# Оценка дисперсии длин конечных непрерывных дробей*

**В. А. БЫКОВСКИЙ**
*Хабаровское отделение*
*Института прикладной математики ДВО РАН*
e-mail: vab@iam.khv.ru

УДК 511.36+511.37

**Ключевые слова:** метрическая теория чисел, конечная непрерывная дробь, сумма Клостермана.

**Аннотация**

Доказана оценка дисперсии длин конечных непрерывных дробей фиксированного знаменателя. Она на логарифм знаменателя лучше тривиальной.

**Abstract**

*V. A. Bykovskii, Estimate for dispersion of lengths of continued fractions*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 6, pp. 15—26.

An estimate for dispersion of lengths of continued fractions is proved for fixed denominator. This estimate improves the trivial one by the logarithm of the denominator.

## Введение

В соответствии со стандартными обозначениями

$$r = [q_0; q_1, \ldots, q_s] -$$

каноническое разложение рационального $r$ в конечную непрерывную дробь длины $s = s(r)$ с целой частью $q_0 = q_0(r) = [r]$ и неполными частными

$$q_i = q_i(r) \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant i \leqslant s.$$

Напомним также, что при $1 \leqslant i \leqslant s+1$

$$\frac{P_i}{Q_i} = [q_0; q_1, \ldots, q_{i-1}]$$

есть $i$-я подходящая дробь к $r$ с взаимно простыми целым $P_i = P_i(r)$ и натуральным $Q_i = Q_i(r)$, для которых выполняются рекуррентные соотношения

$$P_{i+1} = q_i P_i + P_{i-1}, \quad Q_{i+1} = q_i Q_i + Q_{i-1}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 04-01-97000 и INTAS № 03-51-5070.

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2005, том 11, № 6, с. 15—26.
© 2005 *Центр новых информационных технологий МГУ,*
*Издательский дом «Открытые системы»*

при $1 \leqslant i \leqslant s$ с $P_0 = 1$ и $Q_0 = 0$. Из второго соотношения немедленно следует неравенство $Q_n(r) \geqslant \Phi_n$, где $\Phi_0 = 0$, $\Phi_1 = 1$, $\Phi_2 = 1$, $\Phi_3 = 2, \ldots$, $\Phi_{n+1} = \Phi_n + \Phi_{n-1}, \ldots$ — последовательность Фибоначчи. С его помощью легко показать, что для любого натурального $d$ и целого $a$

$$s\left(\frac{a}{d}\right) \leqslant 2\log_2 d.$$

Хейльбронн [10] доказал асимптотическую формулу для среднего арифметического длин $s(a/d)$ по $a$ в виде

$$\frac{1}{d}\sum_{a=1}^{d} s\left(\frac{a}{d}\right) = \frac{12\log 2}{\pi^2}\log d + R(d) \tag{0.1}$$

с оценкой $R(d) \ll \log^2 \log d$ при $d \geqslant 3$, уточнённой Портером [12]. В связи с этим возникает вопрос, насколько сильно $s(a/d)$ отклоняется от главного члена в асимптотической формуле (0.1) в среднем по $a$.

В настоящей работе доказывается дисперсионная оценка

$$\frac{1}{d}\sum_{a=1}^{d}\left(s\left(\frac{a}{d}\right) - \frac{12\log 2}{\pi^2}\log d\right)^2 \ll \log d. \tag{0.2}$$

Таким образом, для случайно выбранного натурального $a$ с положительной вероятностью

$$s\left(\frac{a}{d}\right) = \frac{12\log 2}{\pi^2}\log d + O\big(\sqrt{\log d}\,\big).$$

Кроме того, при $1 \leqslant T_1 + 1 \leqslant T_1 + T \leqslant d$ из (0.2) непосредственно следует асимптотическая формула

$$\frac{1}{T}\sum_{T_1 < a \leqslant T_1 + T} s\left(\frac{a}{d}\right) = \frac{12\log 2}{\pi^2}\log d + O\left(\sqrt{\frac{d\log d}{T}}\right).$$

Речь идёт о распространении результата Хейльбронна на неполную систему вычетов.

Используемый нами технический аппарат, как и в предшествующих работах [1, 2, 6] о статистических свойствах конечных цепных дробей, базируется на оценках сумм Клостермана.

Уже после выхода препринта [2] автор ознакомился с содержанием работы Диксона [9], из результатов которой немедленно следует более слабая (присутствует ещё и суммирование по $d$!) по сравнению с (0.2) оценка

$$G(T) = \sum_{d \leqslant T}\frac{1}{d}\sum_{a=1}^{d}\left(s\left(\frac{a}{d}\right) - \frac{12\log 2}{\pi^2}\log d\right)^2 \ll T\log T\,\log^4\log T.$$

В то же время её хватает для доказательства асимптотической формулы

$$\sum_{\substack{a,d \in \mathbb{N} \\ a^2 + d^2 \leqslant T^2}} s\left(\frac{a}{d}\right) = \frac{3}{\pi}\log 2T^2\,\log T + E(T)$$

с оценкой остаточного члена $E(T) \ll T^2\sqrt{\log T}\log^2\log T$. Этот вопрос изучался методами настоящей работы в связи с гипотезами В. И. Арнольда (см. [3], [5, задача 1993-11]) о статистиках для неполных частных конечных непрерывных дробей. В частности, было доказано, что

- $E(T) \ll T^2\sqrt{\log T}$ [2];
- $E(T) \ll T^2$ [1];
- $E(T) = CT^2 + O_\varepsilon(T^{2-\frac{1}{9}+\varepsilon})$ для любого $\varepsilon > 0$ [6].

Отметим также, что Хенсли [11] доказал асимптотическую формулу

$$G(T) = C \cdot T\log T(1 + o(1))$$

с константой $C > 0$, уточнённую позднее Балади и Валле [8] как

$$G(T) = C \cdot T\log T + C' \cdot T + O(T^{1-\delta})$$

при некотором $\delta > 0$. Из этих результатов следует, что с точностью до константы оценка (0.2) неулучшаема для бесконечной последовательности натуральных $d$.

# 1. О непрерывных дробях

Пусть $\alpha = [q_0; q_1, \ldots, q_i, \ldots]$ — каноническое разложение вещественного $\alpha$ в непрерывную дробь и $Q_i = Q_i(\alpha)$ — знаменатель $i$-й подходящей дроби.

**Лемма 1.** *Для любых вещественного $T > 0$ и натурального $l$ существует не более $2l$ номеров $i$, для которых $T < Q_i(\alpha) \leqslant 2^l T$.*

**Доказательство.** Поскольку

$$2Q_{i-1} \leqslant q_iQ_i + Q_{i-1} = Q_{i+1},$$

то условие $T < Q_{i-1} \leqslant Q_i \leqslant Q_{i+1} \leqslant 2T$ не может выполняться ни при каком $i$. Поэтому в каждом из $l$ полуинтервалов

$$(2^{j-1}T, 2^jT] \quad (1 \leqslant j \leqslant l)$$

содержится не более двух $Q_i$ и в совокупности их не более $2l$. Лемма 1 доказана.

Пусть $a$ и $d$ — натуральные,

$$1 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}d, \quad \text{НОД}(a, d) = 1. \tag{1.1}$$

Далее,

$$\frac{a}{d} = [0; q_1, \ldots, q_s] —$$

каноническое разложение в конечную непрерывную дробь, при этом

$$q_1 \geqslant 2, \quad q_s \geqslant 2.$$

Тогда (см. [8, 11])

$$\frac{a^*}{d} = [0; q_s, \ldots, q_1]$$

с натуральным $a^* \leqslant (1/2)d$, удовлетворяющим сравнению

$$aa^* + (-1)^s \equiv 0 \pmod{d}.$$

Индукцией по $i$ с помощью рекуррентных соотношений для знаменателей подходящих дробей легко показать, что

$$Q_{i+1}\left(\frac{a}{d}\right) Q_{s-i+1}\left(\frac{a^*}{d}\right) + Q_i\left(\frac{a}{d}\right) Q_{s-i}\left(\frac{a^*}{d}\right) = d \tag{1.2}$$

при всех $i = 0, 1, \ldots, s$ (см. по этому поводу [10]).

Обозначим через $l_d(a)$ количество всех номеров $i$, для которых

$$1 \leqslant Q_i(a/d) < \sqrt{d}.$$

При этом $a$ — любое целое, не обязательно взаимно простое с $d$.

**Лемма 2.** *Для любых натуральных $a$ и $d$ из* (1.1)

$$s\left(\frac{a}{d}\right) \leqslant l_d(a) + l_d(a^*) \leqslant s\left(\frac{a}{d}\right) + 2.$$

**Доказательство.** Из тождества (1.2) следует, что при всех $i = 0, \ldots, s$ выполняется хотя бы одно из неравенств

$$Q_{i+1}\left(\frac{a}{d}\right) < \sqrt{d}, \quad Q_{s-i+1}\left(\frac{a^*}{d}\right) < \sqrt{d}. \tag{1.3}$$

Поэтому

$$s\left(\frac{a}{d}\right) \leqslant l_d(a) + l_d(a^*) = s\left(\frac{a}{d}\right) + R,$$

где $R$ есть количество номеров $i$, для которых справедливы оба неравенства. Но в таком случае согласно (1.2)

$$d \leqslant 2Q_{i+1}\left(\frac{a}{d}\right) Q_{s-i+1}\left(\frac{a^*}{d}\right) < 2Q_{i+1}\left(\frac{a}{d}\right)\sqrt{d},$$

и тогда

$$\frac{1}{2}\sqrt{d} < Q_{i+1}\left(\frac{a}{d}\right) < \sqrt{d}.$$

Осталось только воспользоваться леммой 1.

**Лемма 3.** *Для натуральных $a$ и $d \geqslant 3$ из* (1.1)

$$s\left(\frac{d-a}{d}\right) = s\left(\frac{a}{d}\right) + 1.$$

**Доказательство.** Утверждение немедленно следует из импликации

$$\frac{a}{d} = [0; q_1, q_2, \ldots, q_s] \implies \frac{d-a}{d} = [0; 1, q_1 - 1, q_2, \ldots, q_s]$$

с каноническими разложениями в непрерывную дробь.

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех целочисленных матриц

$$S = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(S) & P'(S) \\ Q(S) & Q'(S) \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

у которых $\det(S) = \pm 1$ и

$$1 \leqslant Q \leqslant Q', \quad 0 \leqslant P \leqslant P' \leqslant Q'. \tag{1.5}$$

Для произвольного вещественного $T$ $\mathcal{M}(T)$ — конечное подмножество в $\mathcal{M}$, состоящее из всех матриц $S$ с $Q' < T$.

Нашим главным инструментом будет теорема 1 из [4, § 50] (см. также [6,7]), сформулированная следующим образом.

**Замечание 1.** Соответствие

$$(q_1, \ldots, q_l) \to S = S(q_1, \ldots, q_l) = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

$$\text{с} \quad \frac{P}{Q} = [0; q_1, \ldots, q_{l-1}] \quad \text{и} \quad \frac{P'}{Q'} = (q_1, \ldots, q_l)$$

определяет биекцию множества всех конечных наборов натуральных чисел на $\mathcal{M}$. При этом для вещественного $\alpha \in (0, 1)$ неравенство

$$0 < \frac{Q'\alpha - P'}{-Q\alpha + P} = S^{-1}(\alpha) < 1 \quad \text{с} \quad S \in \mathcal{M}$$

имеет место тогда и только тогда, когда для некоторого $i \geqslant 1$

$$S = \begin{pmatrix} P_i(\alpha) & P_{i+1}(\alpha) \\ Q_i(\alpha) & Q_{i+1}(\alpha) \end{pmatrix}$$

и $i \neq s(r)$ для рациональных $\alpha = r$.

Для любой матрицы $S$ из $\mathcal{M}$ определим интервал

$$I(S) = \begin{cases} \left(\dfrac{P'}{Q'}, \dfrac{P + P'}{Q + Q'}\right) & \text{для } \det(S) = 1, \\ \left(\dfrac{P + P'}{Q + Q'}, \dfrac{P'}{Q'}\right) & \text{для } \det(S) = -1 \end{cases}$$

с длиной

$$\operatorname{mes} I(S) = \frac{1}{Q'(Q + Q')}.$$

Из замечания 1 немедленно следуют ещё четыре.

**Замечание 2.** Пусть $q_1, \ldots, q_l$ — любые натуральные числа и в соответствии с (1.6) $S = S(q_1, \ldots, q_l)$. Тогда $\alpha \in I(S)$ тогда и только тогда, когда $s(\alpha) > l$ и в каноническом разложении $\alpha = [t_0; t_1, \ldots, t_l, \ldots]$

$$t_0 = 0, \ t_1 = q_1, \ldots, \ t_l = q_l.$$

**Замечание 3.** Пересечение $I(S) \cap I(S')$ непусто тогда и только тогда, когда один из интервалов содержится в другом. В частности, для $I(S) \supset I(S')$ определяющий $S$ набор $(q_1, \ldots, q_l)$ дополняется некоторыми натуральными $q_{l+1}, \ldots, q_{l'}$ до набора $(q_1, \ldots, q_{l'})$, определяющего $S'$.

**Замечание 4.** Пусть

$$I \begin{pmatrix} P_1 & P_1' \\ Q_1 & Q_1' \end{pmatrix} \subset I \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix}$$

и это включение строгое. Тогда для некоторой матрицы

$$\begin{pmatrix} P_2 & P_2' \\ Q_2 & Q_2' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$$

выполняются равенства

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{PP_2 + P'Q_2}{QP_2 + Q'Q_2}, \quad \frac{P_1'}{Q_1'} = \frac{PP_2' + P'Q_2'}{QP_2' + Q'Q_2'}.$$

**Замечание 5.** Для любой матрицы $S \in \mathcal{M}$ имеется не более $O(\log Q'(S))$ других матриц $S_1 \in \mathcal{M}$, для которых $I(S) \subset I(S_1)$.

## 2. Вспомогательные леммы

**Лемма 4.** *Для любого* $T \geqslant 1$

$$\sum_{\substack{1 \leqslant Q \leqslant Q' < T \\ \text{НОД}(Q,Q')=1}} \frac{1}{Q'(Q'+Q)} = \frac{6}{\pi^2} \log 2 \, \log T + O(1).$$

**Доказательство.** Пусть $\Phi(T)$ — интересующая нас сумма. С помощью формулы обращения Мёбиуса находим

$$\begin{aligned}
\Phi(T) &= \sum_{q<T} \frac{\mu(q)}{q^2} \sum_{1 \leqslant Q_1 \leqslant Q_1' < T/q} \frac{1}{Q_1'(Q_1'+Q_1)} = \\
&= \sum_{q<T} \frac{\mu(q)}{q^2} \sum_{1 \leqslant Q_1' < T/q} \frac{1}{Q_1'} \left( \log 2 + O\left(\frac{1}{Q_1'}\right)\right) = \\
&= \log 2 \sum_{q<T} \frac{\mu(q)}{q^2} \left( \log \frac{T}{q} + O(1) \right) + O(1) = \\
&= \log 2 \, \log T \sum_{q<T} \frac{\mu(q)}{q^2} + O(1) = \frac{6}{\pi^2} \log 2 \, \log T + O(1).
\end{aligned}$$

Лемма 4 полностью доказана.

**Лемма 5.** *Для любого* $T \geqslant 1$

$$\sum_{\substack{1\leqslant Q\leqslant Q'<T\\ \text{НОД}(Q,Q')=1}} \frac{\log Q'}{Q'(Q'+Q)} = \frac{3}{\pi^2}\log 2\,\log^2 T + O(\log T).$$

**Доказательство.** Действуя так же, как и при доказательстве предыдущей леммы, получаем следующую цепочку преобразований:

$$\begin{aligned}
&\sum_{q<T}\frac{\mu(q)}{q^2}\sum_{1\leqslant Q_1\leqslant Q_1'<T/q}\frac{\log Q_1'+\log q}{Q_1'(Q_1'+Q_1)} = \\
&\quad = \sum_{q<T}\frac{\mu(q)}{q^2}\sum_{1\leqslant Q_1'<T/q}\frac{\log Q_1'}{Q_1'}\left(\log 2 + O\left(\frac{1}{Q_1'}\right)\right) + O(\log T) = \\
&\quad = \log 2\sum_{1\leqslant Q_1'<T}\frac{\log Q_1'}{Q_1'}\left(\sum_{q<T/Q_1'}\frac{\mu(q)}{q^2}\right) + O(\log T) = \\
&\quad = \frac{6}{\pi^2}\log 2\sum_{1\leqslant Q_1'<T}\frac{\log Q_1'}{Q_1'} + O(\log T) = \frac{3}{\pi^2}\log 2\,\log^2 T + O(\log T).
\end{aligned}$$

Лемма 5 доказана.

Напомним, что

$$\varphi(d) = d\sum_{q|d}\frac{\mu(q)}{q} - \tag{2.1}$$

функция Эйлера. Следующая необходимая нам асимптотическая формула

$$\sum_{1\leqslant Q\leqslant T}\frac{\varphi(Q)}{Q^2} = \frac{6}{\pi^2}\log T + O(1) \tag{2.2}$$

доказывается с помощью (2.1) стандартным способом.

Пусть $n$ — натуральное число и $0 < T_1, T_2 \leqslant n$. Тогда число решений сравнения $bm = \pm 1 \pmod n$ с $0 < b \leqslant T_1$ и $0 < m \leqslant T_2$ равно (см. [1])

$$2\varphi(n)\frac{T_1T_2}{n^2} + O_\varepsilon\big(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\big)$$

для каждого $\varepsilon > 0$. Отсюда с помощью преобразования Абеля легко выводится следующая лемма.

**Лемма 6.** *Для любого натурального* $n$, $x \in (0,1]$ *и* $y \in [1,\infty)$ *имеет место асимптотическая формула* (*для каждого* $\varepsilon > 0$)

$$\sum_{\substack{1\leqslant b\leqslant n,\ 1\leqslant m\leqslant xn\\ bm\equiv\pm 1 \pmod n}}\frac{1}{(1+\frac{m}{n})(\frac{b}{n}+y)^2} = 2\log(1+x)\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y+1}\right)\varphi(n) + O_\varepsilon\left(\frac{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{y^2}\right).$$

# 3. Оценка дисперсии

Нам понадобится следующее очевидное замечание.

**Замечание 6.** Пусть $Q$ и $Q'$ — взаимно простые натуральные числа, $1 \leqslant Q < Q'$. Тогда имеются ровно две пары

$$(P, P') \quad \text{и} \quad (Q - P, Q' - P'),$$

дополняющие в качестве первой строки вторую $(Q, Q')$ до матрицы из $\mathcal{M}$.

Обозначим через $\chi_I(x)$ характеристическую функцию интервала $I$ на вещественной оси.

**Лемма 7.** *Для любого натурального $d$*

$$U(d) = \frac{1}{d}\sum_{a=1}^{d} l_d(a) = \frac{6}{\pi^2}\log 2\,\log d + O(1).$$

**Доказательство.** Так как для любого интервала $I$

$$\frac{1}{d}\sum_{a=1}^{d}\chi_I\left(\frac{a}{d}\right) = \operatorname{mes}(I) + O\left(\frac{1}{d}\right), \tag{3.1}$$

то, принимая во внимание замечания 1 и 6, находим, что

$$U(d) = \frac{1}{d}\sum_{a=1}^{d}\sum_{S\in\mathcal{M}(\sqrt{d})}\chi_{I(S)}\left(\frac{a}{d}\right) + O(1) = 2\sum_{\substack{1\leqslant Q\leqslant Q'<\sqrt{d}\\ \text{НОД}(Q,Q')=1}}\frac{1}{Q'(Q'+Q)} + O(1).$$

Осталось только воспользоваться леммой 4.

**Лемма 8.** *Для любого натурального $d$*

$$W(d) = \frac{1}{d}\sum_{a=1}^{d} l_d^2(a) = \left(\frac{6}{\pi^2}\log 2\,\log d\right)^2 + O(\log d).$$

**Доказательство.** Действуя так же, как при доказательстве предыдущей леммы, находим

$$W(d) = \frac{1}{d}\sum_{a=1}^{d}\left(\sum_{S\in\mathcal{M}(\sqrt{d})}\chi_{I(S)}\left(\frac{a}{d}\right) + O(1)\right)^2 =$$
$$= \sum_{S,S_1\in\mathcal{M}(\sqrt{d})}\left(\frac{1}{d}\sum_{a=1}^{d}\chi_{I(S)\cap I(S_1)}\left(\frac{a}{d}\right)\right) + O(\log d).$$

Воспользовавшись (3.1), а также принимая во внимание замечания 3 и 5, получим

$$W(d) = 2\sum_{\substack{S,S_1\in\mathcal{M}(\sqrt{d})\\ I(S_1)\subset I(S)}}\operatorname{mes} I(S_1) + O(\log d).$$

Опираясь на замечание 4, отсюда находим

$$W(d) =$$

$$= \sum_{\substack{1\leqslant Q\leqslant Q'<\sqrt{d}\\ \text{НОД}(Q,Q')=1}} \sum_{\substack{|an-bm|=1\\ 1\leqslant m\leqslant n,\ 0\leqslant a\leqslant b\leqslant n\\ Q'n+Qb<\sqrt{d}}} \frac{4}{(Q'n+Qb)(Q'(m+n)+Q(a+b))} + O(\log d) =$$

$$= \sum_{\dots}\sum_{\dots} \frac{4}{(m+n)(Q'n+Qm)(Q'+\frac{a+b}{m+n}Q)} + O(\log d).$$

Здесь и в дальнейшем многоточие под суммированиями означает, что область изменения переменных та же, что и раньше. Положим также

$$W'(d) = \sum_{\dots}\sum_{\dots} \frac{n}{m+n}\,\frac{4}{(Q'n+Qm)^2}.$$

Поскольку

$$\left|\frac{1}{(Q'+\frac{a+b}{m+n}Q)} - \frac{1}{Q'+\frac{b}{n}Q}\right| = \frac{Q}{(Q'(m+n)+Q(a+b))(Q'n+Qb)} < \frac{Q}{(nQ')^2},$$

то

$$W(d) - W'(d) \ll \log d + \sum_{\substack{1\leqslant Q\leqslant Q'\leqslant\sqrt{d}\\ 1\leqslant m\leqslant n\leqslant\sqrt{d}}} \frac{1}{m+n}\,\frac{1}{Q'n}\,\frac{Q}{(nQ')^2} \ll \log d.$$

Применяя лемму 6, получим

$$W'(d) = 4\sum_{\dots}\frac{1}{Q^2}\sum_{Q'n<\sqrt{d}}\left(\frac{\varphi(n)}{n^2}\log\left(1+\min\left\{1,\frac{1}{Q}\left(\frac{\sqrt{d}}{n}-Q'\right)\right\}\right)\frac{Q^2}{Q'(Q'+Q)} +\right.$$

$$\left. + O_\varepsilon\left(\frac{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{n^2(Q'/Q)^2}\right)\right) + O(\log d) = 4\sum_{\dots}\frac{1}{Q'(Q'+Q)}\sum_{\dots}\frac{\varphi(n)}{n^2}\log 2 +$$

$$+ O\left(\sum_{1\leqslant Q\leqslant Q'<\sqrt{d}}\frac{1}{Q'(Q'+Q)}\sum_{\sqrt{d}/(Q+Q')\leqslant n<\sqrt{d}/Q'}\frac{1}{n}\right) + O(\log d).$$

Продолжая оценку остаточного члена и применяя асимптотическую формулу (2.2), с помощью лемм 4 и 5 окончательно находим

$$W(d) = 4\log 2\sum_{\substack{1\leqslant Q\leqslant Q'<\sqrt{d}\\ \text{НОД}(Q,Q')=1}}\frac{1}{Q'(Q'+Q)}\left(\frac{6}{\pi^2}\log\frac{\sqrt{d}}{Q'} + O(1)\right) + O(\log d) =$$

$$= 2\frac{6}{\pi^2}\log 2\,\log d\sum_{\dots}\frac{1}{Q'(Q'+Q)} - \frac{24}{\pi^2}\log 2\sum_{\dots}\frac{\log Q'}{Q'(Q'+Q)} + O(\log d) =$$

$$= \left(\frac{6}{\pi^2}\log 2\,\log d\right)^2 + O(\log d).$$

**Лемма 9.** *Для любого натурального* $d \geqslant 3$

$$\frac{1}{d}\sum_{q|d}\log^2 q\varphi\left(\frac{d}{q}\right) \ll \log^2\log d.$$

**Доказательство.** Легко проверить, что сумма

$$\sum_{q|d}\mu(q)\log^2\frac{d}{q}$$

совпадает с $(2\alpha-1)\log^2 p$ при $d=p^\alpha$ (степень простого $p$) и с $\log p\log p_1$ при $d=p^\alpha p_1^\beta$ (произведение двух степеней различных простых чисел $p$, $p_1$), а в остальных случаях она равна нулю. Поэтому

$$\frac{1}{d}\sum_{q|d}\log^2 q\varphi\left(\frac{d}{q}\right) = \frac{1}{d}\sum_{q|d}\log^2 q\sum_{q_1q_2=d/q}\mu(q_1)q_2 =$$

$$= \frac{1}{d}\sum_{q_2|d}q_2\sum_{q_1|(d/q_2)}\mu(q_1)\log^2\frac{d/q_2}{q_1} = \sum_{p^\alpha|d}\frac{(2\alpha-1)\log^2 p}{p^\alpha} + \sum_{\substack{p^\alpha p_1^\beta|d\\ p\neq p_1}}\frac{\log p\,\log p_1}{p^\alpha p_1^\beta} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p|d}\log^2 p\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{2\alpha-1}{p^\alpha} + \left(\sum_{p|d}\log p\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1}{p^\alpha}\right)^2 =$$

$$= \sum_{p|d}\log^2 p\frac{p+1}{(p-1)^2} + \left(\sum_{p|d}\frac{\log p}{p-1}\right)^2 \leqslant \sum_{p\leqslant N}\log^2 p\frac{p+1}{(p-1)^2} + \left(\sum_{p\leqslant N}\frac{\log p}{p-1}\right)^2$$

с натуральным $N$, определяемым из условия

$$\prod_{p\leqslant N}p \leqslant d < \prod_{p\leqslant N+1}p.$$

Из асимптотического закона распределения простых чисел следует, что $N\sim\log d$. Поэтому интересующая нас сумма по порядку не превосходит

$$\sum_{p\leqslant 2\log d}\frac{\log^2 p}{p} + \left(\sum_{p\leqslant 2\log d}\frac{\log p}{p}\right)^2 \ll \log^2\log d.$$

Лемма 9 полностью доказана.

Теперь у нас имеется всё необходимое для доказательства главного результата работы.

**Теорема.** *Для любого натурального* $d$ *выполняется оценка* (0.2).

**Доказательство.** Договоримся, что

$$\sum_{a=1}^{d}{}^{*}\cdots$$

означает суммирование по всем $a$ от 1 до $d$, взаимно простым с $d$. Тогда

$$\mathcal{D}(d) = \frac{1}{d}\sum_{a=1}^{d}\left|s\left(\frac{a}{d}\right) - 2\eta(d)\right|^2 = \frac{1}{d}\sum_{q|d}\sum_{a=1}^{d/q}{}^{*}\left|s\left(\frac{a}{d/q}\right) - 2\eta(d)\right|^2,$$

где

$$\eta(d) = \frac{6}{\pi^2}\log 2\,\log d.$$

Последовательно применяя леммы 3 и 2, получим

$$\mathcal{D}(d) = \frac{2}{d}\sum_{q|d}\sum_{\substack{a=1\\ a\leqslant d/2q}}^{d/q}{}^{*}\left|s\left(\frac{a}{d/q}\right) - 2\eta(d)\right|^2 + O(1) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{d}\sum_{q|d}\sum_{\substack{a=1\\ a\leqslant d/2q}}^{d/q}{}^{*}|l_{d/q}(a) - \eta(d) + l_{d/q}(a^*) - \eta(d)|^2 + O(\log d) \ll$$

$$\ll \frac{1}{q}\sum_{q|d}\sum_{a=1}^{d/q}{}^{*}|l_{d/q}(a) - \eta(d)|^2 + \log d.$$

При этом мы воспользовались неравенством

$$|l_{d/q}(a) - \eta(d) + l_{d/q}(a^*) - \eta(d)|^2 \leqslant 2|l_{d/q}(a) - \eta(d)|^2 + 2|l_{d/q}(a^*) - \eta(d)|^2$$

и фактом, что $a^*$ при изменении $a$ пробегает те же значения, что и $a$. Из леммы 1 следует, что

$$l_{d/q}(a) = l_d(qa) + O(\log q).$$

Поэтому

$$\mathcal{D}(d) \ll \frac{1}{d}\sum_{a=1}^{d}|l_d(a) - \eta(d)|^2 + \frac{1}{d}\sum_{q|d}\log^2 q\varphi\left(\frac{d}{q}\right).$$

Отсюда с помощью лемм 7, 8, 9 находим, что

$$\mathcal{D}(d) \ll \frac{1}{d}\sum_{a=1}^{d} l_d^2(a) - 2\frac{\eta(d)}{d}\sum_{a=1}^{d} l_d(a) + \eta^2(d) + \log^2\log d =$$
$$= \eta^2(d) + O(\log d) - 2\eta(d)(\eta(d) + O(1)) + \eta^2(d) + \log^2\log d \ll \log d.$$

Теорема полностью доказана.

# Литература

[1] Авдеева М. О. О статистиках неполных частных конечных цепных дробей // Функцион. анализ и его прил. — 2004. — Т. 38, № 2. — С. 1—11.

[2] Авдеева М. О., Быковский В. А. Решение задачи Арнольда о статистиках Гаусса—Кузьмина. — Препринт. — Владивосток: Дальнаука, 2002.

[3] Арнольд В. И. Цепные дроби.— М.: МЦНМО, 2000.

[4] Арнольд И. В. Теория чисел. — Учпедгиз, 1939.

[5] Задачи Арнольда. — М.: Фазис, 2000.

[6] Устинов А. В. О статистических свойствах конечных цепных дробей // Труды по теории чисел. — СПб., 2005. — С. 186—211. — (Зап. научн. семин. ПОМИ; т. 322).

[7] Хинчин А. Я. Цепные дроби. — М.: Физматгиз, 1961.

[8] Baladi V., Valle B. Euclidean algorithms are Gaussian // J. Number Theory. — 2005. — Vol. 110, no. 2. — P. 331—386.

[9] Dixon J. D. The number of steps in the Euclidean algorithm // J. Number Theory. — 1970. — Vol. 2. — P. 414—422.

[10] Heilbronn H. On the average length of a class of finite continued fractions // Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis. — Berlin: VEB Deutsher Verlag der Wissenschaften; New York: Plenum Press, 1968. — P. 89—96.

[11] Hensley D. The number of steps in the Euclidean algorithm // J. Number Theory. — 1994. — Vol. 49, no. 2. — P. 142—182.

[12] Porter J. W. On a theorem of Heilbronn // Mathematika. — 1975. — Vol. 22, no. 1. — P. 20—28.