О некоторых арифметических свойствах коэффициентов функции Куммера

А. И. ГАЛОЧКИН
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: galoch@mech.math.msu.su

УДК 511.3

Ключевые слова: функция Куммера, E-функция, квадратичное поле, идеал, простой идеал, норма идеала.

Аннотация

Оцениваются общие знаменатели первых n коэффициентов функции Куммера с параметрами из квадратичного поля.

Abstract

A. I. Galochkin, Certain arithmetic properties of coefficients of Kummer's function, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 6, pp. 27—32.

We estimate the common denominators of the first n coefficients of Kummer's function with parameters belonging to an arbitrary quadratic field.

В 1929 году К. Зигель [6,7] опубликовал метод, позволяющий устанавливать алгебраическую независимость значений некоторых целых функций, названных им *E-функциями*. Он доказал, что целые гипергеометрические функции с рациональными параметрами являются E-функциями.

А. Б. Шидловский, продолжая исследования К. Зигеля, установил необходимое и достаточное условие алгебраической независимости значений E-функций в алгебраических точках. Его основные теоремы опубликованы в [5].

В некоторых случаях удаётся исследовать арифметические свойства значений гипергеометрических функций с иррациональными параметрами. Эти функции не являются E-функциями, но к ним частично применимы методы, разработанные для E-функций. В связи с этим определение E-функций имеет смысл несколько обобщить.

В. Г. Спринджук [3, 4] доказал, что функция

$$\varphi_\lambda(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+\nu)}$$

при иррациональном алгебраическом параметре λ, таком что $\mathbb{Q}(\lambda)$ — поле Галуа, не является E-функцией.

В [1] было введено следующее определение.

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 6, с. 27—32.
© 2005 *Центр новых информационных технологий МГУ,*
Издательский дом «Открытые системы»

Определение 1. Функция $f(z)=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \frac{z^\nu}{\nu!}$ *принадлежит классу* E_τ, $\tau \geqslant 0$, если

1) коэффициенты c_ν принадлежат алгебраическому числовому полю $\mathbb{K}$, $k=\deg\mathbb{K}$;
2) при любом $\varepsilon>0$ эти коэффициенты и сопряжённые им числа растут как $O(\nu^{\varepsilon\nu})$;
3) существует последовательность q_n отличных от нуля чисел из кольца $\mathbb{Z}_\mathbb{K}$, таких что $q_n c_\nu \in \mathbb{Z}_\mathbb{K}$, $\nu=\overline{0,n}$, и норма $N(q_n)$ есть $O\bigl(n^{k(\tau+\varepsilon)n}\bigr)$.

Функция $f(z)$ *в точности принадлежит классу* E_τ, если она принадлежит этому классу и не принадлежит никакому другому такому классу с меньшим значением τ.

Класс E_0 совпадает с классом E-функций Зигеля.

В [1] установлено, какому классу в точности принадлежит функция

$$f(z)=1+\sum_{\nu=1}^{\infty} z^{m\nu}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(x+\lambda_1)\dots(x+\lambda_m)},$$

и получены оценки линейных форм от значений этой функции и её производных в точках мнимого квадратичного поля.

В [2] найдены необходимые и достаточные условия, при которых общая гипергеометрическая функция является E-функцией.

В настоящей статье исследуется, какому классу в точности принадлежит функция Куммера

$$f(z)=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(a_1+1)\dots(a_1+\nu)}{(a_2+1)\dots(a_2+\nu)}\,\frac{z^\nu}{\nu!}, \tag{1}$$

при условии, что $\mathbb{Q}(a_1,a_2)$ — квадратичное поле.

Пусть ω — квадратичная иррациональность, $\mathbb{K}=\mathbb{Q}(\omega)$, $k=\deg\mathbb{K}=2$,

$$a_1=u_1+v_1\omega,\quad a_2=u_2+v_2\omega,\quad u_1,u_2,v_1,v_2\in\mathbb{Q}. \tag{2}$$

При $v_1=v_2=0$ функция (1) является E-функцией, поэтому будем считать, что $|v_1|+|v_2|>0$. Выбором числа ω можно обеспечить, чтобы

$$v_1,v_2\in\mathbb{Z},\quad (v_1,v_2)=1,\quad u_1=\frac{b_1}{c},\quad u_2=\frac{b_2}{c},\quad b_1,b_2,c\in\mathbb{Z},\quad c>0. \tag{3}$$

Теорема 1. *Функция Куммера* (1) *в точности принадлежит классу* $E_{1/2}$ *в следующих случаях*:

1) *при* $v_1>v_2$ $(v_1>0)$;
2) *при* $u_1v_2-u_2v_1\notin\mathbb{Z}$;
3) *при* $v_1=v_2>0$ *и* $u_1-u_2\notin\mathbb{Z}^+$;
4) *при* $v_1v_2=0$, $|v_1|+|v_2|>0$.

При $v_2 > v_1 > 0$, $u_1v_2 - u_2v_1 \in \mathbb{Z}$ функция $f(z)$ в точности принадлежит классу E_τ с $\tau = \frac{1}{2}\bigl(1 - \frac{1}{v_2}\bigr)$.

При $v_1 = v_2 > 0$, $u_1 - u_2 \in \mathbb{Z}^+$, а также при $v_1 = v_2 = 0$ функция $f(z)$ является E-функцией.

Общий случай $\deg \mathbb{Q}(a_1, a_2) = 2$ сводится путём выбора ω к какому-либо из описанных случаев.

Доказательство. Пункты 1) и 2) определения 1 для функции (1) очевидны. Чтобы доказать пункт 3), достаточно для нормы идеалов $\mathfrak{q}_n$, являющихся общими наименьшими знаменателями коэффициентов

$$c_\nu = \frac{(a_1+1)\ldots(a_1+\nu)}{(a_2+1)\ldots(a_2+\nu)}, \quad \nu = \overline{1,n}, \tag{4}$$

ряда (1), получить оценки

$$N(\mathfrak{q}_n) = n^{2(\tau+o(1))n}$$

при значениях τ, взятых из утверждений теоремы 1. Переход от идеалов $\mathfrak{q}_n$ к числам q_n из определения 1 проводится так же, как это сделано в [1, с. 1228].

Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал поля $\mathbb{K}$, делящий простое число p, и

$$\mathfrak{p} \mid (a_1 + k_1), \quad \mathfrak{p} \mid (a_2 + k_2), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant k_1, k_2 \leqslant n \tag{5}$$

(простой идеал $\mathfrak{p}$ делит a, если он входит в положительной степени в разложение главного идеала (a) в произведение простых идеалов), т. е.

$$\mathfrak{p} \mid (u_1 + v_1\omega + k_1) = \alpha_1, \quad \mathfrak{p} \mid (u_2 + v_2\omega + k_2) = \alpha_2.$$

Рассмотрим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 + k_1 & v_1 \\ u_2 + k_2 & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & v_1 \\ \alpha_2 & v_2 \end{vmatrix}.$$

Так как $\mathfrak{p} \mid \Delta$ и $\Delta \in \mathbb{Q}$, то $\mathfrak{p} \mid p$, $p \mid \Delta$, и если $\Delta \neq 0$, то $p \leqslant |c\Delta| < \gamma n$, $\gamma > 1$, где постоянная γ не зависит от n.

Определение 2. Простой идеал $\mathfrak{p}$ назовём *малым*, если $\mathfrak{p} \mid p$, $p < \gamma n$, и *бóльшим*, если $\mathfrak{p} \mid p$, $p \geqslant \gamma n$.

Из сказанного выше следует, что при $\Delta \neq 0$ соответствующий простой идеал малый.

С помощью [1, леммы 3 и 5] и [2, лемма 2] можно оценить вклад, который вносят малые и большие простые идеалы в числители и знаменатели коэффициентов ряда (1). В случае, когда $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\omega)$ — квадратичное поле, из указанных лемм легко выводится следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть*

$$\deg \omega = 2, \quad a = u + v\omega, \quad u = \frac{b}{c}, \quad b, c, v \in \mathbb{Z}, \quad c > 0, \quad v \neq 0.$$

Тогда

$$(c^n(a+1)\ldots(a+n)) = \mathfrak{a}_n \mathfrak{b}_n,$$

где в идеал $\mathfrak{a}_n$ входят только малые простые идеалы, а в идеал $\mathfrak{b}_n$ — только большие простые идеалы, причём

$$N(\mathfrak{a}_n) = n^{(1+o(1))n}, \quad N(\mathfrak{b}_n) = n^{(1+o(1))n}.$$

Далее, идеал $\mathfrak{a}_n$ делится на идеал

$$\mathfrak{C}_n = \prod_{\mathfrak{p}:\ N(\mathfrak{p})=p\leqslant n,\, p\nmid c} \mathfrak{p}^{[n/p]}, \quad N(\mathfrak{C}_n) = n^{(1+o(1))n}. \tag{6}$$

Следствие 1. *При $\deg \mathbb{Q}(a_1, a_2) = 2$ функция (1) принадлежит классу $E_{1/2}$.*

Следствие 2.

1. *Если для любого достаточно большого натурального числа n и любого большого простого идеала $\mathfrak{p}$, делящего $(a_2+1)\dots(a_2+n)$, существует такой индекс ν, что $\mathfrak{p}$ делит знаменатель, но не делит числитель дроби c_ν в (4), то функция $f(z)$ в точности принадлежит классу $E_{1/2}$.*
2. *Если при всех достаточно больших n дробь c_n не может быть сокращена ни на один большой простой идеал, то функция $f(z)$ в точности принадлежит классу $E_{1/2}$.*

Продолжим доказательство теоремы. Пусть далее $\Delta = 0$. Тогда

$$\frac{u_1+k_1}{u_2+k_2} = \frac{v_1}{v_2} \tag{7}$$

и в силу (3)

$$b_1 + k_1 c = v_1 x, \quad b_2 + k_2 c = v_2 x, \quad x \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

При $v_1 v_2 < 0$ и достаточно большом x это невозможно, поэтому согласно утверждению 2 следствия 2 в этом случае функция $f(z)$ в точности принадлежит классу $E_{1/2}$. Из (8) следует, что

$$v_1 x \equiv b_1 \pmod{c}, \quad v_2 x \equiv b_2 \pmod{c}. \tag{9}$$

Поскольку в (3) $(v_1, v_2) = 1$, существуют целые числа w_1 и w_2, такие что

$$v_1 w_1 + v_2 w_2 = 1, \tag{10}$$

а тогда из (9) следует, что

$$x \equiv b_1 w_1 + b_2 w_2 \pmod{c}, \tag{11}$$

значит, система (9) имеет не более одного решения.

Подставляя в (9) значение (11), получаем

$$v_1(b_1 w_1 + b_2 w_2) \equiv b_1 \pmod{c}, \quad v_2(b_1 w_1 + b_2 w_2) \equiv b_2 \pmod{c},$$

откуда по (10)

$$b_1(1 - v_2 w_2) + b_2 v_1 w_2 \equiv b_1 \pmod{c}, \quad b_1 v_2 w_1 + b_2(1 - v_1 w_1) \equiv b_2 \pmod{c},$$

т. е.

$$w_2(b_1 v_2 - b_2 v_1) \equiv 0 \pmod{c}, \quad w_1(b_1 v_2 - b_2 v_1) \equiv 0 \pmod{c},$$

и снова по (10) получаем $b_1v_2 - b_2v_1 \equiv 0 \pmod{c}$, а в силу (3)

$$u_1v_2 - u_2v_1 \in \mathbb{Z}. \tag{12}$$

Следовательно, если $u_1v_2 - u_2v_1 \notin \mathbb{Z}$, то согласно утверждению 2 следствия 2 функция $f(z)$ в точности принадлежит классу $E_{1/2}$.

Пусть выполнено условие (12) и x_0 — наименьшее решение системы (8) при $1 \leqslant k_1, k_2 \leqslant n$. Тогда в (9) $x = x_0 + tc$, $t \in \mathbb{Z}^+$, и в (8) $b_i + k_ic = v_i(x_0 + tc)$, $i = 1, 2$, а в силу (2), (3)

$$a_i + k_i = \frac{b_i}{c} + v_i\omega + k_i = v_i\left(\frac{x_0}{c} + \omega + t\right), \quad i = 1, 2.$$

Поэтому дробь $(a_1+k_1)/(a_2+k_2)$ можно сократить на $x_0/c+\omega+t$, в результате чего дробь c_n в (4) сократится на величину

$$g_n = \left(\frac{x_0}{c} + \omega\right)\left(\frac{x_0}{c} + \omega + 1\right)\ldots\left(\frac{x_0}{c} + \omega + T\right), \tag{13}$$

где

$$T = \min\left(\frac{n}{v_1}, \frac{n}{v_2}\right) + O(1). \tag{14}$$

По лемме 1

$$(g_n) = \mathfrak{A}_n\mathfrak{B}_n, \tag{15}$$

где идеал $\mathfrak{A}_n$ состоит из малых, а идеал $\mathfrak{B}_n$ — из больших простых идеалов и

$$N(\mathfrak{B}_n) = T^{(1+o(1))T} = n^{(1+o(1))\min(n/v_1, n/v_2)}. \tag{16}$$

Далее рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. Пусть $v_2 > v_1 > 0$. Тогда из (8) следует, что $k_2 > k_1$ при достаточно большом x.

В главных идеалах имеем

$$(c_\nu) = \left(\frac{(b_1+c)\ldots(b_1+c\nu)}{(b_2+c)\ldots(b_2+c\nu)}\right), \quad \nu = \overline{1, n}. \tag{17}$$

Сначала вынесем из числителя и знаменателя все малые простые идеалы и произведём соответствующее сокращение. По лемме 1 дробь c_ν сократится по крайней мере на идеал $\mathfrak{C}_\nu$ из (6). Затем каждую пару идеалов (a_1+k_1) и (a_2+k_2) из (5) сократим на соответствующий простой идеал $\mathfrak{p}$, если этот идеал большой. Поскольку $k_2 > k_1$, в знаменателе не останется множителей, не сокращённых на такие большие простые идеалы. Мы получим равенство

$$(c_\nu) = \frac{\mathfrak{m}_{11}\ldots\mathfrak{m}_{1\nu}}{\mathfrak{m}_{21}\ldots\mathfrak{m}_{2\nu}}\,\mathfrak{u}_\nu\mathfrak{v}_\nu, \quad \nu = \overline{1, n}, \tag{18}$$

где целые идеалы $\mathfrak{m}_{ks}$ состоят только из больших простых идеалов, $(\mathfrak{m}_{1s}, \mathfrak{m}_{2t}) = 1$, $s, t = \overline{1, n}$, $\mathfrak{u}_\nu$ — дробные идеалы, состоящие из малых простых идеалов, а в целые идеалы $\mathfrak{v}_\nu$ входят те большие простые идеалы, для которых $k_1 \leqslant \nu < k_2$.

Общим знаменателем дробных идеалов (c_ν), $\nu = \overline{1, n}$, является идеал $\mathfrak{m}_{21}\ldots\mathfrak{m}_{2n}$, умноженный на идеал $\mathfrak{d}_n$, равный общему знаменателю идеалов

$\mathfrak{u}_\nu$, $\nu = \overline{1,n}$. Поскольку в дроби c_n произошло сокращение по крайней мере на идеал $\mathfrak{C}_n$, то по лемме 1

$$N(\mathfrak{d}_n) = n^{o(n)}.$$

Из равенств (14), (15), (16), (17) и (18) следует, что

$$N(\mathfrak{m}_{21}\dots\mathfrak{m}_{2n}) \leqslant \frac{N((b_2+c)\dots(b_2+cn))}{N(\mathfrak{C}_n)N(\mathfrak{B}_n)} = \\ = n^{(2+o(1))n-(1+o(1))n-(1+o(1))(n/v_2)} = n^{(1-(1/v_2)+o(1))n},$$

т. е. $f(z) \in E_\tau$ с $\tau = (1 - 1/v_2)/2$.

Функция Куммера $f(z)$ в точности принадлежит этому классу, так как из сказанного выше следует, что идеал (c_n) может быть сокращён только на те большие простые идеалы, которые входят в произведение (13), т. е. на $\mathfrak{B}_n$.

Случай 2. Пусть $v_1 > v_2 > 0$. Тогда в (5) и в (8) $k_1 > k_2$, и поэтому выполняются условия утверждения 1 следствия 2, а именно если большой простой идеал $\mathfrak{p}$ удовлетворяет условию (5), то этот идеал делит числитель, но не делит знаменатель дроби (4) при $\nu = k_2$. По следствию 2 функция $f(z)$ в точности принадлежит классу $E_{1/2}$.

Случай 3. Пусть $v_1 = v_2 > 0$. Тогда при $\Delta = 0$ в равенстве (7) $u_1 + k_1 = u_2 + k_2$ и $u_1 - u_2 \in \mathbb{Z}$ (при $\Delta \neq 0$ соответствующий идеал $\mathfrak{p}$ малый). При $u_2 > u_1$ выполняется неравенство $k_1 > k_2$ и, как и в предыдущем случае, дробь c_{k_2} не сокращается на большой простой идеал $\mathfrak{p}$, удовлетворяющий условию (5), и по следствию 2 функция $f(z)$ в точности принадлежит классу $E_{1/2}$. Легко проверить, что при $u_1 - u_2 \in \mathbb{Z}^+$ функция $f(z)$ является E-функцией.

Случай 4. Пусть, наконец, $v_1 v_2 = 0$, $|v_1| + |v_2| > 0$. Тогда в дробях c_ν не происходит сокращения больших простых идеалов и согласно утверждению 2 следствия 2 функция $f(z)$ в точности принадлежит классу $E_{1/2}$.

Таким образом, мы разобрали все случаи теоремы 1, чем завершили её доказательство. □

Литература

[1] Галочкин А. И. Об арифметических свойствах значений некоторых целых гипергеометрических функций // Сиб. мат. журн. — 1976. — Т. 17, № 6. — С. 1220—1235.

[2] Галочкин А. И. О критерии принадлежности гипергеометрических функций Зигеля классу E-функций // Мат. заметки. — 1981. — Т. 29, № 1. — С. 3—14.

[3] Спринджук В. Г. Иррациональность значений некоторых трансцендентных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1968. — Т. 32, № 1. — С. 93—107.

[4] Спринджук В. Г. К теории гипергеометрических функций Зигеля // Докл. АН БССР. — 1969. — Т. 13, № 5. — С. 389—391.

[5] Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. — М.: Наука, 1987.

[6] Siegel C. L. Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen // Abh. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl. — 1929. — No. 1. — S. 1—70.

[7] Siegel C. L. Transcendental Numbers. — Princeton: Princeton University Press, 1949.