf{st}}$-формулой. Хотя этот результат имеет множество фундаментальных и полезных следствий, он накладывает и ограничения, поскольку из него следуют отрицания различных желательных свойств. Например, в BST имеются бесконечные (внутренние) множества x, y, для которых нет взаимно-однозначного класса-отображения x на y [8, теорема 5.5.8 (iv) и её доказательство]. Следовательно, свойство изоморфизма Хенсона — полезный инструмент нестандартного анализа — не может иметь места в BST. В теории NCT аксиома хроматичности постулирует аналогичное ограничение. Однако свойство изоморфизма совместно с теорией NCT^- — вариантом NCT, о котором будет идти речь ниже.

3. Универсум нестандартной теории множеств содержит много *подуниверсумов* — классов, удовлетворяющих только фрагменту всей теории, а также, быть может, дополнительным полезным аксиомам. Определимые классы ограничивают возможности таких подуниверсумов. Например, в BST или NCT каждый разреженный подуниверсум изоморфен предельной ультрастепени стандартного универсума. Но обратное может быть неверно: можно (по меньшей мере в предположении существования сколь угодно больших измеримых кардиналов) сконструировать разреженное элементарное расширение стандартного универсума, не изоморфное никакому определимому универсуму BST [4]. Это можно считать ещё одним проявлением недостаточности определимых классов.

4. Кановей и Реекен [8] разработали метод форсинга для нестандартной теории множеств. Для определённых целей нужно, чтобы вынуждающие условия были собственными классами.

5. В отличие от ZFC, теория NBG конечно аксиоматизируема. Можно ожидать, что это останется верным и для нестандартных теорий классов.

В настоящей статье рассматриваются некоторые вопросы, связанные с нестандартной теорией классов Андреева и Гордона. В разделе 1 мы приводим аксиомы NCT и рассматриваем наряду с ней более слабую теорию NCT^-, полученную удалением из NCT аксиомы хроматичности классов. Андреев и Гордон [1] определили внутренние классы в NCT и поставили вопрос о том, являются ли все локально внутренние классы внутренними. В разделе 2 мы показываем, что локально внутренние классы обладают многими желательными свойствами внутренних классов, и доказываем, что положительный ответ на этот вопрос совместен с NCT (в предположении совместности слабо компактных кардиналов). В разделе 3 мы показываем, что для каждой модели $\mathbb{H}$ теории HST найдётся такая модель $\mathcal{N}$ теории NCT^-, что множества (полумножества) модели $\mathcal{N}$ являются в точности внутренними множествами (соответственно подмножествами внутреннего универсума) модели $\mathbb{H}$. В качестве следствия мы получаем ответ на другой вопрос Андреева и Гордона: аксиома хроматичности классов строго сильнее насыщенности. Ещё одним следствием является совместность принципа изоморфизма с теорией NCT^{-}. Раздел 4 посвящён теории NKM, которая относится к NCT так же, как KM (теория множеств Келли—Морса) относится к NBG. Отвечая на вопрос Кановея, мы показываем, что NKM является непротиворечивой теорией (относительно KM), и изучаем некоторые её дальнейшие расширения. В [8] Кановей и Реекен поставили вопрос, можно ли определить предикат стандартности $\mathbf{st}$ какой-либо $\in$-формулой в HST. В разделе 5 получен отрицательный ответ на этот вопрос и аналогичный вопрос для NCT.

1. Нестандартная теория классов Андреева и Гордона

Теория множеств фон Неймана—Бернайса—Гёделя NBG формулируется в языке с предикатом принадлежности $\in$ и переменными $X, Y, \ldots$, принимающими значения *классов*. *Множества* определяются как члены классов: $\mathrm{Set}(X) \equiv$ $\equiv (\exists Y)(X \in Y)$, и строчные буквы используются для переменных, принимающих значения множеств. Формула является *нормальной*, если в ней присутствуют кванторы только по переменным для множеств. Запись $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ указывает, что все свободные переменные формулы φ встречаются среди $X_1, \ldots, X_n$. Запись вида $\bar{X}, \ldots$ мы используем для обозначения конечных списков переменных, как, например, $X_1, \ldots, X_n$.

Аксиомы NBG таковы:

аксиома экстенсиональности:
$(\forall X)(\forall Y)((\forall u)(u \in X \iff u \in Y) \implies X = Y)$;

аксиома свёртывания для нормальных формул: пусть $\varphi(u, \bar{X})$ есть нормальная формула, тогда $(\forall \bar{X})(\exists Y)(\forall u)(u \in Y \iff \varphi(u, \bar{X}))$;

аксиома пары: $(\forall x, y)(\exists z)(z = \{x, y\})$;

аксиома объединения: $(\forall x)(\exists y)(y = \bigcup x)$;

аксиома степени: $(\forall x)(\exists y)(y = \mathcal{P}(x))$;

аксиома бесконечности: $(\exists x)[\varnothing \in x \wedge (\forall y \in x)(y \cup \{y\} \in x)]$;

аксиома выделения: $(\forall X)(\forall x)(\exists y)(y = x \cap X)$;

аксиома собирания:
$(\forall X)(\forall x)(\exists y)(\forall u \in x)[(\exists v)(\langle u, v\rangle \in X) \implies (\exists v \in y)(\langle u, v\rangle \in X)]$;

аксиома выбора: каждое множество непустых множеств имеет функцию выбора;

аксиома регулярности: $(\forall x \neq \varnothing)(\exists u \in x)(x \cap u = \varnothing)$.

Замечания.

1. Для удобства мы постулируем свёртку в виде схемы аксиом. Её можно заменить на конечное число аксиом (его группа B).

2. Мы разделяем аксиому C4 Гёделя (подстановка) на аксиомы выделения и собирания.
3. Мы предполагаем только локальный, а не глобальный выбор, допускаемый аксиомой E Гёделя. Регулярность также постулируется только для множеств (однако регулярность для классов является следствием наших аксиом для NBG).

П. В. Андреев и Е. И. Гордон [1] предложили теорию NCT (*нестандартную теорию классов*), которая относится к NBG примерно так же, как IST [9] (или, более точно, BST [8]) относится к ZFC. Язык NCT есть язык NBG плюс унарный предикат стандартности **st**; $\mathbf{st}(X)$ означает «класс X *стандартен*».

Сначала мы приведём аксиомы более слабой теории NCT^-. Они включают *все аксиомы* NBG *за исключением* аксиомы выделения. Теперь понятно, что свёртка допускает любые нормальные $\in$-**st**-формулы. В частности, существует класс $\mathbb{S} := \{x\colon \mathbf{st}(x)\}$ всех стандартных множеств и класс $\mathbb{I} := \{x\colon x = x\}$ всех множеств. Для любого класса X определяем ${}^\circ X := X \cap \mathbb{S}$.

Если φ есть $\in$-формула, то формула $\varphi^{\mathbf{st}}$ получается заменой каждого вхождения $(\exists X)$ $[(\forall X)]$ в φ на $(\exists^{\mathbf{st}} X)$ [соответственно $(\forall^{\mathbf{st}} X)$], где $(\exists^{\mathbf{st}} X)(\ldots) \equiv (\exists X)(\mathbf{st}(X) \wedge \ldots)$ и $(\forall^{\mathbf{st}} X) \equiv (\forall X)(\mathbf{st}(X) \implies \ldots)$.

Остальные аксиомы NCT^- таковы:

стандартная аксиома свёртывания для нормальных $\in$-формул:
пусть $\varphi(u, \bar{X})$ — нормальная $\in$-формула,
тогда $(\forall^{\mathbf{st}} \bar{X})(\exists^{\mathbf{st}} Y)(\forall u)(u \in Y \iff \varphi(u, \bar{X}))$;

аксиома выделения для стандартных классов:
$(\forall^{\mathbf{st}} X)(\forall^{\mathbf{st}} x)(\exists y)(y = x \cap X)$;

аксиома ограниченности $(\forall x)(\exists^{\mathbf{st}} a)(x \in a)$;

аксиома переноса: $(\forall^{\mathbf{st}} X)((\exists x)(x \in X) \implies (\exists^{\mathbf{st}} x)(x \in X))$;

аксиома стандартизации: $(\forall X)(\exists^{\mathbf{st}} Y)(\forall^{\mathbf{st}} u)(u \in Y \iff u \in X)$;

аксиома ограниченной идеализации:
$(\forall x)(\forall^{\mathbf{st}} a)[(\forall a_0 \in {}^\circ\mathcal{P}^{\mathrm{fin}}(a))(\exists y \in x)(a_0 \subseteq y) \iff (\exists y \in x)({}^\circ a \subseteq y)]$,
где $\mathcal{P}^{\mathrm{fin}}(a)$ есть множество всех конечных подмножеств a.

Легко видеть, что сформулированная здесь теория NCT^- эквивалентна теории NCTиз [1] с изъятой аксиомой хроматичности классов.

Для удобства мы используем рукописные буквы для обозначения совокупностей классов — неформальных представлений расширений формул. В частности, $\mathcal{S} := \{X\colon \mathbf{st}(X)\}$ есть совокупность всех стандартных классов (*стандартный универсум* NCT^-). Иногда мы пишем $\mathcal{S} \vDash \varphi$ вместо формулы $\varphi^{\mathbf{st}}$. В более общем случае, если $\mathcal{C}$ есть некоторая совокупность классов, то $\mathcal{C} \vDash \varphi$ есть формула, полученная из φ путём замены $(\exists X)$ $[(\forall X)]$ на $(\exists X \in \mathcal{C})$ [соответственно $(\forall X \in \mathcal{C})$].

Следующие результаты из [1] верны в NCT^-:

Принцип переноса ([1, теорема 3.1] и обычная индукция): пусть $\varphi(\bar{x}, \bar{X})$ — любая нормальная $\in$-формула, тогда $(\forall^{\mathbf{st}} \bar{x}, \bar{X})(\varphi^{\mathbf{st}}(\bar{x}, \bar{X}) \iff \varphi(\bar{x}, \bar{X}))$.

Одно из следствий принципа переноса состоит в том, что $\mathcal{S} \vDash \mathrm{NBG}$. Имеет место также теорема 3.8 из [1]: $(\forall X)[X \in \mathcal{S} \iff (\forall a \in \mathbb{S})(a \cap X \in \mathbb{S})]$, т. е. локально стандартные классы стандартны.

Мы заключаем этот обзор NCT формулировкой аксиомы хроматичности классов. Для любого класса X и множества p положим $(X)_p := \{x \colon \langle p, x\rangle \in X\}$. Следуя [1], класс X назовём *p-стандартным*, если $(\exists^{\mathbf{st}} Y)(X = (Y)_p)$. Пусть $\mathcal{S}[p] := \{X \colon X\ p\text{-стандартен}\}$. Класс $\mu_p(x) := \bigcap\{a \in \mathcal{S}[p] \colon x \in a\}$ есть *p-монада* множества x. Класс X называется *p-хроматичным*, если $(\forall x \in X)(\mu_p(x) \subseteq X)$. Класс *хроматичен*, если он p-хроматичен для некоторого p.

Аксиома хроматичности классов (ACC): все классы хроматичны.

Теория NCT есть NCT^- с ACC. Одним из следствий ACC является аксиома насыщенности [1, теорема 4.7]. Класс X имеет *стандартный размер*, если существует класс-функция F и стандартное множество a, такие что $X = F[a \cap \mathbb{S}]$. Множество x *S-конечно*, если существуют функция f и стандартное $n \in \omega$, такие что $x = f[n]$.

Аксиома насыщенности: если класс X имеет стандартный размер и $\bigcap x \neq \varnothing$ для всех S-конечных $x \subseteq X$, то $\bigcap X \neq \varnothing$.

Теорема ([1, теорема 5.1]). *Теория* NCT *есть консервативное расширение* NBG. *Другими словами, для любого $\in$-предложения φ* $\mathrm{NBG} \vdash \varphi$*, если и только если* $\mathrm{NCT} \vdash \varphi^{\mathbf{st}}$.

2. Внутренние классы в NCT

В этом разделе мы исследуем внутренние классы в NCT^-. Следуя Андрееву и Гордону, мы говорим, что класс X является *внутренним*, если выполнено $(\exists p)(\exists^{\mathbf{st}} Y)(X = (Y)_p)$; $\mathcal{I}$ есть совокупность всех внутренних классов.

Доказательства следующих результатов Андреева и Гордона не используют ACC и потому верны в NCT^-:

1) *свёртка для нормальных $\in$-формул* выполняется в $\mathcal{I}$ [1, теорема 3.5.1];
2) *выделение для внутренних классов*:

$$(\forall^{\mathbf{int}} X)(\forall x)(\exists y)(y = x \cap X)$$

(*внутренние классы являются локально внутренними*) [1, теорема 3.7];
3) $\mathcal{I} \vDash \mathrm{NBG}$ [1, теорема 3.9];
4) *принцип идеализации*: пусть $\varphi(u, y, \bar{X})$ есть нормальная $\in$-формула. Для всех $\bar{X} \in \mathcal{I}$ и любого стандартного a справедливо

$$(\forall a_0 \in {}^{\circ}\mathcal{P}^{\mathrm{fin}}(a))(\exists y)(\forall u \in a)\varphi(u, y, \bar{X}) \iff (\exists y)(\forall u \in {}^{\circ}a)\varphi(u, y, \bar{X})$$

[1, теорема 3.10].

Определение внутренних классов в NCT мотивировано аксиомой ACC. Другим допустимым кандидатом для этого понятия являются локально внутренние классы, и в NCT$^-$ этот второй подход, быть может, более оправдан. Мы говорим, что класс X является *локально внутренним*, если $(\forall x)(\exists y)(y = x \cap X)$, и обозначаем через $\mathcal{L}$ совокупность всех локально внутренних классов. Согласно пункту 2) (выделение для внутренних классов) $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{L}$. Мы покажем, что $\mathcal{L}$ является альтернативным вариантом совокупности «внутренних» классов в NCT$^-$. Результаты 1)—4) справедливы также для $\mathcal{L}$.

Андреев и Гордон [1] ставили вопрос о том, являются ли в NCT все локально внутренние классы внутренними, т. е. верно ли, что $\mathcal{I} = \mathcal{L}$. В этом разделе мы доказываем, что $\mathcal{I} = \mathcal{L}$ совместно с NCT в предположении совместности слабо компактных кардиналов. Вопрос о том, совместно ли утверждение $\mathcal{I} \neq \mathcal{L}$ с NCT или даже с NCT$^-$, открыт. В частности, верно ли это утверждение в «минимальной» модели NCT, полученной добавлением к модели BST $\in$-$\mathbf{st}$-определимых классов? Ниже приводится эквивалентное утверждение стандартной теории множеств.

Следующая лемма является слабым вариантом принципа отражения; она используется здесь и в разделе 3. Через $\langle V_\alpha \colon \alpha \in \mathbb{O}n\rangle$ обозначена стандартная кумулятивная иерархия фон Неймана. Нормальная формула $\varphi(\bar{x}, \bar{X})$ называется *строго нормальной*, если переменные для классов X_i встречаются в ней только справа от символа $\in$. В NCT$^-$ каждая нормальная формула эквивалентна некоторой строго нормальной (ср. первый абзац доказательства теоремы 4.1).

Лемма 2.1 (в предположении NCT$^-$). *Пусть*

$$\varphi(\bar{x}, \bar{X}) \equiv (Q_1 y_1) \ldots (Q_k y_k)\ \psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{X})$$

есть нормальная $\in$-$\mathbf{st}$-формула в предварённой форме. Для любого стандартного ординала α_0 найдутся такие стандартные ординалы $\alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_k$, что для любых $\bar{x} \in V_{\alpha_0}$ имеет место эквивалентность

$$\varphi(\bar{x}, \bar{X}) \iff (Q_1 y_1 \in V_{\alpha_1}) \ldots (Q_k y_k \in V_{\alpha_k})\ \psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{X} \cap V_{\alpha_k}).$$

Доказательство. Рассуждаем индукцией по сложности φ. Если данная формула $\varphi(\bar{x}, \bar{X}) \equiv \psi(\bar{x}, \bar{X})$ бескванторная, то эквивалентность

$$(\forall \bar{x} \in V_{\alpha_0})(\varphi(\bar{x}, \bar{X}) \iff \psi(\bar{x}, \bar{X} \cap V_{\alpha_0}))$$

очевидна.

На шаге индукции мы предполагаем без ограничения общности, что Q_1 есть $\exists$. Применив аксиому собирания к классу

$$R := \{\langle \bar{x}, y_1\rangle \colon (Q_2 y_2) \ldots (Q_k y_k)\ \psi(\bar{x}, y_1, \ldots, \bar{X})\}$$

и используя ограниченность, получим такой стандартный ординал $\alpha_1 \geqslant \alpha_0$, что

$$\begin{aligned}(\forall \bar{x} \in V_{\alpha_0})[(\exists y_1)(Q_2 y_2) \ldots (Q_k y_k)\ \psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{X}) \implies \\ \implies (\exists y_1 \in V_{\alpha_1})(Q_2 y_2) \ldots (Q_k y_k)\ \psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{X})].\end{aligned}$$

Предположение индукции, применённое к ординалу α_1 и формуле

$$(Q_2 y_2) \dots (Q_k y_k)\ \psi(\bar{x}, y_1, y_2 \dots, \bar{X}),$$

даёт такие стандартные $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \dots \leqslant \alpha_k$, что для всех $\bar{x}, y_1 \in V_{\alpha_1}$

$$(Q_2 y_2) \dots (Q_k y_k)\ \psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{X}) \iff (Q_2 y_2 \in V_{\alpha_2}) \dots (Q_k y_k \in V_{\alpha_k})\ \psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{X} \cap V_{\alpha_k}).$$

Тогда ясно, что

$$(\forall \bar{x} \in V_{\alpha_0})[(\exists y_1)(Q_2 y_2) \dots (Q_k y_k)\ \psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{X}) \iff \\ \iff (\exists y_1 \in V_{\alpha_1})(Q_2 y_2 \in V_{\alpha_2}) \dots (Q_k y_k \in V_{\alpha_k})\ \psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{X} \cap V_{\alpha_k})],$$

что и требовалось. □

Замечание. Отметим, что для доказательства не требуется вся сила схемы аксиом стандартной свёртки; достаточно лишь знать, что $\mathbb{S} \vDash \mathrm{ZFC}$ (чтобы иметь возможность определить стандартную кумулятивную иерархию и доказать, что она обладает обычными свойствами).

Теорема 2.2 (в предположении NCT$^-$). *Пусть φ — нормальная $\in$-формула. Если $\bar{X}$ — локально внутренние классы, то $X := \{x\colon \varphi(x, \bar{X})\}$ — локально внутренний класс* (*свёртка в* $\mathcal{L}$).

Доказательство. Не ограничивая общности, мы предполагаем, что φ имеет предварённую форму. Достаточно показать, что $X \cap V_{\alpha_0}$ есть множество для всех стандартных α_0. По лемме 2.1

$$x \in X \cap V_{\alpha_0} \iff x \in V_{\alpha_0} \wedge (Q_1 y_1 \in V_{\alpha_1}) \dots (Q_k y_k \in V_{\alpha_k})\ \psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{X} \cap V_{\alpha_k}) \equiv \chi(x).$$

Пересечения $X_i \cap V_{\alpha_k}$ — множества, $\mathbb{I} \vDash \mathrm{ZFC}$, и выделение для (классов, заданных посредством) $\in$-формул с параметрами-множествами имеет место в ZFC. Поэтому $X \cap V_{\alpha_0} = \{x \in V_{\alpha_0}\colon \chi(x)\}$ есть множество. □

Следствие 2.3 (в предположении NCT$^-$). $\mathcal{L}$ *удовлетворяет* NBG.

Доказательство. Теорема 2.2 показывает, что $\mathcal{L}$ удовлетворяет схеме свёртки для нормальных $\in$-формул. Экстенсиональность следует из включения $\mathbb{I} \subseteq \mathcal{L}$. Выделение заложено в определении $\mathcal{L}$. Остальные аксиомы $\mathcal{L}$ наследует от NCT$^-$. □

Следствие 2.4 (в предположении NCT$^-$). $\mathcal{L}$ *удовлетворяет принципу идеализации.*

Доказательство точно такое же, как доказательство в [1, теорема 3.10].

Следующая теорема показывает, что $\mathcal{I} = \mathcal{L}$ совместно с NCT, и даёт частичный ответ на вопрос из [1].

Теорема 2.5. $\mathrm{NCT} + \mathcal{S} \vDash$ «класс $\mathbb{O}n$ слабо компактен», *и в этой теории все локально внутренние классы являются внутренними.*

Замечание. Модель этой теории можно получить, взяв $V_{\kappa+1}$, где κ — некоторый слабо компактный кардинал, в качестве модели $\mathcal{N}$ теории NBGи расширив её до модели NCT методом из [1, раздел 5]. На самом деле это будет модель теории NKM + «выбор для классов в $\mathcal{S}$», о которой пойдёт речь в разделе 4.

Доказательство. Пусть X — локально внутренний p-хроматичный класс. Для любого стандартного α $X \cap V_\alpha$ есть p-хроматичное множество. Согласно [1, предложение 4.1] множество p-хроматично, если и только если оно p-стандартно. Поэтому $X \cap V_\alpha = (x)_p$ для некоторого стандартного $x \subseteq V_\alpha$. Пусть

$$T := {}^s\{\langle x, \alpha\rangle \colon x \subseteq V_\alpha \wedge (x)_p = X \cap V_\alpha\}.$$

Мы упорядочиваем T посредством

$$\langle x, \alpha\rangle \preceq \langle y, \beta\rangle \equiv \alpha \leqslant \beta \wedge x = y \cap V_\alpha.$$

T и $\preceq$ — стандартные классы, а $\langle T, \preceq\rangle$ — дерево, где каждая вершина $\langle x, \alpha\rangle$ имеет уровень α. Таким образом, каждый уровень T есть множество, и у T имеются ветви длины α для всех α. В силу слабой компактности $\mathbb{O}n$ T имеет ветвь B (стандартный класс) длины $\mathbb{O}n$. Положим

$$Y := \bigcup\{x \colon (\exists \alpha)(\langle x, \alpha\rangle \in B)\}.$$

Класс Y стандартен, и $(Y)_p = X$. □

Общая задача сводится к следующему комбинаторному вопросу об ультрапроизведениях.

Вопрос. Пусть U — ультрафильтр над I. Существует ли для данного класса $\langle A_\alpha \colon \alpha \in \mathbb{O}n\rangle$, где $A_\alpha = \langle A_\alpha(i) \colon i \in I\rangle$, $A_\alpha(i) \subseteq V_\alpha$ для всех $i \in I$ и из $\alpha < \beta$ следует $\{i \in I \colon A_\alpha(i) = V_\alpha \cap A_\beta(i)\} \in U$, такой класс A, что для всех $\alpha \in \mathbb{O}n$ выполняется $\{i \in I \colon A_\alpha(i) = V_\alpha \cap (A)_i\} \in U$?

В модели $\mathcal{N}$ теории NCT все локально внутренние классы являются внутренними тогда и только тогда, когда в её универсуме $\mathcal{S}$ стандартных классов ответ на этот вопрос положителен для всех ультрафильтров U и всех таких классов $\langle A_\alpha \colon \alpha \in \mathbb{O}n\rangle$, как описано выше.

3. NCT сильнее, чем NCT$^-$ плюс насыщенность

Андреев и Гордон [1] поставили вопрос о том, можно ли доказать аксиому хроматичности в теории NCT$^-$ плюс насыщенность. Мы даём отрицательный ответ. В этом разделе символ $\vDash$ имеет своё обычное значение в смысле теории моделей.

Теорема 3.1. *Пусть* $(\mathbb{H}, \varepsilon, \mathbb{S})$ *есть некоторая модель* HST*, и пусть*

$$\mathbb{I} := \{x \in \mathbb{H} \colon (\mathbb{H}, \varepsilon, \mathbb{S}) \vDash \text{«}x\text{ — внутреннее множество»}\}.$$

Найдётся модель $(\mathcal{N}, \varepsilon, \mathcal{S})$ *теории* NCT^{-} + насыщенность *и отображение* Φ, *которое сохраняет* ε, *отображает* $\mathbb{S}$ *на класс стандартных множеств модели* $\mathcal{N}$, $\mathbb{I}$ — *на класс всех множеств* $\mathcal{N}$, *а подмножества* $\mathbb{I}$ *в* $(\mathbb{H}, \varepsilon, \mathbb{S})$ — *на полумножества* $\mathcal{N}$.

Мы отождествляем x и $\Phi(x)$, когда (как мы надеемся) это не приводит к недоразумениям.

Доказательство. Пусть $(\mathbb{H}, \varepsilon, \mathbb{S})$ — модель HST. Отношение принадлежности ε этой модели не обязательно совпадает с $\in$, но, как в [8, 7.1.1], мы предполагаем, не ограничивая общности, что для $x \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{I}$ и $y \in \mathbb{H}$ выполнено $y \mathrel{\varepsilon} x \iff y \in x$. Пусть

$$\mathcal{E} := \{x \in \mathbb{H} \colon (\mathbb{H}, \varepsilon, \mathbb{S}) \models x \subseteq \mathbb{I}\};$$

в частности, $\mathbb{I} \subseteq \mathcal{E}$. При изучении структуры $(\mathcal{E}, \varepsilon, \mathbb{S})$ мы используем соглашения и терминологию в стиле NCT. В частности, переменные, записанные строчными буквами, пробегают $\mathbb{I}$ («множества»), а записанные прописными буквами $(E_1, E_2, \ldots)$ пробегают $\mathcal{E}$ («полумножества»).

Пусть $\mathcal{N}$ — совокупность всех классов $X \subseteq \mathbb{I}$, определимых в $(\mathcal{E}, \varepsilon, \mathbb{S})$ некоторой нормальной $\in$-**st**-формулой φ с параметрами из $\mathcal{E}$. Подразумевается, что всякий класс X, совпадающий с расширением некоторого множества (т. е. $(\exists x \in \mathbb{I})(\forall y \in \mathbb{I})(y \mathrel{\varepsilon} x \iff y \in X)$), отождествляется с этим множеством. Таким образом, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{N}$, и отношение ε на $\mathcal{E}$ имеет продолжение на $\mathcal{N}$, также обозначаемое через ε. Заметим, что $(\mathcal{N}, \varepsilon) \models$ «X есть множество» тогда и только тогда, когда $X \in \mathbb{I}$.

Отметим также, что $(\mathcal{E}, \varepsilon, \mathbb{S}) \models \varphi(x, \bar{E})$ (где $\bar{E} \in \mathcal{E}$) эквивалентно $(\mathbb{H}, \varepsilon, \mathbb{S}) \models \psi(x, \bar{E})$ для подходящей $\in$-**st**-формулы ψ, так что все $X \in \mathcal{N}$ также $\in$-**st**-определимы в $\mathbb{H}$. Согласно выделению в $\mathbb{H}$ всякое $\in$-**st**-определимое подмножество $a \in \mathbb{I}$ есть множество в $\mathbb{H}$ и, следовательно, принадлежит $\mathcal{E}$. Отсюда вытекает, что полумножества в $(\mathcal{N}, \varepsilon, \mathbb{S})$ — в точности элементы $\mathcal{E}$. Простые рассуждения показывают, что $(\mathcal{N}, \varepsilon)$ удовлетворяет аксиомам NBG (аксиома собирания следует из аксиомы собирания в $\mathbb{H}$). Кроме того, $(\mathbb{S}, \varepsilon) \models \mathrm{ZFC}$ и аксиома переноса в виде $(\mathbb{S}, \varepsilon) \models \varphi \iff (\mathbb{I}, \varepsilon) \models \varphi$ для любой $\in$-формулы φ с параметрами из $\mathbb{S}$ наследуются от $\mathbb{H}$.

Пусть $\mathcal{S}$ есть совокупность всех локально стандартных классов из $\mathcal{N}$, т. е.

$$X \in \mathcal{S} \equiv (\forall a \in \mathbb{S})(\exists b \in \mathbb{S})((\mathcal{N}, \varepsilon) \models \text{«}a \cap X = b\text{»})$$

для $X \in \mathcal{N}$. Теперь мы работаем в $(\mathcal{N}, \varepsilon, \mathcal{S})$, снова используя соглашения NCT.

Ясно, что $(\mathcal{N}, \varepsilon, \mathcal{S}) \models$ «x есть стандартное множество», если и только если $x \in \mathbb{S}$. Итак,

x стандартно в $(\mathcal{N}, \varepsilon, \mathcal{S})$, если и только если $x \in \mathbb{S}$;
x есть множество в $(\mathcal{N}, \varepsilon, \mathcal{S})$, если и только если $x \in \mathbb{I}$;
X есть полумножество $(\mathcal{N}, \varepsilon, \mathcal{S})$, если и только если $X \in \mathcal{E}$.

Выделение для стандартных классов выполняется в $(\mathcal{N}, \varepsilon, \mathcal{S})$ по определению $\mathcal{S}$. $(\mathcal{N}, \varepsilon, \mathcal{S})$ наследует от $\mathbb{H}$ аксиомы *ограниченности, идеализации* и *насыщенности*. Определение $\mathcal{S}$ даёт нам возможность заменить произвольную нормальную $\in$-**st**-формулу на эквивалентную ей строго нормальную формулу (ср. первый абзац доказательства теоремы 4.1), поэтому имеет место *свёртка* для всех нормальных $\in$-**st**-формул. Докажем оставшиеся аксиомы. Мы рассуждаем в $\mathcal{C}$.

Стандартизация. Для любого полумножества E существование такого стандартного множества ${}^{s}E$, что $({}^{s}E) \cap \mathbb{S} = E \cap \mathbb{S}$, наследуется от $\mathbb{H}$. Пусть X — произвольный класс. Согласно свёртке для нормальных формул класс ${}^{s}X := \bigcup_{a \in \mathbb{S}} {}^{s}(a \cap X)$ существует. Поскольку $({}^{s}X) \cap b = {}^{s}(b \cap X)$ стандартен для всех $b \in \mathbb{S}$, имеем ${}^{s}X \in \mathcal{S}$.

Перенос. Достаточно показать, что если $X \in \mathcal{S}$ и $\mathbb{S} \subseteq X$, то $\mathbb{I} \subseteq X$. Действительно, при этих предположениях для любого $a \in \mathbb{S}$ выполняется $a \cap \mathbb{S} \subseteq a \cap X$ и $a \cap X$ стандартно, откуда $a = a \cap X \subseteq X$. По ограниченности $\mathbb{I} \subseteq X$.

Стандартная свёртка. Пусть $\bar{X} \in \mathcal{S}$ и $\varphi(x, \bar{X})$ есть нормальная $\in$-формула. Класс $X := \{x \colon \varphi(x, \bar{X})\} \in \mathcal{N}$ существует согласно свёртке. Нам нужно доказать, что $X \in \mathcal{S}$. Без ограничения общности можно считать, что формула $\varphi(x, \bar{X}) \equiv (Q_1 y_1) \ldots (Q_k y_k)\ \psi(x, \bar{y}, \bar{X})$ находится в предварённой форме. Аксиом NCT^-, истинность которых в $\mathcal{N}$ была нами уже установлена, достаточно, чтобы увидеть, что лемма 2.1 имеет место в $\mathcal{N}$. Рассуждая в $\mathcal{N}$, имеем, что для каждого стандартного ординала α_0 существуют такие стандартные ординалы $\alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_k$, что

$$x \in X \cap V_{\alpha_0} \iff x \in V_{\alpha_0} \wedge (Q_1 y_1 \in V_{\alpha_1}) \ldots (Q_k y_k \in V_{\alpha_k}) \psi(x, \bar{y}, \bar{X} \cap V_{\alpha_k}) \equiv \chi(x).$$

Так как $\bar{X} \in \mathcal{S}$, $X_i \cap V_{\alpha_k}$ — стандартные множества. Формула $\chi(x)$ справа является поэтому $\in$-формулой со стандартными множествами в качестве параметров. Используя перенос из $\mathbb{S}$ в $\mathbb{I}$ и выделение в $\mathbb{S}$ ($(\mathbb{S}, \varepsilon) \models \mathrm{ZFC}$), мы заключаем, что

$$\{x \in V_{\alpha_0} \colon \chi(x)\} = \{x \in V_{\alpha_0} \colon \chi^{\mathbf{st}}(x)\}$$

есть стандартное множество. $\square$

Как следствие теоремы 3.1 и работ Кановея и Реекена по форсингу в HST мы получаем ответ на вопрос Андреева и Гордона [1].

Теорема 3.2. *Теория* $\mathcal{T} \equiv \mathrm{NCT}^- +$ насыщенность $+ \neg\mathrm{ACC}$ *является консервативным расширением* ZFC.

Доказательство. Мы покажем, что всякая счётная модель $(\mathbb{S}, \varepsilon)$ теории ZFC может быть расширена до модели теории $\mathcal{T}$. Процедуры расширения $(\mathbb{S}, \varepsilon)$ до $(\mathbb{I}, \varepsilon, \mathbb{S}) \models \mathrm{BST}$ и затем до $(\mathbb{L}[\mathbb{I}], \varepsilon, \mathbb{S}) \models \mathrm{HST}$ описаны в [8]. Используя форсинг, Кановей и Реекен строят дальнейшее расширение $(\mathbb{H}, \varepsilon, \mathbb{S}) \models \mathrm{HST}$, такое что $\mathbb{I}$ есть класс внутренних множеств в $\mathbb{H}$ и $(\exists X \subseteq \mathbb{I})(X \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{L}[\mathbb{I}])$. Пусть $(\mathcal{N}, \varepsilon, \mathcal{S})$ есть модель теории $\mathrm{NCT}^- +$ насыщенность, соответствующая этому $\mathbb{H}$ в формулировке теоремы 3.1. Тогда X есть полумножество в $\mathcal{N}$, но X не является хроматическим в $\mathcal{N}$. (Если бы это было не так, то

$\mathcal{N} \vDash$ «$X = \bigcup\limits_{u \in {}^{\circ}C} \mathfrak{M}_p(u)$ для некоторого $p \in \mathbb{I}$ и $C \in \mathbb{S}$» по [1, теорема 4.16], определение $\mathfrak{M}_p(u)$ см. в разделе 4. Но $\mathfrak{M}_p(u)$ и ${}^{\circ}C$ в $\mathbb{L}[\mathbb{I}]$ те же, что $\mathfrak{M}_p(u)$ и ${}^{\circ}C$ в $\mathbb{H}$, из чего следовало бы, что $X \in \mathbb{L}[\mathbb{I}]$.) $\square$

Вопрос о том, можно ли заменить ZFC на NBG в теореме 3.2, является открытым.

Кановей и Реекен сформулировали *свойство изоморфизма* Хенсона для теории HST и показали, что оно совместно с HST [8, теорема 7.3.1]. Их формулировку можно перенести в NCT^{-}.

Язык L есть класс-функция из ${}^{\circ}\kappa$ в ${}^{\circ}\omega$ для некоторого кардинала κ. *L-структура* есть пара $\langle A, R\rangle$, где A — множество и для каждого $\alpha \in {}^{\circ}\kappa$ $(A)_\alpha$ есть подмножество $A^{L(\alpha)}$ (т. е. внутреннее $L(\alpha)$-арное отношение на α). Отношение выполнимости для $\langle A, R\rangle$ требует немного аккуратности (NCT^{-} не допускает кванторов по полумножествам). Для каждого стандартного конечного $a \subseteq {}^{\circ}\kappa$ ограничение $R \restriction a$ есть множество, и выполнимость Sat_a для $\langle A, R \restriction a\rangle$ есть однозначно определённое множество. Мы берём ограничение Sat'_a множества Sat_a на стандартные формулы и полагаем Sat равным объединению Sat'_a по всем стандартным конечным $a \subseteq {}^{\circ}\kappa$. Две L-структуры *элементарно эквивалентны*, если они удовлетворяют одним и тем же стандартным предложениям.

Свойство изоморфизма: для любого языка L всякие две элементарно эквивалентные L-структуры изоморфны.

Рассуждения, проведённые при доказательстве теоремы 3.2, доказывают с использованием [8, теорема 7.3.2] следующую теорему.

Теорема 3.3. *Теория* NCT^{-} + насыщенность + свойство изоморфизма *есть консервативное расширение теории* ZFC.

Как было отмечено во введении, свойство изоморфизма противоречит ACC.

4. Нестандартная теория множеств Келли—Морса

Схема свёртки теории NBG постулирует существование класса $\{x \colon \varphi(x)\}$ для любой *нормальной* формулы φ. *Теория множеств Келли—Морса* KM является усилением теории NBG, в котором свёртка постулируется для *всех* формул. В. Г. Кановей поставил (в частной беседе) вопрос о том, совместна ли свёртка для всех $\in$-**st**-формул с нестандартной теорией классов. Положительный ответ на этот вопрос был дан в [5], переработанная версия [5] и составляет настоящий раздел. Впоследствии Кановей [7] передоказал и расширил ряд результатов из [5] путём более традиционных рассуждений в духе BST. В частности, он вывел сильную форму собирания из свойства редукции (следствие 4.10, 5)). С другой стороны, представляется, что методы Кановея не доказывают теоремы 4.1.

Мы начнём с результата о теории NCT. В этом разделе переменные $u, v, w, \ldots$ используются для обозначения ультрафильтров. Отношение эквивалентности $\sim$

на ультрафильтрах определяется следующим образом:

$$u \sim v \equiv \text{«}u \cap v \text{ есть ультрафильтр»}$$

(см. [1]). Класс X *$\sim$-замкнут*, если из $u \in X$, $u \sim v$ следует, что $v \in X$. Переменные $U, V, \ldots$ принимают значения стандартных $\sim$-замкнутых классов ультрафильтров.

Если u есть ультрафильтр над $I := \bigcup u$, а f — функция, определённая на I, то $f(u) := \{a \subseteq f[I] \colon f^{-1}[a] \in u\}$ есть ультрафильтр над $f[I]$. Мы говорим, что u над I является *n-арным*, если $I \cap \mathbb{I}^n \in u$. Пусть $\pi_i \colon \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ есть проекция на i-ю координату; $\pi_i(\langle x_1, \ldots, x_n \rangle) = x_i$.

Если u — стандартный ультрафильтр и p — множество, то

$$\mathfrak{M}(u) := \{x \colon (\forall^{\mathbf{st}} a \in u)(x \in a)\}$$

есть *монада* u и

$$\mathfrak{M}_p(u) := \{x \colon \langle p, x \rangle \in \mathfrak{M}(u)\}.$$

Мы пишем $\mathfrak{K}(X, U, p)$, если $X = \bigcup\limits_{u \in {}^\circ U} \mathfrak{M}_p(u)$.

Если u, v стандартны и $\mathfrak{M}(u) \cap \mathfrak{M}(v) \neq \varnothing$, то $u \sim v$. Кроме того, если $u \sim v$ и $\mathfrak{M}_p(u) \neq \varnothing$, $\mathfrak{M}_p(v) \neq \varnothing$, то $\pi_1(u) \sim \pi_1(v)$.

Аксиома хроматичности классов эквивалентна $(\forall X)(\exists U, p)\mathfrak{K}(X, U, p)$ (ср. [1, теорема 4.16]).

Следующая теорема является вариантом алгоритма редукции Нельсона, в NCT она применима ко всем формулам.

Теорема 4.1 (в предположении NCT). *Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_k)$ есть $\in$-$\mathbf{st}$-формула. Найдётся такая $\in$-формула $\Phi(u, U_1, \ldots, U_k)$ (которую можно эффективно построить по φ), что для любых $x_1, \ldots, x_n$, $X_1, \ldots, X_k$, $p_1, \ldots, p_k$ и стандартных u, $U_1, \ldots, U_k$, если выполняется $\mathfrak{K}(X_i, U_i, p_i)$ для всех $1 \leqslant i \leqslant k$ и $\langle x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_k \rangle \in \mathfrak{M}(u)$, то*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_k) \iff \Phi^{\mathbf{st}}(u, U_1, \ldots, U_k).$$

Доказательство. Прежде всего заменим в φ

каждое вхождение $X \in Y$ на $(\exists x)(x = X \wedge x \in Y)$;
каждое вхождение $X \in y$ на $(\exists x)(x = X \wedge x \in y)$;
каждое вхождение $\mathbf{st}(X)$ на

$$(\forall z)(\mathbf{st}(z) \implies (\exists y)[\mathbf{st}(y) \wedge (\forall u)(u \in y \iff u \in X \wedge u \in z)];$$

каждое вхождение $X = Y$ на $(\forall z)(z \in X \iff z \in Y)$ и аналогично для $X = y$, $x = Y$, $x = y$.

Следовательно, мы можем считать, что атомарные подформулы φ могут быть только трёх видов: $x \in y$, $x \in X$, $\mathbf{st}(x)$.

Далее мы используем некоторые проектирующие отображения, определённые на $\mathbb{I}^{n+k}$:

$\pi_i(\langle c_1, \ldots, c_{n+k}\rangle) := c_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n+k$;
$\tilde{\pi}_{i,j}(\langle c_1, \ldots, c_{n+k}\rangle) := \langle c_j, c_i\rangle$ для $1 \leqslant i < j \leqslant n+k$;
$\pi_i^*(\langle c_1, \ldots, c_{n+k}\rangle) := \langle c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_{n+k}\rangle$ для $1 \leqslant i \leqslant n+k$.

Теперь применим индукцию по сложности φ.

1. $\varphi \equiv x_i \in x_j$. Тогда Φ — формула, выражающая утверждение

$$«\Big\{\langle a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k\rangle \in \bigcup u\colon a_i \in a_j\Big\} \in u».$$

2. $\varphi \equiv x_i \in X_j$. Тогда Φ — формула, выражающая утверждение

$$«u \text{ является } (n+k)\text{-арным} \wedge \tilde{\pi}_{i,n+j}(u) \in U_j».$$

3. $\varphi \equiv \mathbf{st}(x_i)$. Тогда Φ — формула, выражающая утверждение

$$«u \text{ является } (n+k)\text{-арным} \wedge \text{ультрафильтр } \pi_i(u) \text{ главный}»,$$

т. е.

$$«(\exists a)\Big(\Big\{\langle a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k\rangle \in \bigcup u\colon a_i = a\Big\} \in u\Big)».$$

4. $\varphi \equiv \neg\psi$. Тогда

$$\Phi \equiv \neg\Psi.$$

5. $\varphi \equiv \psi_1 \vee \psi_2$ (не ограничивая общности, можно принять, что $\psi_1 \equiv \equiv \psi_1(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_k)$ и $\psi_2 \equiv \psi_2(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_k)$). Тогда

$$\Phi \equiv \Psi_1 \vee \Psi_2.$$

6. $\varphi \equiv (\exists y)\ \psi(y, x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_k)$. Тогда

$$\Phi \equiv (\exists v)(v \text{ является } (n+k+1)\text{-арным} \wedge \pi_1^*(v) \sim u \wedge \Psi(v, U_1, \ldots, U_k)).$$

7. $\varphi \equiv (\exists Y)\ \psi(x_1, \ldots, x_n, Y, X_1, \ldots, X_k)$. Тогда

$$\Phi \equiv (\exists v)(\exists V)$$
$$(v \text{ является } (n+k+1)\text{-арным} \wedge \pi_{n+1}^*(v) \sim u \wedge \Psi(v, V, U_1, \ldots, U_k)).$$

Доказательства корректности шагов 1—6 тривиальны и/или хорошо известны [1,2]. Докажем корректность шага 7.

Предположим, что выполняется $\psi(x_1, \ldots, x_n, Y, X_1, \ldots, X_k)$. Фиксируем такое q и стандартное V, что $\mathfrak{K}(Y, V, q)$, и такое $v \in \mathbb{S}$, что $\langle x_1, \ldots, x_n, q, p_1, \ldots, p_k\rangle \in \in \mathfrak{M}(v)$. По предположению индукции $\Psi(v, V, U_1, \ldots, U_k)$ выполняется в $\mathcal{S}$. Кроме того, $\langle x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_k\rangle \in \mathfrak{M}(\pi_{n+1}^*(v))$, значит, $\pi_{n+1}^*(v) \sim u$. Тем самым доказано, что

$$\mathcal{S} \vDash (\exists v)(\exists V)$$
$$[v \text{ является } (n+k+1)\text{-арным} \wedge \pi_{n+1}^*(v) \sim u \wedge \Psi(v, V, U_1, \ldots, U_k)].$$

Чтобы доказать обратное, зафиксируем $(n+k+1)$-арное $v \in \mathbb{S}$ со свойством $\pi_{n+1}^*(v) \sim u$ и такое $V \in \mathcal{S}$, что $\mathcal{S} \vDash \Psi(v, V, U_1, \ldots, U_k)$. Воспользуемся предположением индукции и идеализацией, чтобы найти такое множество q, что $\langle x_1, \ldots, x_n, q, p_1, \ldots, p_k\rangle \in \mathfrak{M}(v)$. Пусть $Y := \bigcup_{w \in {}^\circ V} \mathfrak{M}_q(w)$. Тогда выполняется $\mathfrak{K}(Y, V, q)$. Таким образом, по предположению индукции имеет место $\psi(x_1, \ldots, x_n, Y, X_1, \ldots, X_k)$ и, наконец, выполняется

$$(\exists Y)\psi(x_1, \ldots, x_n, Y, X_1, \ldots, X_k) \equiv \varphi(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_k). \quad \square$$

Если класс X стандартен, то можно взять $p = \varnothing$ и определить

$$U_X := \Big\{u \colon (\exists v)(u \sim v \wedge \bigcup v \subseteq \{\varnothing\} \times X\Big\}.$$

Тогда выполняется $\mathfrak{K}(X, U, p)$. Отсюда получаем несколько следствий.

Следствие 4.2 (свойство редукции для всех формул). *Для каждой $\in$-$\mathbf{st}$-формулы φ найдётся такая $\in$-формула Ψ, что*

$$\begin{aligned}&\mathrm{NCT} \vdash (\forall^{\mathbf{st}} \bar{X})(\forall x_1, \ldots, x_n)\\ &\qquad [\varphi(x_1, \ldots, x_n, \bar{X}) \iff (\exists^{\mathbf{st}} u)(\forall^{\mathbf{st}} a \ \in u)\ (\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in a \wedge \Psi^{\mathbf{st}}(u, \bar{X}))].\end{aligned}$$

Следствие 4.3 (стандартизация для определимых совокупностей классов). *Для каждой $\in$-$\mathbf{st}$-формулы $\varphi(\bar{x}, \bar{X}, Y)$ найдётся такая $\in$-формула $\Psi(u, \bar{U}, Y)$, что для любых $\bar{x}$ и $\bar{X}$ найдутся такие стандартные u и $\bar{U}$, что*

$$(\forall^{\mathbf{st}} Y)[\varphi(\bar{x}, \bar{X}, Y) \iff \Psi^{\mathbf{st}}(u, \bar{U}, Y)].$$

Доказательство. Зафиксируем $\bar{x}$ и $\bar{X}$, стандартный $\bar{U}$ и $\bar{p}$ так, что выполняется $\mathfrak{K}(X_i, U_i, p_i)$. Зафиксируем также такое стандартное u, что $\langle \bar{x}, \bar{p}, \varnothing\rangle \in \mathfrak{M}(u)$. Теперь для стандартных Y

$$\varphi(\bar{x}, \bar{X}, Y) \iff \Phi^{\mathbf{st}}(u, \bar{U}, U_Y) \iff \Psi^{\mathbf{st}}(u, \bar{U}, Y). \quad \square$$

Нестандартная теория множеств Келли—Морса NKM — это теория NCT плюс $\mathcal{S} \vDash$ свёртка для всех $\in$-формул (откуда $\mathcal{S} \vDash$ KM).

Предложение 4.4. *Теория* NKM *является консервативным расширением теории* KM.

Доказательство. Пусть $\mathcal{N}$ — произвольная модель KM. По [1, теорема 5.1] найдётся модель $\mathcal{C}$ теории NCT, в которую $\mathcal{N}$ вложена в качестве совокупности всех стандартных классов. Эта модель $\mathcal{C}$ тогда удовлетворяет NKM. $\square$

Теорема 4.5 (в предположении NKM). *Свёртка выполняется для всех $\in$-$\mathbf{st}$-формул.*

Доказательство. Пусть $\varphi(x, X_1, \ldots, X_k)$ — произвольная $\in$-$\mathbf{st}$-формула. Пусть $\Phi(u, U_1, \ldots, U_k)$ — соответствующая $\in$-формула из теоремы 4.1. Фиксируем такие $U_i \in \mathcal{S}$, p_i, что $\mathfrak{K}(X_i, U_i, p_i)$. Поскольку $\mathcal{S} \vDash$ KM, существует такой класс $U \in \mathcal{S}$, что

$$\mathcal{S} \vDash (\forall u)(u \in U \iff \Phi(u, U_1, \ldots, U_k)).$$

Теперь положим

$$X := \{x\colon (\exists u \in {}^\circ U)(\langle x, p_1, \ldots, p_k\rangle \in \mathfrak{M}(u))\}.$$

Тогда $(\forall x)(x \in X \iff \varphi(x, X_1, \ldots, X_k))$. $\square$

Относительно системы NKM возникают дальнейшие естественные вопросы. Выполняется ли в NKM стандартная свёртка для всех $\in$-формул? Какова ситуация с теоремой переноса и принципом идеализации? В общем случае эти вопросы открыты; однако они имеют положительные ответы в несколько более сильной теории.

Пусть KM^+ есть KM плюс схема аксиом

выбор множества классов: пусть φ — произвольная $\in$-формула. Для всех $\bar{X}$ и всех множеств a

$$(\forall x \in a)(\exists Y)\ \varphi(x, \bar{X}, Y) \implies (\exists Y)(\forall x \in a)\ \varphi(x, \bar{X}, (Y)_x).$$

Пусть NKM^+ есть NKM плюс $\mathcal{S} \vDash$ выбор множества классов.

Теперь мы будем работать в NKM^+ и докажем некоторые структурные результаты о подуниверсумах NKM^+, аналогичные фактам, хорошо известным для BST или NCT [8, раздел 6.1, особенно предложение 6.1.9].

Теория NKM^+ достаточно сильна для того, чтобы дать возможность строить ультрастепени её стандартного универсума. Пусть u — стандартный ультрафильтр над I. Единственная требующая некоторого внимания техническая деталь состоит в том, что «классозначные функции с областью определения I» должны быть закодированы классами. Итак, для $X, Y \in \mathcal{S}$ определим

$$X =_u Y \equiv \{i \in I\colon (X)_i = (Y)_i\} \in u, \quad X \in_u Y \equiv \{i \in I\colon (X)_i \in (Y)_i\} \in u.$$

Ультрастепень стандартного универсума по модулю ультрафильтра u — это структура $\mathcal{U}lt(\mathcal{S}, u) := (\mathcal{S}, =_u, \in_u)$. Разумеется, $\mathcal{S}$ есть совокупность классов, поэтому речь идёт лишь о неформальном обозначении. $\mathcal{U}lt(\mathcal{S}, u) \vDash \varphi$ есть сокращение для формулы, полученной из φ путём замены $=$, $\in$ на $=_u$, $\in_u$ и ограничения всех кванторов совокупностью $\mathcal{S}$. Для любого стандартного класса X $\mathfrak{k}(X) := I \times X$ есть постоянная функция со значением X.

Предложение 4.6 (теорема Лося). *Пусть φ — любая $\in$-формула. Тогда для любых $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{S}$*

$$\mathcal{U}lt(\mathcal{S}, u) \vDash \varphi(X_1, \ldots, X_n) \iff \{i \in I\colon \mathcal{S} \vDash \varphi((X_1)_i, \ldots, (X_n)_i)\} \in u.$$

В частности,

$$\mathcal{U}lt(\mathcal{S}, u) \vDash \varphi(\mathfrak{k}(X_1), \ldots, \mathfrak{k}(X_n)) \iff \mathcal{S} \vDash \varphi(X_1, \ldots, X_n).$$

Неформально, $\mathfrak{k}$ есть элементарное вложение $(\mathcal{S}, \in)$ в $\mathcal{U}lt(\mathcal{S}, u)$.

Доказательство. Утверждение доказывается обычным рассуждением с применением принципа выбора множества классов. $\square$

Предложение 4.7. *Пусть $p \in \mathfrak{M}(u)$. Имеется канонический изоморфизм $\mathcal{G}_p$ между $\mathcal{U}lt(\mathcal{S}, u)$ и $\mathcal{S}[p]$, при этом $\mathcal{G}_p(\mathfrak{k}(X)) = X$ для всех $X \in \mathcal{S}$.*

Доказательство. Для $X \in \mathcal{S}$ определим $\mathcal{G}_p(X) = (X)_p$. $\square$

Предложение 4.8. *Для всех p, q $\mathcal{S}[p]$ является элементарной подмоделью $\mathcal{S}[p,q]$.*

Доказательство. Фиксируем такие стандартные ультрафильтры u над I и v над $I \times J$, что $p \in \mathfrak{M}(u)$ и $\langle p,q\rangle \in \mathfrak{M}(v)$. Пусть $\pi\colon I \times J \to I$ есть проекция на первую координату. Тогда $u = \pi(v)$, что индуцирует элементарное вложение Π структуры $\mathcal{U}lt(\mathcal{S},u)$ в $\mathcal{U}lt(\mathcal{S},v)$, если положить $(\Pi(X))_{\langle i,j\rangle} = (X)_i$ для $\langle i,j\rangle \in I \times J$. Заметим, что $\Pi(\mathfrak{k}(X)) = \mathfrak{k}(X)$ для всех X. (Выбор множества классов используется в доказательстве того, что вложение Π является элементарным.)

Мы имеем также следующие канонические изоморфизмы: $\mathcal{G}_p$ между $\mathcal{U}lt(\mathcal{S},u)$ и $\mathcal{S}[p]$ и $\mathcal{G}_{p,q}$ между $\mathcal{U}lt(\mathcal{S},v)$ и $\mathcal{S}[p,q]$. Композиция $\mathcal{G}_p^{-1}$ с Π и $\mathcal{G}_{p,q}$ есть, таким образом, элементарное вложение. Легко проверить (используя перенос для нормальных $\in$-формул), что это просто отображение вложения $\mathcal{S}[p]$ в $\mathcal{S}[p,q]$. $\square$

Предложение 4.9. *Для всех p структура $(\mathcal{S}[p],\in)$ является элементарной подмоделью $(\mathcal{I},\in$. В частности, $(\mathcal{S},\in)$ есть элементарная подмодель $(\mathcal{I},\in)$.*

Доказательство. Рассуждаем индукцией по сложности φ одновременно для всех p. Пусть $\varphi \equiv (\exists Y)\psi(Y,\bar{X})$, $\bar{X} \in \mathcal{S}[p]$, $\mathcal{I} \vDash \varphi$. Фиксируем такой класс $Y \in \mathcal{I}$, что $\mathcal{I} \vDash \psi(Y,\bar{X})$. По определению $\mathcal{I}$ $Y \in \mathcal{S}[q]$ для некоторого q. Тогда $\bar{X}, Y \in \mathcal{S}[p,q]$, и по предположению индукции $\mathcal{S}[p,q] \vDash \psi(Y,\bar{X})$. Значит, $\mathcal{S}[p,q] \vDash (\exists Y)\psi(Y,\bar{X})$. По предложению 4.8 $\mathcal{S}[p]$ есть элементарная подмодель $\mathcal{S}[p,q]$, так что $\mathcal{S}[p] \vDash (\exists Y)\psi(Y,\bar{X})$, т. е. $\mathcal{S}[p] \vDash \varphi$. $\square$

Мы пишем $\varphi^{\mathbf{int}}$ вместо $\mathcal{I} \vDash \varphi$.

Следствие 4.10 (в предположении NKM$^+$).

1. *Принцип переноса выполняется для произвольных $\in$-формул*:
$$(\forall^{\mathbf{st}}\bar{X})(\varphi^{\mathbf{st}}(\bar{X}) \iff \varphi^{\mathbf{int}}(\bar{X})).$$
2. *Стандартная свёртка выполняется для произвольных $\in$-формул*:
$$(\forall^{\mathbf{st}}\bar{X})(\exists^{\mathbf{st}}Y)(\forall x)(x \in Y \iff \varphi^{\mathbf{int}}(x,\bar{X})).$$
3. $\mathcal{I} \vDash \mathrm{KM}^+$.
4. *Принцип идеализации. Пусть $\varphi(x,y,\bar{X})$ — любая $\in$-формула. Для всех $\bar{X} \in \mathcal{I}$ и всех стандартных a*
$$(\forall a_0 \in {}^{\circ}\mathcal{P}^{\mathrm{fin}}(a))(\exists y)(\forall x \in a)\ \varphi^{\mathbf{int}}(x,y,\bar{X}) \iff (\exists y)(\forall x \in {}^{\circ}a)\ \varphi^{\mathbf{int}}(x,y,\bar{X}).$$
5. *Свойство редукции. Пусть $\varphi(\bar{x},\bar{X})$ есть $\in$-$\mathbf{st}$-формула. Найдётся такая $\in$-формула χ, что*
$$(\forall\bar{x})(\varphi(\bar{x},\bar{X}) \iff (\exists^{\mathbf{st}}u)(\forall^{\mathbf{st}}a)\ \chi^{\mathbf{int}}(\bar{x},\bar{X}))$$
для всех стандартных $\bar{X}$.

Доказательство. Утверждение 1 есть предложение 4.9. Докажем утверждение 2. Пусть $\varphi(x,\bar{X})$ — произвольная $\in$-формула и $\bar{X}\in\mathcal{S}$. По свёртке в $\mathcal{S}$ существует такой стандартный класс Y, что

$$(\forall^{\mathbf{st}}x)(x\in Y \iff \varphi^{\mathbf{st}}(x,\bar{X})).$$

По принципу переноса (утверждение 1) тогда имеем

$$(\forall x)(x\in Y \iff \varphi^{\mathbf{int}}(x,\bar{X})).$$

Утверждение 3 имеет место по переносу, а утверждение 4 доказывается так же, как в [1]. Чтобы доказать утверждение 5, отметим, что в обозначениях замечания после доказательства теоремы 4.1 мы имеем

$$(\forall^{\mathbf{st}}u,\bar{X})(\Psi^{\mathbf{st}}(u,\bar{X}) \iff \Psi^{\mathbf{int}}(u,\bar{X})).$$

Положим

$$\chi(u,a,\bar{x},\bar{X})\equiv u \text{ — ультрафильтр} \wedge (a\in u \implies \langle\bar{x}\rangle\in a)\wedge\Psi(u,\bar{X}). \quad \square$$

Теорема 4.11 (в предположении NKM$^+$). (*Принцип идеализации классов.*) *Пусть $\varphi(x,Y,\bar{X})$ — любая $\in$-формула. Для любых $\bar{X}\in\mathcal{I}$ и любых стандартных a имеем*

$$(\forall c\in{}^\circ\mathcal{P}^{\mathrm{fin}}(a))(\exists^{\mathbf{int}}Y)(\forall x\in c)\ \varphi^{\mathbf{int}}(x,Y,\bar{X}) \iff (\exists^{\mathbf{int}}Y)(\forall x\in{}^\circ a)\ \varphi^{\mathbf{int}}(x,Y,\bar{X}).$$

Доказательство. Импликация справа налево тривиальна. Допустим, что для каждого стандартного конечного $c\subseteq a$ имеет место

$$(\exists^{\mathbf{int}}Y)(\forall x\in c)\ \varphi^{\mathbf{int}}(x,Y,\bar{X}),$$

т. е.

$$(\exists^{\mathbf{st}}W)(\exists p)(\forall x\in c)\ \varphi^{\mathbf{int}}(x,(W)_p,\bar{X}).$$

В силу следствия 4.3 и выбора множества классов (или, как альтернативы, выбора стандартного размера для классов (теорема 4.12) и стандартизации) существует такой стандартный W, что для всех стандартных конечных $c\subseteq a$ выполняется $(\exists p)(\forall x\in c)\ \varphi^{\mathbf{int}}(x,((W)_c)_p,\bar{X})$. Другими словами,

$$(\forall c\in{}^\circ\mathcal{P}^{\mathrm{fin}}(a))(\exists p,b)\ (\forall x\in c)(x\in b\wedge\varphi^{\mathbf{int}}(x,((W)_b)_p,\bar{X}).$$

Применяя принцип идеализации из следствия 4.10, получаем

$$(\exists p,b)(\forall x\in{}^\circ a)(x\in b\wedge\varphi^{\mathbf{int}}(x,((W)_b)_p,\bar{X}).$$

Положив $Y:=(W_b)_p$, завершаем доказательство. $\square$

Стандартный универсум теории NKM$^+$ удовлетворяет схеме выбора множества классов. Естественным образом возникает вопрос, выполняется ли аналогичный принцип для всего универсума NKM$^+$.

Выбор стандартного размера для классов: пусть $\varphi(x,\bar{X},Y)$ есть любая $\in$-$\mathbf{st}$-формула. Для всех $\bar{X}$ и всех стандартных множеств a

$$(\forall^{\mathbf{st}}x\in a)(\exists Y)\ \varphi(x,\bar{X},Y) \implies (\exists Y)(\forall^{\mathbf{st}}x\in a)\ \varphi(x,\bar{X},(Y)_x).$$

Теорема 4.12 (в предположении NKM$^+$). *Принцип выбора стандартного размера для классов выполняется.*

Доказательство. С помощью теоремы 4.1 мы легко получаем такую $\in$-формулу $\Phi(x, v, \bar{U}, V)$, что если $\langle \bar{p}, q\rangle \in \mathfrak{M}(v)$, $\mathfrak{K}(X_i, U_i, p_i)$ для $1 \leqslant i \leqslant k$ и $\mathfrak{K}(Y, V, q)$, то

$$(\forall^{\mathbf{st}} x)(\varphi(x, \bar{X}, Y) \iff \Phi^{\mathbf{st}}(x, v, \bar{U}, V)).$$

Фиксируем такие $\bar{X}$ и u, что $\bar{p} \in \mathfrak{M}(u)$. Мы утверждаем, что для стандартных x

$$(\exists Y)\varphi(x, \bar{X}, Y) \iff (\exists^{\mathbf{st}} v)(\exists^{\mathbf{st}} V) \\ (v \text{ является } (k+1)\text{-арным} \wedge \pi^*_{k+1}(v) \sim u \wedge \Phi^{\mathbf{st}}(x, v, \bar{U}, V)).$$

Импликация слева направо следует из предыдущих рассуждений. Обратно, для данных стандартных v и V, таких что $\pi^*_{k+1}(v) \sim u \wedge \Phi^{\mathbf{st}}(x, v, \bar{U}, V)$, мы имеем $\langle \bar{p}\rangle \in \mathfrak{M}(u)$, и из $\pi^*_{k+1}(v) \sim u$ по идеализации получаем такое q, что $\langle \bar{p}, q\rangle \in \mathfrak{M}(v)$. Положим $Y := \bigcup_{w \in {}^\circ V} \mathfrak{M}_q(w)$. Тогда $\mathfrak{K}(Y, V, q)$ и выполняется $\varphi(x, \bar{X}, Y)$.

Теперь предположим, что $(\forall^{\mathbf{st}} x \in a)(\exists Y)\varphi(x, \bar{X}, Y)$. Тогда

$$(\forall x \in a)(\exists v)(\exists V)(v \text{ является } (k+1)\text{-арным} \wedge \pi^*_{k+1}(v) \sim u \wedge \Phi(x, v, \bar{U}, V))$$

есть $\in$-формула, истинная в $\mathcal{S}$, и согласно выбору множества классов найдутся стандартный класс V и стандартная последовательность $\langle v_x : x \in a\rangle$, такие что

$$(\forall^{\mathbf{st}} x \in a)(v_x \text{ является } (k+1)\text{-арным} \wedge \pi^*_{k+1}(v_x) \sim u \wedge \Phi^{\mathbf{st}}(x, v_x, \bar{U}, (V)_x)).$$

Согласно выбору стандартного размера существует такая последовательность $\langle q_x : x \in {}^\circ a\rangle$, что для всех $x \in {}^\circ a$ справедливо $\langle \bar{p}, q_x\rangle \in \mathfrak{M}(v_x)$. Пусть

$$Y := \Big\{\langle x, y\rangle : x \in {}^\circ a \wedge y \in \bigcup_{w \in {}^\circ (V)_x} \mathfrak{M}_{q_x}(w)\Big\}.$$

Тогда $\mathfrak{K}((Y)_x, (V)_x, q_x)$ и, значит, $\varphi(x, \bar{X}, (Y)_x)$ выполняется для всех $x \in {}^\circ a$.

Выбор стандартного размера имеет место в NCT, поскольку он имеет место в EEST [8, теорема 5.2.14], а универсум полумножеств NCT образует модель EEST [1, предложение 4.18]. □

Следующее усиление принципа выбора множества классов совместно с KM (ср. модель KM$^+$, образованную структурой $\langle V_{\kappa+1}, \in\rangle$, где κ — строго недостижимый кардинал).

Выбор для классов: пусть $\varphi(x, \bar{X}, Y)$ — произвольная $\in$-формула. Для всех $\bar{X}$

$$(\forall x)(\exists Y)\ \varphi(x, \bar{X}, Y) \implies (\exists Y)(\forall x)\ \varphi(x, \bar{X}, (Y)_x).$$

По [1, теорема 5.1] выбор для классов в $\mathcal{S}$ можно без противоречия добавить к NKM в качестве аксиомы. Однако, в отличие от его аналога для множества классов, даже простые случаи выбора для классов для $\in$-$\mathbf{st}$-формул несовместны.

Теорема 4.13. *Существует нормальная* $\in$-$\mathbf{st}$*-формула* $\rho(u, y)$*, такая что*

$$\mathrm{NCT} \vdash (\forall^{\mathbf{st}} u)(\exists y)\rho(u, y) \wedge \neg(\exists F)(\forall^{\mathbf{st}} u)\rho(u, F(u)).$$

Доказательство. Мы работаем в NCT. Положим

$$\rho(u, y) \equiv \text{«}u \text{ есть ультрафильтр»} \wedge (\forall^{\mathbf{st}} a \in u)(y \in a).$$

Для всех стандартных u $\mathfrak{M}(u) \neq \varnothing$ по идеализации, так что $(\exists y)\rho(u, y)$. Пусть F есть функция выбора для ρ. По ACC F является p-хроматичной для како-го-то $p \in I$, где множество I стандартно. Для каждого стандартного u $F(u)$ есть p-хроматичное множество и, значит, $F(u) \in \mathbb{S}[p]$ [1, предложение 4.1]. Это противоречие, поскольку для любого равномерного ультрафильтра u на любом стандартном кардинале λ, где $cf(\lambda) > |I|$, имеем $\mathfrak{M}(u) \cap \mathbb{S}[p] = \varnothing$. (Это можно легко усмотреть из канонического изоморфизма между $\mathbb{S}[p]$ и $\mathcal{U}lt(\mathbb{S}, u_p)$, где u_p — ультрафильтр на I и $p \in \mathfrak{M}(u_p)$.) □

В заключение заметим, что *ограниченная* версия принципа выбора, рассмотренного в теореме 4.13, тем не менее имеет место в NCT.

Теорема 4.14 (в предположении NCT). *Пусть R — класс и a — произвольное стандартное множество. Тогда*

$$(\exists F)(\forall^{\mathbf{st}} x)[(\exists y \in a)(\langle x, y\rangle \in R) \implies \langle x, F(x)\rangle \in R].$$

Доказательство. Мы можем считать, что $R \subseteq \mathbb{S} \times a$. Из ACC получим $p \in I$, где множество I стандартно, и такой стандартный класс C, что

$$\langle x, y\rangle \in R \iff y \in \bigcup_{\langle x, u\rangle \in {}^\circ C} \mathfrak{M}_p(u),$$

где каждое u есть некоторый ультрафильтр над $I \times a$. Пусть u_p — такой стандартный ультрафильтр над I, что $p \in \mathfrak{M}(u_p)$. Пусть

$$b := \{u \colon u \text{ — ультрафильтр над } I \times a \wedge \pi_1(u) = v\}.$$

b стандартно, и по выбору стандартного размера найдётся такая класс-функция G, определённая на ${}^\circ b$, что $G(u) \in \mathfrak{M}_p(u)$ для всех $u \in {}^\circ b$. Мы фиксируем некоторый стандартный полный порядок $\leqslant$ на b и определяем $F(x) := G(u^x)$, где u^x есть $\leqslant$-первый ультрафильтр u в b, такой что $\langle x, u\rangle \in C$. □

5. Стандартность не является $\in$-определимой

Кановей и Реекен [8] поставили вопрос о том, можно ли в HST определить стандартный универсум посредством какой-либо $\in$-формулы. Открытая проблема 4 в [2] — аналогичный вопрос для NCT. Здесь мы даём отрицательные ответы на оба этих вопроса.

Теорема 5.1.

1. *Пусть* $\varphi(x)$ — $\in$*-формула с единственной свободной переменной* x (*и все переменные пробегают множества*). *Тогда эквивалентность*
$$(\forall x)(\mathbf{st}(x) \iff \varphi(x))$$
недоказуема в HST (*в предположении непротиворечивости* ZFC).
2. *Пусть* $\varphi(x)$ — $\in$*-формула с единственной свободной переменной* x. *Тогда эквивалентность*
$$(\forall x)(\mathbf{st}(x) \iff \varphi(x))$$
недоказуема в NCT (*в предположении непротиворечивости* ZFC).

Нам нужно будет сформулировать и расширить некоторые результаты из [2]. За разъяснением понятий, относящихся к форсингу, мы отсылаем к книге Йеха [6]. Мы работаем в ZFC плюс

аксиома X: $V = L[G]$, где G является $\mathcal{B}$-генерическим множеством над конструктивным универсумом L, а $\mathcal{B} \in L$ — какая-то слабо однородная безатомная полная булева алгебра.

Мы фиксируем $\mathcal{B}$, G и (определимое из $\mathcal{B}$, G) для каждого $b \in \mathcal{B}$, $b \neq 0$ такое $\mathcal{B}$-генерическое $G_b \neq G$, что $b \in G_b$ и $V = L[G_b]$. Пусть $I := \mathcal{P}^{\mathrm{fin}}(\mathcal{B})$, и пусть U — такой ультрафильтр над I, что $\{B \in I : b \in B\} \in U$ для каждого $b \in \mathcal{B}$. Полагаем $b^+ := b$, если $b \in G$, в противном случае $b^+ := 1 - b$. Для каждого $B \in I$, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, пусть
$$\bar{b} := b_1^+ \wedge \ldots \wedge b_n^+ \in G$$
и $G_B := G_{\bar{b}}$. Заметим, что для $b \in G$ и $B \in I$ мы имеем $b \in B \implies b \in G_B$.

Если $\dot{x} \in L$ есть имя для x, т. е. $x = i_G(\dot{x})$, определим
$$\mathfrak{j}(x) := \langle i_{G_B}(\dot{x}) : B \in I \rangle \in V^I.$$

Лемма 5.2 ([2, лемма 6]). *Пусть* $\mathfrak{k} \colon V \to V^I/U$ *есть каноническое элементарное вложение. Существует такое определимое элементарное вложение* $\mathfrak{j} \colon V \to V^I/U$, *что* $\operatorname{ran} \mathfrak{k} \nsubseteq \operatorname{ran} \mathfrak{j}$ *в* V^I/U.

Мы отсылаем к [2, лемма 6 и следующее за ним замечание] за определением отображения $\mathfrak{j}$ и доказательством его свойств, сформулированных в лемме 5.2.

Лемма 5.3. *Если* $V^I/U \vDash$ «$\mathfrak{j}(x) \in L$», *то* $x \in L$ *и* $\mathfrak{j}(x) =_U \mathfrak{k}(x)$.

Доказательство. Пусть $x \in V$, и пусть $\dot{x} \in L$ есть некоторое имя для x.

Если существует такое $b \in G$, что $b \leqslant [|\dot{x} \notin L|]^{\mathcal{B}}$, то
$$b \in B \implies b \in G_B \implies i_{G_B}(\dot{x}) \notin L.$$
Поскольку $\{B \in I : b \in B\} \in U$, отсюда следует, что $V^I/U \vDash$ «$\mathfrak{j}(x) \notin L$».

Если существует такое $b \in G$, что $b \leqslant [|\dot{x} \in L|]^{\mathcal{B}}$, то найдутся $b' \in G$, $b' \leqslant b$ и $z \in L$, такие что $b' \leqslant [|\dot{x} = \check{z}|]^{\mathcal{B}}$ (где $\check{z}$ — каноническое имя для z). Следовательно, $x = i_G(\dot{x}) = z \in L$ и
$$b' \in B \implies b' \in G_B \implies i_{G_B}(\dot{x}) = x.$$

Получаем, что

$$\{B \in I : i_{G_B}(\dot{x}) = x\} \supseteq \{B \in I : b' \in B\} \in U,$$

т. е. $\mathfrak{j}(x) =_U \mathfrak{k}(x)$. □

Обратное тривиально верно: если $x \in L$, то $x = i_G(\check{x})$ и

$$\mathfrak{j}(x) = \langle i_{G_B}(\check{x}) : B \in I \rangle = \langle x : B \in I \rangle = \mathfrak{k}(x).$$

Теперь мы работаем в теории BST + X. Пусть L есть класс конструктивных множеств; $L \cap \mathbb{S}$ будет тогда классом стандартных конструктивных множеств. Используя перенос, зафиксируем стандартные $\mathcal{B}$, G, U и G_b для $b \in \mathcal{B}$, $b \neq 0$, и определим $\mathfrak{j}$ как выше. Зафиксируем также $p \in \mathfrak{M}(U)$. Ограничение ультрастепени универсума по модулю U на стандартный универсум $\mathbb{S}^I/U := {}^\circ(V^I/U)$ (отметим, что в BST $V = \mathbb{I}$) канонически изоморфно $\mathbb{S}[p]$ посредством отображения $\mathfrak{g}_p$, где $\mathfrak{g}_p(f) := f(p)$ ([2, предложение 6], [8, предложение 6.1.9]). Отображение $\mathfrak{g}_p \circ \mathfrak{k}$ тождественно на $\mathbb{S}$; мы определяем $\mathbb{U} := \mathfrak{g}_p[\mathfrak{j}[\mathbb{S}]]$. Из лемм 5.2 и 5.3 немедленно получается следствие 5.4 (см. [2, следствие 5]).

Следствие 5.4.

1. $(\mathbb{I}, \in, \mathbb{U})$ *удовлетворяет принципу переноса.*
2. $\mathbb{U} \neq \mathbb{S}$.
3. $L \cap \mathbb{U} = L \cap \mathbb{S}$.

Также легко заметить следующее.

4. $\mathbb{U}$ *определим в* $(\mathbb{I}, \in, \mathbb{S})$ ($\in$-**st**-формулой с параметрами $\mathcal{B}$, G и p).
5. *Имеется изоморфизм* $\mathbb{F}$ *между* $(\mathbb{U}, \in)$ *и* $(\mathbb{S}, \in)$, *определимый в* $(\mathbb{I}, \in, \mathbb{S})$.
6. $(\mathbb{I}, \in, \mathbb{U})$ *удовлетворяет* BST.
7. *Класс* $\mathbb{S}$ *определим в* $(\mathbb{I}, \in, \mathbb{U})$ ($\in$-**st**-формулой с параметрами $\mathcal{B}$, G).

Для доказательства пункта 5 положим $\mathbb{F} := \mathfrak{g}_p \circ (\mathfrak{j} \restriction \mathbb{S})$.

Докажем пункт 6. *Перенос* есть первый пункт следствия 5.4.

Ограниченность следует из того, что, согласно замечанию после доказательства леммы 5.3, $\mathbb{S} \cap \mathbb{O}n \subseteq \mathbb{U}$ и, значит, $V_\alpha \in \mathbb{U}$ для всех $\alpha \in \mathbb{S} \cap \mathbb{O}n$ по переносу.

Стандартизация немедленно получается из изоморфизма (см. 5) между $(\mathbb{U}, \in)$ и $(\mathbb{S}, \in)$ и стандартизации в $(\mathbb{I}, \in, \mathbb{S})$.

Для проверки *ограниченной идеализации* достаточно показать, что в $(\mathbb{I}, \in, \mathbb{U})$ имеет место насыщенность (для определимых X). Пусть X имеет стандартный размер в $(\mathbb{I}, \in, \mathbb{U})$. Тогда он имеет стандартный размер также и в $(\mathbb{I}, \in, \mathbb{S})$ (согласно 5). Легко видеть, что утверждение «x является S-конечным» выполняется в $(\mathbb{I}, \in, \mathbb{S})$ тогда и только тогда, когда оно выполняется в $(\mathbb{I}, \in, \mathbb{U})$. Заключение теперь следует из насыщенности в $(\mathbb{I}, \in, \mathbb{S})$.

Докажем пункт 7. Пусть $N \subseteq L$ — класс всех имён (элементов $\mathcal{B}$-значного универсума, определённого в L). По лемме 5.3 $N \cap \mathbb{U} = N \cap \mathbb{S}$. Следовательно, $\mathbb{S} = \{i_G(\dot{x}) : \dot{x} \in N \cap \mathbb{U}\}$.

Резюме. $(\mathbb{I}, \in, \mathbb{S})$ *и* $(\mathbb{I}, \in, \mathbb{U})$ *удовлетворяют* BST*, класс* $\mathbb{U}$ *определим в* $(\mathbb{I}, \in, \mathbb{S})$*, класс* $\mathbb{S}$ *определим в* $(\mathbb{I}, \in, \mathbb{U})$ *и* $\mathbb{S} \neq \mathbb{U}$.

В завершение докажем теорему 5.1.

Доказательство.

1. Мы работаем в теории HST+«аксиома X верна в $\mathbb{I}$», непротиворечивой относительно ZFC. Пусть $\mathbb{E}$ — класс всех элементарных внешних множеств, т. е. подмножеств внутреннего универсума $\mathbb{I}$, определимых в $(\mathbb{I}, \in, \mathbb{S})$ (см. [8]). Из резюме следует, что $\mathbb{E}$ есть также класс всех подмножеств внутреннего универсума $\mathbb{I}$, определимых в $(\mathbb{I}, \in, \mathbb{U})$. Кроме того, элементарное внешнее множество фундировано в $(\mathbb{I}, \in, \mathbb{S})$ тогда и только тогда, когда оно фундировано в $(\mathbb{I}, \in, \mathbb{U})$. Кановей и Реекен [8] показали, как использовать «сборку вдоль фундированных деревьев в $\mathbb{E}$» для построения наименьшего класса $\mathbb{H}$, содержащего $\mathbb{I}$ и такого, что $(\mathbb{H}, \in, \mathbb{S})$ удовлетворяет HST. Используя приведённые выше замечания, можно легко проверить, что $(\mathbb{H}, \in, \mathbb{U})$ также удовлетворяет HST.

Предположим, что $\mathrm{HST} \vdash (\forall x)(\mathbf{st}(x) \iff \varphi(x))$ для некоторой $\in$-формулы φ. Пусть $\mathbb{C}$ есть класс, определённый формулой $\varphi(x)$ в $(\mathbb{H}, \in)$. Тогда мы имеем

$$(\mathbb{H}, \in, \mathbb{S}) \vDash (\forall x)(\mathbf{st}(x) \iff \varphi(x)),$$

откуда $\mathbb{C} = \mathbb{S}$. Аналогично, выполняется

$$(\mathbb{H}, \in, \mathbb{U}) \vDash (\forall x)(\mathbf{st}(x) \iff \varphi(x)),$$

откуда $\mathbb{C} = \mathbb{U}$. Следовательно, $\mathbb{S} = \mathbb{U}$ — противоречие.

2. Мы следуем соглашениям раздела 3. Пусть $\mathcal{B} := (\mathbb{I}, \varepsilon, \mathbb{S})$ является моделью BST + X. Тогда мы имеем такой класс $\mathbb{U} \neq \mathbb{S}$, что $\mathcal{B}' := (\mathbb{I}, \varepsilon, \mathbb{U})$ также модель BST + X, а совокупность $\mathcal{C}$ $\in$-$\mathbf{st}$-определимых в $\mathcal{B}$ классов совпадает с совокупностью классов, $\in$-$\mathbf{st}$-определимых в $\mathcal{B}'$. Пусть $\mathcal{S}$ $(\mathcal{U})$ есть совокупность $\in$-определимых в $\mathcal{B}$ (соответственно в $\mathcal{B}'$) классов с параметрами в $\mathbb{S}$ (соответственно в $\mathbb{U}$). Используя тот факт, что «$X = \bigcup_{x \in^\circ C} \mathfrak{M}_p(x)$ для некоторого $C \in \mathcal{S}$ $(C \in \mathcal{U})$» выполняется в $\mathcal{B}$ (соответственно в $\mathcal{B}'$) для каждого $X \in \mathcal{C}$, по [1, теорема 5.1] получаем, что как $(\mathcal{C}, \varepsilon, \mathcal{S})$, так и $(\mathcal{C}, \varepsilon, \mathcal{U})$ — модели NCT. Как и в доказательстве теоремы 3.1, подразумевается, что любой класс, совпадающий с расширением некоторого множества в $\mathbb{I}$, отождествляется с этим множеством.]

Предположим, что $\mathrm{NCT} \vdash (\forall x)(\mathbf{st}(x) \iff \varphi(x))$. Пусть

$$\mathbb{C} := \{x \in \mathbb{I} \colon (\mathcal{C}, \varepsilon) \vDash \varphi(x)\}.$$

Рассуждение, аналогичное последнему абзацу доказательства пункта 1, показывает, что $\mathbb{C} = \mathbb{S}$ и $\mathbb{C} = \mathbb{U}$ — противоречие. □

По [2, теорема 5] получаем такую формулу $\varphi(x)$, что теория $\mathrm{NCT} + (\forall x)(\mathbf{st}(x) \iff \varphi(x))$ непротиворечива (относительно ZFC). Открыт вопрос, существует ли такая формула $\varphi(x)$ (в которой все переменные пробегают множества), что теория $\mathrm{HST}+(\forall x)(\mathbf{st}(x) \iff \varphi(x))$ непротиворечива относительно ZFC.

Литература

[1] Andreev P. V., Gordon E. I. An axiomatics for nonstandard set theory, based on von Neumann–Bernays–Gödel theory // J. Symbolic Logic. — 2001. — Vol. 66. — P. 1321—1341.

[2] Andreev P. V., Hrbacek K. Standard sets in nonstandard set theory // J. Symbolic Logic. — 2004. — Vol. 69. — P. 165—182.

[3] Hrbacek K. Axiomatic foundations for nonstandard analysis // Fund. Math. — 1978. — Vol. 98. — P. 1—19; abstract // J. Symbolic Logic. — 1976. — Vol. 41. — P. 285.

[4] Hrbacek K. Nonstandard objects in set theory // Proc. Conf. "Nonstandard Methods and Applications in Mathematics" (Pisa, 2002).

[5] Hrbacek K. Nonstandard Kelley–Morse set theory. — Preprint. — 2004.

[6] Jech T. Set Theory. — New York: Academic Press, 1978.

[7] Kanovei V. On Kelley–Morse type nonstandard theories. — Preprint. — 2004.

[8] Kanovei V., Reeken M. Nonstandard Analysis, Axiomatically. — Berlin: Springer, 2004.

[9] Nelson E. Internal set theory: A new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc. — 1977. — Vol. 83. — P. 1165—1198.