О нижних оценках количества локальных минимумов целочисленных решёток*

М. О. АВДЕЕВА

*Хабаровский государственный педагогический университет,
Хабаровское отделение
Института прикладной математики ДВО РАН
e-mail: avmariya@yandex.ru*

УДК 511.36+511.37

Ключевые слова: геометрия чисел, целочисленная решётка, локальный минимум, непрерывная дробь.

Аннотация

Доказана нижняя оценка для максимального значения количества локальных минимумов целочисленных решёток заданного определителя, совпадающая с верхней с точностью до константы.

Abstract

M. O. Avdeeva, The lower bound for the number of local minima of integral lattices, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 6, pp. 9–14.

A lower bound for the maximal number of local minima of integral lattices with preassigned determinant is derived. This bound coincides with the upper one up to a constant.

Введение

Напомним, что любую $(s + 1)$ -мерную решётку можно представить в виде

$$\Gamma = \{m_0\gamma^{(0)} + \dots + m_s\gamma^{(s)} \mid m_0, m_1, \dots, m_s \in \mathbb{Z}\}.$$

Здесь $\gamma^{(i)} = (\gamma_0^{(i)}, \dots, \gamma_s^{(i)})$ — линейно независимые векторы в $\mathbb{R}^{s+1}$, составляющие базис решётки Γ с определителем $D(\Gamma) = |\det(\gamma_j^{(i)})|$.

Назовём ненулевой узел $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_s)$ *локальным минимумом (относительный минимум* в терминологии Г. Ф. Вороного [4]) решётки Γ , если не существует другого ненулевого узла $\eta = (\eta_0, \dots, \eta_s)$ из Γ , для которого $|\eta_i| \leq |\gamma_i|$ при $i = 0, \dots, s$ и $|\eta_j| < |\gamma_j|$ хотя бы при одном $i = j$. Множество всех локальных минимумов решётки Γ обозначим через $\mathfrak{M}(\Gamma)$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 04-01-97000 и INTAS № 03-51-5070.

Для двумерных решёток

$$\Gamma_\alpha = \{m_0(1, \alpha) + m_1(0, 1) \mid m_0, m_1 \in \mathbb{Z}\}$$

с $\alpha \in (0, 1/2)$ из теоремы Лагранжа о наилучших приближениях непосредственно следует, что

$$\mathfrak{M}(\Gamma_\alpha) = \{\pm(Q_i, \alpha Q_i - P_i) \mid i = 0, 1, \dots\}. \quad (0.1)$$

Здесь $Q_0 = 0$ и $P_0 = 1$, а для $i \geq 1$ $P_i/Q_i = [0; t_1, \dots, t_{i-1}]$ — i -я подходящая дробь к вещественному $\alpha = [0; t_1, \dots, t_i, \dots]$. Последнее равенство является разложением α в цепную дробь с неполными частными $t_i \in \mathbb{N}$. Именно это обстоятельство послужило мотивировкой для многомерного обобщения классических непрерывных дробей в рамках теории локальных минимумов, восходящей к Г. Ф. Вороному и Г. Минковскому.

Для целочисленных решёток Γ множество $\mathfrak{M}(\Gamma)$ конечно и играет важную роль при изучении погрешностей квадратурных формул Коробова с параллелепипедальными сетками (см. [2, 3, 5]).

Пусть

$$T_s(N) = \sup_{\Gamma} \#\mathfrak{M}(\Gamma) -$$

верхняя грань числа элементов $\mathfrak{M}(\Gamma)$ по всем целочисленным $(s + 1)$ -мерным решёткам определителя N . В [2, 3] была доказана оценка

$$T_s(N) \ll_s \log_2^s(N + 1),$$

конкретизированная Н. М. Добровольским (см. [5, глава VI]) в виде

$$T_s(N) \leq 2(s + 1)(3 + 8 \log_2 N)^s \quad (0.2)$$

и уточненная в [1] с заменой правой части на $3(3 + 4 \log_2 N)^s$.

С помощью (0.1) легко проверить, что при $s = 1$ $T_1(N) = 2L(N) + 2$, где $L(N)$ — максимальное значение длины разложения A/N в конечную цепную дробь по всем целым A . Таким образом, оценку (0.2) можно рассматривать как многомерное обобщение хорошо известного факта об экспоненциальном росте знаменателей подходящих дробей.

В настоящей работе рассматривается вопрос о нижних оценках величины $T_s(N)$. Для случая $s = 1$ с помощью дробей u_n/u_{n+1} , составленных из последовательных чисел Фибоначчи, сравнительно просто доказывается неравенство

$$T_1(N) \geq \frac{1}{2} \log_2 N + O(1).$$

Для получения такого типа оценок при $s \geq 2$ мы рассматриваем решётки $\Gamma_N(a) = \Gamma_N(a_1, \dots, a_s)$, состоящие из всех $(n_0, n_1, \dots, n_s) \in \mathbb{Z}^{s+1}$, для которых

$$n_0 + a_1 n_1 + \dots + a_s n_s \equiv 0 \pmod{N}.$$

Здесь $a = (a_1, \dots, a_s) \in \mathbb{Z}^s$, и для всех таких a определитель $\Gamma_N(a)$ равен N . Интересующая нас нижняя оценка в виде

$$T_s(N) \geq \frac{1}{s!} \left(\frac{1}{2(s+1)} \right)^s \log_2^s N + O_s(\log_2^{s-1} N)$$

непосредственно вытекает из следующего главного результата работы.

Теорема. Для любого натурального N при $s \geq 2$

$$\sum_{a_1, \dots, a_s=1}^N \#\mathfrak{M}(\Gamma_N(a)) \geq \frac{1}{s!} \left(\frac{1}{2(s+1)} \right)^s N^s \log_2^s N + O_s(N^s \log_2^{s-1} N).$$

Автор благодарит В. А. Быковского за внимание и полезные советы.

1. Вспомогательные утверждения

Из теоремы Минковского о линейных формах непосредственно следует лемма 1.

Лемма 1. Пусть $x_0, x_1, \dots, x_s$ — положительные вещественные числа, такие что

$$x_0 x_1 \dots x_s = N.$$

Тогда существуют хотя бы два локальных минимума $\pm\gamma \in \Gamma_N(a)$, для которых $|\gamma_i| \leq x_i$ при всех $i = 0, 1, \dots, s$ и $|\gamma_j| < x_j$ не менее чем для одного $i = j$.

Пусть $\mathbb{Z}_+^{s+1}$ — множество целочисленных наборов $k = (k_0, k_1, \dots, k_s)$ с $k_j \geq 0$ при всех $j = 0, 1, \dots, s$ и для них $\|k\| = k_0 + k_1 + \dots + k_s$. Положим

$$\mathbb{Z}_+^{s+1}(t) = \{k \in \mathbb{Z}_+^{s+1} \mid \|k\| = t\}.$$

Разумеется, при отрицательных целых t множества $\mathbb{Z}_+^{s+1}(t)$ пусты.

Зафиксируем вещественные $\lambda, \xi \in (1; \infty)$ и обозначим через $\mathcal{P}(k) = \mathcal{P}_{\lambda, \xi}(k)$ параллелепипед в $\mathbb{R}^{s+1}$, состоящий из всех точек $x = (x_0, x_1, \dots, x_s)$, для которых:

- 1) $|x_0| \leq \xi \lambda^{k_0}$;
- 2) $|x_j| \leq \lambda^{k_j}$ при всех остальных $j = 1, \dots, s$.

Определим для всех целых t множества

$$\mathcal{P}_t = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_+^{s+1}(t)} \mathcal{P}(k),$$

пустые при $t < 0$.

Лемма 2. Пусть X — произвольное конечное множество точек из $\mathbb{R}^{s+1}$. Тогда для любого целого t

$$\#(X \cap \mathcal{P}_t) = \sum_{l=0}^s (-1)^l C_s^l \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^{s+1}(t-l)} \#(X \cap \mathcal{P}(k)).$$

Доказательство. Для пустого $X \cap \mathcal{P}_t$ утверждение леммы тривиально. Пусть теперь x — некоторая точка из $X \cap \mathcal{P}_t$. Разумеется, это возможно только при $t \geq 0$. Определим $t' = t'(x)$ как наименьшее целое, для которого $x \in \mathcal{P}_{t'}$. Если k и k' — различные элементы из $\mathbb{Z}_+^{s+1}(t')$, такие что x одновременно принадлежит $\mathcal{P}(k)$ и $\mathcal{P}(k')$, то

$$x \in \mathcal{P}(k) \cap \mathcal{P}(k') = \mathcal{P}(k'')$$

с $k''_j = \min\{k_j, k'_j\}$ при $j = 0, 1, \dots, s$. Но в таком случае $\|k''\| < \|k\| = \|k'\| = t'$, что противоречит минимальности выбора t' . Поэтому имеется единственное $k' = k'(x)$ из $\mathbb{Z}_+^{s+1}(t')$, для которого $x \in \mathcal{P}(k')$.

Заметим, что

$$x \in \mathcal{P}(k) \iff k = k' + k''$$

с некоторым $k'' \in \mathbb{Z}_+^{s+1}(t-t')$. Поэтому количество всех $k \in \mathbb{Z}_+^{s+1}(t)$, для которых $x \in \mathcal{P}(k)$, совпадает с числом решений уравнения

$$k''_0 + k''_1 + \dots + k''_s = t - t' \quad (k''_j \geq 0),$$

равным

$$C_{t-t'+s}^s = \frac{(t-t'+s)!}{s!(t-t)!}.$$

Определим функцию $f_s: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, положив

$$f_s(m) = \begin{cases} 0, & \text{если } m < 0, \\ C_{m+s}^s, & \text{если } m \geq 0, \end{cases}$$

для которой

$$\Delta f_s(m) = f_s(m) - f_s(m-1) = f_{s-1}(m).$$

Согласно теории конечных разностей

$$\Delta^s f_s(m) = \sum_{l=0}^s (-1)^l C_s^l f_s(m-l) = f_0(m) = \begin{cases} 0, & \text{если } m < 0, \\ 1, & \text{если } m \geq 0. \end{cases}$$

Отсюда немедленно следует утверждение леммы 2, поскольку число наборов $k \in \mathbb{Z}_+^{s+1}(t-l)$ с $x \in \mathcal{P}(k)$ равно $f_s(t-t'-l)$. $\square$

Замечание. Для любой $(s+1)$ -мерной целочисленной решётки Γ с определителем N (см. [1])

$$\#\mathfrak{M}(\Gamma) = \#\mathfrak{M}'(\Gamma) + O_s(\log_2^{s-1}(N+1)),$$

где $\mathfrak{M}'(\Gamma)$ — подмножество в $\mathfrak{M}(\Gamma)$, состоящее из всех локальных минимумов $n = (n_0, \dots, n_s)$ с $n_j \neq 0$ (все координаты ненулевые).

2. Доказательство теоремы

Положим

$$\lambda = 4^{s+1}, \quad t = [\log_\lambda N], \quad \xi = \lambda^{-t} N \in [1, \lambda).$$

Опираясь на лемму 2, получим

$$Q_s(N) = \sum_{a_1, \dots, a_s=1}^N \#\mathfrak{M}(\Gamma_N(a)) \geq \sum_{a_1, \dots, a_s=1}^N \#(\mathfrak{M}(\Gamma_N(a)) \cap \mathcal{P}_t) \geq Q'_s(N) - Q''_s(N),$$

где

$$Q'_s(N) = \sum_{a_1, \dots, a_s=1}^N \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^{s+1}(t)} \#(\mathfrak{M}(\Gamma_N(a)) \cap \mathcal{P}(k)),$$

$$Q''_s(N) = \sum_{a_1, \dots, a_s=1}^N \sum_{l=1}^s C_s^l \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^{s+1}(t-l)} \#(\mathfrak{M}(\Gamma_N(a)) \cap \mathcal{P}(k)).$$

Так как для любого $k \in \mathbb{Z}_+^{s+1}(t)$ выполняется равенство

$$\xi \cdot \lambda^{k_0} \cdot \lambda^{k_1} \cdot \dots \cdot \lambda^{k_s} = N, \quad (2.1)$$

то по лемме 1

$$Q'_s(N) \geq N^s \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^{s+1}(t)} 2 = 2N^s C_{t+s}^s \geq \frac{2N^s}{s!} (\log_\lambda N)^s.$$

Далее, в соответствии с замечанием из предыдущего раздела,

$$Q''_s(N) = \sum_{l=1}^s C_s^l \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^{s+1}(t-l)} W_s^{(k)}(N) + O_s(N^s \log_2^{s-1} N),$$

где

$$W_s^{(k)}(N) = \sum_{a_1, \dots, a_s=1}^N \#(\mathfrak{M}'(\Gamma_N(a)) \cap \mathcal{P}(k)) \leq \sum_{a_1, \dots, a_s=1}^N \#(\Gamma'_N(a) \cap \mathcal{P}(k)) = V_s^{(k)}(N).$$

Здесь подмножество $\Gamma'_N(a)$ в решётке $\Gamma_N(a)$ составлено из всех узлов с ненулевыми координатами. Величина $V_s^{(k)}(N)$ есть число решений сравнения

$$n_0 + a_1 n_1 + \dots + a_s n_s \equiv 0 \pmod{N}, \quad (2.2)$$

где $a_1, \dots, a_s$ независимо пробегает полную систему вычетов по модулю N , а для остальных переменных

$$0 < |n_0| \leq \xi \lambda^{k_0}, \quad 0 < |n_j| \leq \lambda^{k_j} \quad (1 \leq j \leq s).$$

При фиксированном $n = (n_0, \dots, n_s)$ с $\text{НОД}(n_0, \dots, n_s, N) = d$ число решений сравнения (2.2) не превосходит

$$d^s \left(\frac{N}{d} \right)^{s-1} = d \cdot N^{s-1}.$$

Принимая во внимание (2.1), получим

$$V_s^{(k)}(N) \leq \sum_{d \setminus N} d N^{s-1} 2^{\xi \lambda^{k_0}} \prod_{i=1}^s \left(2 \frac{\lambda^{k_i}}{d} \right) = 2^{s+1} N^s \lambda^{\|k\| - t} \sum_{d \setminus N} \frac{1}{d^s}.$$

Так как при $s \geq 2$

$$\sum_{d \setminus N} \frac{1}{d^s} \leq \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^2} < 2,$$

то

$$\begin{aligned} Q_s''(N) &\leq \sum_{l=1}^s C_s^l \cdot 2^{s+2} N^s \lambda^{-l} \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^{s+1}(t-l)} 1 + O_s(N^s \log_2^{s-1} N) \leq \\ &\leq 2^{s+2} N^s \sum_{l=1}^s C_s^l \frac{t^s}{s!} \lambda^{-l} + O_s(N^s \log_2^{s-1} N) = \\ &= \frac{2^{s+2}}{s!} \left(\left(1 + \frac{1}{\lambda} \right)^s - 1 \right) N^s \log_\lambda^s N + O_s(N^s \log_2^{s-1} N). \end{aligned}$$

В результате окончательно получаем, что

$$\begin{aligned} Q_s(N) &\geq \frac{2}{s!} N^s \log_\lambda^s N - \frac{2^{s+2}}{s!} \left(\left(1 + \frac{1}{4^{s+1}} \right)^s - 1 \right) N^s \log_\lambda^s N + O_s(N^s \log_2^{s-1} N) \geq \\ &\geq \frac{1}{s!} \left(2 - 2^{s+2} \left(1 + \frac{1}{2^{s+2}} - 1 \right) \right) N^s \log_\lambda^s N + O_s(N^s \log_2^{s-1} N) = \\ &= \frac{1}{s!(2s+2)^s} N^s \log_2^s N + O_s(N^s \log_2^{s-1} N). \end{aligned}$$

Теорема полностью доказана.

Литература

- [1] Авдеева М. О. Оценка количества локальных минимумов целочисленных решёток // Чебышёвский сборник. — 2004. — Т. 5, вып. 4 (12). — С. 35–38.
- [2] Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Чебышёвский сборник. — 2002. — Т. 3, вып. 2 (4). — С. 27–33.
- [3] Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Докл. РАН. — 2003. — Т. 389, № 2. — С. 154–155.
- [4] Вороной Г. Ф. Собрание сочинений. Т. 1. — Киев, 1952.
- [5] Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближённом анализе. — М.: МЦНМО, 2004.