Об ослабленной гипотезе Зигеля

В. А. ГОРЕЛОВ
Московский энергетический институт
(технический университет)
e-mail: gorelovva@mpei.ru

УДК 511.36

Ключевые слова: E-функции, гипергеометрические функции, метод Зигеля.

Аннотация

В статье доказывается эквивалентность двух имеющихся в математической литературе определений E-функций в случае, когда E-функции удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям второго порядка. Для этого множества функций доказывается также ослабленный вариант известной гипотезы Зигеля о представимости E-функции в виде многочлена от гипергеометрических функций.

Abstract

V. A. Gorelov, On the weakened Siegel's conjecture, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 6, pp. 33—39.

In the paper, we prove that two definitions of E-functions present in mathematics are equivalent if E-functions satisfy second-order linear differential equations. For this set of functions, a weakened variant of the well-known Siegel conjecture about representability of any E-function by a polynomial of hypergeometric functions is also proved.

К. Зигель называет аналитическую функцию

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n}{n!} \tag{1}$$

E-функцией, если:

1) $c_n \in \mathbb{K}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, где $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] < \infty$;
2) при любом $\varepsilon > 0$ $\overline{|c_n|} = O(n^{\varepsilon n})$, $n \to \infty$;
3) существует последовательность $\{d_n\}$, $d_n \in \mathbb{N}$, такая что $d_n c_k \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $n = 1, 2, \ldots$, и $d_n = O(n^{\varepsilon n})$ при $n \to \infty$.

Другие авторы рассматривали также E-функции в более узком смысле — когда величины $\overline{|c_n|}$ и d_n не превосходят c^n.

Для приложений метода Зигеля существенное значение имеет высказанная К. Зигелем гипотеза, что всякая E-функция, удовлетворяющая линейному дифференциальному уравнению с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, представляется в виде многочлена с алгебраическими коэффициентами от z и конечного числа гипергеометрических E-функций, а также функций, получающихся из них заменой z

на αz при $\alpha \in \mathbb{A}$, где $\mathbb{A}$ — множество всех алгебраических чисел. Из этой гипотезы следует, в частности, эквивалентность двух вышеприведённых определений E-функции в рассматриваемом случае.

Гипергеометрическими E-функциями (определение см., например, в [8, глава 5, § 1]) являются, в частности, функции Куммера

$$A_{\mu,\nu}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(\nu+1)\dots(\nu+n-1)}{n!\mu(\mu+1)\dots(\mu+n-1)} z^n, \quad \mu, \nu \in \mathbb{Q}, \quad \mu \notin \mathbb{Z}^-,$$

удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$y'' + \left(-1 + \frac{\mu}{z}\right) y' - \frac{\nu}{z} y = 0,$$

а также функции $\varphi_\lambda(z) = A_{\lambda+1,1}(z)$ и $e^z = \varphi_0(z)$.

В [3—5] гипотеза Зигеля была доказана для E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям первого порядка и некоторым классам линейных дифференциальных уравнений второго порядка. В общем случае уравнения второго порядка теорема 1 статьи [5] утверждает, что функция $f(z)$ тогда и только тогда является E-функцией, удовлетворяющей уравнению

$$Q_2 y'' + Q_1 y' + Q_0 y = Q, \quad Q_2, Q_1, Q_0, Q \in \mathbb{C}[z], \tag{2}$$

когда

$$f(z) = P_0 \varphi_\lambda(\alpha z) + P_1 \varphi_{\lambda_1}(\alpha_1 z) + P$$

либо

$$f(z) = P_0 f_*(z) + P_1 f_*'(z) + P,$$

где $P_0, P_1, P \in \mathbb{A}[z]$, $\lambda, \lambda_1 \in \mathbb{Q}$, $\alpha, \alpha_1 \in \mathbb{A}$, $f_*(z)$ — E-функция, удовлетворяющая уравнению

$$y'' + \left(a_1 + \frac{a_2}{z}\right) y' + \left(a_3 + \frac{a_4}{z} + \frac{a_5}{z^2}\right) y = a_6 + \frac{a_7}{z}, \tag{3}$$

$a_1, \dots, a_7 \in \mathbb{A}$.

Вопрос о справедливости гипотезы Зигеля для уравнения (3) остаётся открытым. В частности, можно рассмотреть E-функцию

$$V(z) = e^{\alpha z} \int_0^z e^{-\alpha t} \varphi_\lambda(t)\, dt = z + \left(\frac{1}{\lambda+1} + \alpha\right) \frac{z^2}{2} + \dots,$$

удовлетворяющую уравнению

$$y'' + \left(-\alpha - 1 + \frac{\lambda}{z}\right) y' + \left(\alpha - \frac{\lambda\alpha}{z}\right) y = \frac{\lambda}{z}.$$

По всей вероятности, функция $V(z)$ (как и бесконечное множество аналогичных интегралов) не выражается в виде многочлена от гипергеометрических E-функций, но строгое доказательство данного утверждения пока не получено. В связи с этим возникает необходимость рассмотреть более слабый вариант гипотезы

Зигеля, из которого по-прежнему следовала бы эквивалентность двух вышеприведённых определений E-функции. А именно, к допустимым операциям над рассматриваемыми E-функциями можно добавить умножение n-го члена разложения E-функции (1) на $[a,n]/[b,n]$, где $[a,0]=1$, $[a,n]=a(a+1)\dots(a+n-1)$, $a,b\in\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}^-$. Эта операция, очевидно, не выводит за пределы множества E-функций. Она позволяет включить в число допустимых преобразований интегрирование и замену функции (1) на

$$z^{-\lambda}\int z^{\lambda-1}f(z)\,dz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!(n+\lambda)}z^n,\quad \lambda\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}^-$$

(см. [8, глава 5, § 2]). В настоящей работе доказывается, что ослабленная в этом смысле гипотеза Зигеля справедлива для всех уравнений вида (2).

Теорема. *Всякая E-функция, удовлетворяющая уравнению* (2), *может быть получена из функций Куммера с рациональными параметрами при помощи операций сложения, умножения, замены аргумента z на αz при $\alpha\in\mathbb{A}$, а также умножения n-го члена степенного разложения по степеням z рассматриваемых функций на $[a,n]/[b,n]$, где $a,b\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}^-$.*

Доказательство. Пусть E-функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению (3). Если обозначить λ, λ_1 показатели соответствующего ему однородного дифференциального уравнения в точке $z=0$, то уравнение (3) примет вид

$$y''+\left(a_1+\frac{1-\lambda-\lambda_1}{z}\right)y'+\left(a_3+\frac{a_4}{z}+\frac{\lambda\lambda_1}{z^2}\right)y=a_6+\frac{a_7}{z}. \tag{4}$$

Пусть $\lambda\in\mathbb{N}$, а если и $\lambda_1\in\mathbb{N}$, то пусть $\lambda\geqslant\lambda_1$. Как установлено в конце доказательства леммы 12 работы [5], найдётся E-функция $f^*(z)$, удовлетворяющая уравнению вида (3), такая что $f(z)=z^\lambda f^*(z)+P$, $P\in\mathbb{A}[z]$. Так как $f^*(z)= = z^{-\lambda}(f(z)-P)$, то показатели однородного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению, которому удовлетворяет $f^*(z)$, равны 0 и $\lambda_1-\lambda$ (см. [5, лемма 9]). Таким образом, в дальнейшем можно считать, что $\lambda,\lambda_1\notin\mathbb{N}$.

Рассмотрим функцию $g(z)=z^{-\lambda}e^{\alpha z}f(z)$, где $\alpha^2-a_1\alpha+a_3=0$. Согласно [5, лемма 9] она удовлетворяет уравнению

$$y''+\left(a_1-2\alpha+\frac{1+\lambda-\lambda_1}{z}\right)y'+\frac{a_4+a_1\lambda-\alpha(1+\lambda-\lambda_1)}{z}y= \\ =a_6z^{-\lambda}e^{\alpha z}+a_7z^{-\lambda-1}e^{\alpha z}.$$

Тогда функция $g_1(z)=g(z/(2\alpha-a_1))=z^{-\lambda}f_1(z)$, где $f_1(z)=ce^{\alpha_1 z}f(z/(2\alpha-a_1))$, $\alpha_1=\alpha/(2\alpha-a_1)$, $c\in\mathbb{A}$, удовлетворяет уравнениям

$$y''+\left(-1+\frac{1+\lambda-\lambda_1}{z}\right)y'-\frac{a_8}{z}y=a_9z^{-\lambda}e^{\alpha_1 z}+a_{10}z^{-\lambda-1}e^{\alpha_1 z}, \tag{5}$$

$$zy''+(-z+1+\lambda-\lambda_1)y'-a_8y=a_9z^{1-\lambda}e^{\alpha_1 z}+a_{10}z^{-\lambda}e^{\alpha_1 z}. \tag{6}$$

Докажем, что $\lambda, \lambda_1, a_8 \in \mathbb{Q}$. Фундаментальную систему решений однородного уравнения, соответствующего (4), образуют функции $z^\lambda f_2(z)$ и $z^{\lambda_1} f_3(z)$ либо $z^\lambda f_2(z)$ и $z^\lambda(f_2(z)\ln z + f_3(z))$, где $f_2(z)$, $f_3(z)$ — целые функции (см., например, [2, глава 4, § 3, 4]). Можно показать, что всякое решение уравнения (4), как и соответствующего ему однородного уравнения, удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению третьего порядка (см. [5, доказательство леммы 5]). Тогда функции $f(z)$, $z^\lambda f_2(z)$ и $z^{\lambda_1} f_3(z)$ (либо $z^\lambda(f_2(z)\ln z + f_3(z))$) образуют фундаментальную систему решений этого однородного дифференциального уравнения. Согласно [9, следствие 4.4 и замечание на с. 746] $\lambda, \lambda_1 \in \mathbb{Q}$, а $f_2(z)$ есть E-функция. Следовательно, E-функция $f_2(z/(2\alpha - a_1))e^{\alpha_1 z}$ удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению, соответствующему (5). Если взять $\lambda \geqslant \lambda_1$, то показателями последнего уравнения будут числа 0 и $\lambda_1 - \lambda \leqslant 0$. Поэтому всякое его целое решение должно быть пропорционально $A_{1+\lambda-\lambda_1,a_8}(z)$. Но тогда $A_{1+\lambda-\lambda_1,a_8}(z)$ есть E-функция и, следовательно (см. [1]), $a_8 \in \mathbb{Q}$.

Наиболее простое выражение для $f(z)$ через функции Куммера можно получить с помощью метода вариации постоянных. В случае $\lambda - \lambda_1 \notin \mathbb{Z}$ однородное уравнение, соответствующее уравнению (5), имеет фундаментальную систему решений $\{A_{1+\lambda-\lambda_1,a_8}(z); z^{\lambda_1-\lambda}A_{1+\lambda_1-\lambda,a_8+\lambda_1-\lambda}(z)\}$ и вронскиан $(\lambda_1 - \lambda)z^{\lambda_1-\lambda-1}e^z$ (см. [7, п. 7.5]). Отсюда нетрудно получить, что

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{z}{2\alpha - a_1}\right) &= \\
&= a_{11}A_{1+\lambda-\lambda_1,a_8}(z)z^\lambda e^{-\alpha_1 z}\int z^{-\lambda}(a_9 z + a_{10})e^{(\alpha_1-1)z}A_{1+\lambda_1-\lambda,a_8+\lambda_1-\lambda}(z)\,dz + \\
&+ a_{12}A_{1+\lambda_1-\lambda,a_8+\lambda_1-\lambda}(z)z^{\lambda_1}e^{-\alpha_1 z}\int z^{-\lambda_1}(a_9 z + a_{10})e^{(\alpha_1-1)z}A_{1+\lambda-\lambda_1,a_8}(z)\,dz.
\end{aligned}
$$

Но в случае $\lambda - \lambda_1 \in \mathbb{Z}$ этот метод неприменим, так как, например, при $\lambda = \lambda_1$ не ясно, как выразить через гипергеометрические функции фундаментальную систему решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (5) [7, п. 7.5].

Далее считаем, что если $(\lambda, \lambda_1) \neq (0, 0)$, то $\lambda \neq 0$. Применим к обеим частям уравнения (6) преобразование Лапласа, ставящее в соответствие функции

$$
f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n
$$

функцию

$$
f^\wedge(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!a_n}{z^{n+1}}
$$

(см., например, [6, глава 2]). Из свойств преобразования Лапласа (см. там же) следует, что

$$\begin{aligned} 2(zf)^\wedge &= -(f^\wedge)', & (zf')^\wedge &= -z(f^\wedge)' - f^\wedge, \\ (f')^\wedge &= zf^\wedge - f(0), & (zf'')^\wedge &= -z^2(f^\wedge)' - 2zf^\wedge + f(0). \end{aligned} \tag{7}$$

При $a \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} a > -1$, имеем $(z^a)^\wedge = \Gamma(a+1)z^{-a-1}$ (см. [6, глава 2, § 4]). Поскольку правая часть последнего равенства имеет смысл при всех $a \in \mathbb{C}$, $-a \notin \mathbb{N}$, то можно определить преобразование Лапласа степенного ряда

$$g(z) = z^a \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

равенством

$$\begin{aligned} g^\wedge(z) = \left(z^a \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)^\wedge = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^{n+a})^\wedge = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma(a+n+1) z^{-a-n-1} = \\ = \Gamma(a+1) z^{-a-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+1)\dots(a+n)a_n}{z^n}, \end{aligned} \tag{8}$$

где $a \in \mathbb{C}$, $-a \notin \mathbb{N}$. Если $a \notin \mathbb{Z}^-$, то вместо формул (7) получим

$$\begin{aligned} 2(zg)^\wedge &= -(g^\wedge)', & (g')^\wedge &= zg^\wedge, \\ (zg')^\wedge &= -z(g^\wedge)' - g^\wedge, & (zg'')^\wedge &= -z^2(g^\wedge)' - 2zg^\wedge. \end{aligned} \tag{9}$$

Первые два из равенств (9) доказываются непосредственной проверкой, путём подстановки $g(z) = z^a$, $a \notin \mathbb{Z}^-$, остальные являются их следствием. В результате применения преобразования Лапласа к равенству (6) с учётом равенств (9) в случае $(\lambda, \lambda_1) \neq (0,0)$ и равенств (7) в случае $(\lambda, \lambda_1) = (0,0)$ получим

$$(-z^2 + z)(y^\wedge)' + (1 - a_8 + (\lambda - \lambda_1 - 1)z)y^\wedge = a_9(z^{1-\lambda}e^{\alpha_1 z})^\wedge + a_{10}(z^{-\lambda}e^{\alpha_1 z})^\wedge,$$

$$(y^\wedge)' + \left(\frac{1-a_8}{z} + \frac{\lambda - \lambda_1 - a_8}{1-z} \right) y^\wedge = \frac{1}{z - z^2}(a_9(z^{1-\lambda}e^{\alpha_1 z})^\wedge + a_{10}(z^{-\lambda}e^{\alpha_1 z})^\wedge).$$

Тогда ввиду [3, лемма 13]

$$\begin{aligned} \frac{(z^{-\lambda}y^\wedge)'}{\Gamma(1-\lambda)} + \left(\frac{1 - a_8 + \lambda}{z} + \frac{\lambda - \lambda_1 - a_8}{1-z} \right) \frac{z^{-\lambda}y^\wedge}{\Gamma(1-\lambda)} = \\ = \frac{1}{z - z^2} \left(\frac{2-\lambda}{z} \frac{a_9 z^{1-\lambda}}{\Gamma(2-\lambda)} (z^{1-\lambda}e^{\alpha_1 z})^\wedge + \frac{a_{10} z^{-\lambda}}{\Gamma(1-\lambda)} (z^{-\lambda}e^{\alpha_1 z})^\wedge \right). \end{aligned}$$

Из равенства (8) следует, что при $\alpha \in \mathbb{C}$, $-\alpha \notin \mathbb{N}$,

$$\frac{z^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(z^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)^\wedge = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}{n!} a_n z^n \right)^\wedge. \tag{10}$$

Поэтому

$$\frac{z^{1-\lambda}(z^{1-\lambda}e^{\alpha_1 z})^\wedge}{\Gamma(2-\lambda)} = (A_{1,2-\lambda}(\alpha_1 z))^\wedge, \quad \frac{z^{-\lambda}(z^{-\lambda}e^{\alpha_1 z})^\wedge}{\Gamma(1-\lambda)} = (A_{1,1-\lambda}(\alpha_1 z))^\wedge,$$

а функция Φ, определяемая равенством $\Phi^\wedge = z^{-\lambda}(g_1(z))^\wedge/\Gamma(1-\lambda)$, является E-функцией, удовлетворяющей уравнению

$$(\Phi^\wedge)' + \left(\frac{1-a_8+\lambda}{z} + \frac{\lambda-\lambda_1-a_8}{1-z}\right)\Phi^\wedge = \\ = \frac{1}{z-z^2}\left(\left(\frac{a_{13}}{z}\right)(A_{1,2-\lambda}(\alpha_1 z))^\wedge + a_{10}(A_{1,1-\lambda}(\alpha_1 z))^\wedge\right). \quad (11)$$

Заметим, что при $\lambda\lambda_1 \neq 0$ справедливо $\Phi(0) = f(0) = 0$, а при $\lambda\lambda_1 = 0$, согласно нашим допущениям, $\lambda_1 = 0$. Отсюда с помощью формул (7) получим

$$\Phi'' + \left(-1 + \frac{1-\lambda_1}{z}\right)\Phi' - \frac{a_8-\lambda}{z}\Phi = \\ = \frac{a_{10}}{z}A_{1,1-\lambda}(\alpha_1 z) + \frac{a_{13}}{z}\int A_{1,2-\lambda}(\alpha_1 z)\,dz. \quad (12)$$

Если $a_8 - \lambda \in \mathbb{Z}^-$, то функция $A_{1-\lambda_1,a_8-\lambda}(z)$, удовлетворяющая однородному уравнению, соответствующему (12), является многочленом степени $k = \lambda - a_8$. Тогда ввиду (10) некоторый многочлен P степени k является решением однородного уравнения, соответствующего линейному дифференциальному уравнению, которому удовлетворяет функция $f_1(z)$. Функция $f_1^{(k)}(z)$ является решением аналогичного уравнения

$$Q_2 y'' + Q_1 y' + Q_0 y = Qe^{\alpha_1 z}, \quad Q_2, Q_1, Q_0, Q \in \mathbb{A}[z], \quad (13)$$

а функция $P^{(k)} \equiv c \in \mathbb{A}$ удовлетворяет соответствующему (13) однородному уравнению (см. [5, лемма 10]). Последнее возможно только при $Q_0 \equiv 0$. Следовательно, $e^{-\alpha_1 z}f_1^{(k+1)}(z) = P_1\varphi_{\lambda_2}(z) + P_2$, где $P_1, P_2 \in \mathbb{A}[z]$, $\lambda_2 \in \mathbb{Q}$ [3, теорема 2, лемма 13]. Отсюда вытекает справедливость теоремы в рассматриваемом случае.

Пусть теперь $\nu = a_8 - \lambda \notin \mathbb{Z}^-$. Рассмотрим функцию Ψ, такую что $z^{\nu-1}(z^{\nu-1}\Psi)^\wedge/\Gamma(\nu) = \Phi^\wedge$. Ввиду равенства (10) функция Ψ является E-функцией. Кроме того,

$$(A_{1,2-\lambda}(z))^\wedge = \frac{z^{\nu+1}(z^{\nu+1}A_{\nu+2,2-\lambda}(z))^\wedge}{\Gamma(\nu+2)}, \quad (A_{1,1-\lambda}(z))^\wedge = \frac{z^{\nu}(z^{\nu}A_{\nu+1,1-\lambda}(z))^\wedge}{\Gamma(\nu+1)}.$$

Перепишем равенство (11) в виде

$$\left(\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}(z^{\nu-1}\Psi)^\wedge\right)' + \left(\frac{1-a_8+\lambda}{z} + \frac{\lambda-\lambda_1-a_8}{1-z}\right)\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}(z^{\nu-1}\Psi)^\wedge = \\ = \frac{1}{1-z}\left(a_{13}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma(\nu+2)}(z^{\nu+1}A_{\nu+2,2-\lambda}(\alpha_1 z))^\wedge + a_{10}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma(\nu+1)}(z^{\nu}A_{\nu+1,1-\lambda}(\alpha_1 z))^\wedge\right),$$

откуда согласно [3, лемма 13]

$$((z^{\nu-1}\Psi)^\wedge)' + \frac{\lambda-\lambda_1-a_8}{1-z}(z^{\nu-1}\Psi)^\wedge =$$
$$= \frac{1}{1-z}\left(a_{14}(z^{\nu+1}A_{\nu+2,2-\lambda}(\alpha_1 z))^\wedge + a_{15}(z^{\nu}A_{\nu+1,1-\lambda}(\alpha_1 z))^\wedge\right),$$
$$(1-z)((z^{a_8-\lambda-1}\Psi)^\wedge)' + (\lambda-\lambda_1-a_8)(z^{a_8-\lambda-1}\Psi)^\wedge =$$
$$= a_{14}(z^{a_8-\lambda+1}A_{a_8-\lambda+2,2-\lambda}(\alpha_1 z))^\wedge + a_{15}(z^{a_8-\lambda}A_{a_8-\lambda+1,1-\lambda}(\alpha_1 z))^\wedge.$$

Из полученного равенства с учётом формул (9) следует

$$(z^{a_8-\lambda-1}\Psi)' + \left(-1+\frac{1-a_8+\lambda-\lambda_1}{z}\right)z^{a_8-\lambda-1}\Psi =$$
$$= z^{a_8-\lambda-1}(a_{14}zA_{a_8-\lambda+2,2-\lambda}(\alpha_1 z) + a_{15}A_{a_8-\lambda+1,1-\lambda}(\alpha_1 z)),$$

откуда (см. [3, лемма 13])

$$(z^{-\lambda_1}e^{-z}\Psi)' = z^{-\lambda_1}e^{-z}(a_{14}zA_{a_8-\lambda+2,2-\lambda}(\alpha_1 z) + a_{15}A_{a_8-\lambda+1,1-\lambda}(\alpha_1 z)),$$
$$\Psi = e^z z^{\lambda_1}\int z^{-\lambda_1}e^{-z}(a_{14}zA_{a_8-\lambda+2,2-\lambda}(\alpha_1 z) + a_{15}A_{a_8-\lambda+1,1-\lambda}(\alpha_1 z))\,dz.$$

Поскольку функция $f_1(z)$ получается из Ψ путём умножения n-го члена степенного разложения на $[\nu,n]/[1-\lambda,n]$, теорема доказана. □

Литература

[1] Галочкин А. И. О критерии принадлежности гипергеометрических функций Зигеля классу E-функций // Мат. заметки. — 1981. — Т. 29, № 1. — С. 3—14.

[2] Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.—Л.: Гостехиздат, 1950.

[3] Горелов В. А. Об алгебраической независимости значений E-функций в особых точках и гипотезе Зигеля // Мат. заметки. — 2000. — Т. 67, № 2. — С. 174—190.

[4] Горелов В. А. О гипотезе Зигеля для случая линейных однородных дифференциальных уравнений 2-го порядка // Мат. заметки. — 2004. — Т. 75, № 4. — С. 549—565.

[5] Горелов В. А. О структуре множества E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям 2-го порядка // Мат. заметки. — 2005. — Т. 78, № 3. — С. 331—348.

[6] Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. — М.: ФМ, 1961.

[7] Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. — М.: Мир, 1980.

[8] Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. — М.: Наука, 1987.

[9] Andre Y. Séries Gevrey de type arithmétique // Ann. of Math. — 2000. — Vol. 151. — P. 705—756.