К теореме Маркова об алгоритмической нераспознаваемости многообразий

М. А. ШТАНЬКО
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

УДК 515.16+510.5

Ключевые слова: алгоритмическая распознаваемость, теорема Маркова, последовательность Адяна групповых заданий, группа Борисова.

Аннотация

Доказывается, что число слагаемых в связной сумме произведений сфер, которая, как было показано, является алгоритмически нераспознаваемым многообразием, можно снизить до 14. Отмечается, что многообразие, построенное Марковым в его первой работе о нераспознаваемости, совпадает с указанной прямой суммой (в которой число слагаемых равно числу соотношений в групповых заданиях последовательности Адяна).

Abstract

M. A. Stan'ko, To the Markov theorem on algorithmic nonrecognizability of manifolds, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 5, pp. 257—259.

We prove that the number of summands in the connected union of product of spheres which is algorithmically nonrecognizable, as was shown earlier, can be reduced to 14. Also, we note that the manifold constructed by Markov himself in his original work on topological nonrecognizability coincides with such union (where the number of summands is equal to the quantity of relations in group representations of the corresponding Adian sequence).

Эта статья служит дополнением к [5], где было дано доказательство теоремы Маркова с помощью техники ручек и было показано, что в качестве нераспознаваемого многообразия размерности $n \geqslant 4$ может быть взята связная сумма 16 слагаемых, каждое из которых гомеоморфно $S^2 \times S^{n-2}$. Здесь мы показываем, что, во-первых, число слагаемых может быть уменьшено до 14 и, во-вторых, конструкция самого Маркова приводит к нераспознаваемости этой же связной суммы, где число слагаемых совпадает с числом соотношений в групповых заданиях из последовательности Адяна [1].

1. Напомним ход рассуждений в [5]. Для данного финитного задания $\Pi_G = \langle m, k \rangle$ группы G с m образующими и k соотношениями берётся двумерный комплекс K_G в $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geqslant 4$, состоящий из букета m окружностей (границ треугольников с одной общей вершиной) и k приклеенных к ним двумерных клеток, где приклейка каждого диска направляется соответствующим соотношением из Π_G стандартным образом (см. [3, § 47]). Фундаментальная группа

$\pi_1(K_G)$ комплекса изоморфна G. Регулярная окрестность комплекса K_G называется полным кренделем рода m и размерности $n+1$. Она продолжается до регулярной окрестности N_G комплекса K_G. При этом фундаментальные группы многообразия N_G и его края $\partial N_G = M_G$ совпадают с G благодаря тому, что $n+1 \geqslant 5$.

Затем к N_G приклеивается ещё m ручек (по числу образующих) тривиальным образом, т. е. так, что их подошвенные сферы ограничивают в M_G диски. Возникает многообразие $\tilde{N}_G$, край которого $\tilde{M}_G$ назовём *многообразием Маркова*. Фундаментальные группы $\tilde{N}_G$ и $\tilde{M}_G$ остаются равными G.

Оказывается, что в случае $G = 1$ полученное многообразие не зависит от выбранного группового задания и на самом деле это есть указанная выше связная сумма.

Именно, имеется гомеоморфизм $\mathbb{R}^{n+1}$ на себя, который переводит также на себя многообразие N_G, при котором подошвенные окружности приклеенных тривиальных ручек переходят в замкнутые кривые, проецирующиеся в окружности исходного букета при естественной ретракции окрестности N_G на K_G. Из того, что порядок приклейки ручек не имеет значения, вытекает, что многообразие $\tilde{N}_G$ получается приклейкой k ручек к $(n+1)$-мерной клетке. В таком случае $\tilde{N}_G$ есть регулярная окрестность букета из k двумерных сфер и край такого многообразия есть связная сумма k произведений S^2 на сферу дополнительной размерности.

Таким образом, в случае $G = 1$ мы получаем одно и то же многообразие независимо от выбранного группового задания для G. Обозначим это многообразие $\tilde{M}_1$.

Наоборот, если $G \neq 1$, то многообразие $\tilde{M}$ будет отлично от такой суммы, так как его фундаментальная группа есть $G \neq 1$.

2. Выберем теперь последовательность Адяна групповых заданий Π_i для групп G_i, каждое с m образующими и k соотношениями, для которой не существует алгоритма, распознающего тривиальную группу среди групп G_i. Построим для каждого Π_i многообразие Маркова $\tilde{M}_i$, имеющее фундаментальную группу G и совпадающее с $\tilde{M}_1$, если $G = 1$. Существование алгоритма распознавания для $\tilde{M}_1$ невозможно, так как такой алгоритм одновременно служил бы для распознавания тривиальной группы в последовательности Адяна, поскольку построение многообразий Маркова по групповому заданию эффективно.

Возникает задача минимизации числа слагаемых для многообразия M_1.

До настоящего времени минимальное число l, для которого известно групповое задание группы с неразрешимой проблемой тождества, имеющее l соотношений, — это 12. Примером служит группа Борисова, построенная им в [2]. Экономный способ построения последовательности Адяна с помощью такой группы даётся приёмом Гордона—Миллера (см. [6]). Именно, по групповому заданию Π_G с p образующими и q соотношениями группы G строится последовательность групп G_w и их заданий Π_{G_w}, где $w \in G$, такая что $G_w = 1$, если $w = 1$, и $G \subset G_w$, если $w \neq 1$. В частности, в последнем случае $G_w \neq 1$. При этом число соотношений в Π_{G_w} увеличивается только на 2 по сравнению с Π_G (а число образующих равно двум).

Если теперь применить эту конструкцию к группе Борисова, то мы получим последовательность Адяна групповых заданий с двумя образующими и 14 соотношениями. Это даст нам последовательность многообразий Маркова, в которой нераспознаваемое многообразие есть связная сумма 14 произведений двумерной сферы на $(n-2)$-мерную сферу.

3. Обратимся теперь к первоначальному построению А. А. Маркова [4]. Вместо приклеивания ручек он пользуется заимствованной из [3] техникой проведения «туннелей», т. е. переклейки трубчатых окрестностей замкнутых кривых в n-мерной сфере. На такой туннель следует смотреть как на подошву ручки индекса 2.

Именно, в S^n берётся n-мерный полный крендель P_k^n рода k (регулярная окрестность букета из k окружностей). Его удвоение $2P_k^n$ (т. е. склейка двух экземпляров P_k^n по тождественному гомеоморфизму края) есть край полного кренделя P_k^{n+1} рода k и размерности $n+1$, с которого мы начали построение в п. 1. В P_k^n берутся туннели, обходящие ручки кренделя в соответствии с соотношениями данного группового задания. Эти туннели выкидываются и на их место подклеиваются по тождественным гомеоморфизмам дополнительные к ним в S^n подпространства. Однако ввиду того что в S^n замкнутая кривая без самопересечений не заузливает и вложение туннелей эквивалентно стандартному вложению трубчатой окрестности окружности, такая замена в точности эквивалентна сферической перестройке края многообразия при приклеивании к нему ручки индекса 2. Таким образом, первоначальное построение Маркова даёт в точности то же многообразие, что и в п. 1, т. е. связную сумму k произведений сфер, где k — число соотношений в групповых заданиях выбранной последовательности Адяна.

Литература

[1] Адян С. И. Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем в теории групп // Тр. ММО. — 1957. — Т. 6. — С. 231—298.

[2] Борисов В. В. Простые примеры групп с неразрешимой проблемой тождества // Мат. заметки. — 1969. — Т. 6. — С. 521—532.

[3] Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.

[4] Марков А. А. Неразрешимость проблемы гомеоморфии // ДАН СССР. — 1958. — Т. 121, № 2. — С. 218—220.

[5] Штанько М. А. Теорема А. А. Маркова и алгоритмически нераспознаваемые комбинаторные многообразия // Изв. РАН. Сер. мат. — 2004. — Т. 68, № 1. — С. 207—224.

[6] Miller C. F. Decision problems for groups — survey and reflection // Math. Sci. Res. Inst. Publ. — 1992. — Vol. 23. — P. 1—59.