Свойства коэффициентов некоторых линейных форм от обобщённых полилогарифмов*

С. А. ЗЛОБИН
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: sirg_zlobin@mail.ru

УДК 511.36

Ключевые слова: иррациональность, дзета-функция Римана, гипотеза Васильева, обобщённый полилогарифм, кратный интеграл, линейная форма, знаменатель, оценка коэффициентов.

Аннотация

В работе исследуются свойства коэффициентов линейной формы от обобщённых полилогарифмов, возникающей из некоторого кратного интеграла. В качестве следствия мы доказываем гипотезу Васильева, связанную с проблемой иррациональности дзета-функции Римана в нечётных точках.

Abstract

S. A. Zlobin, Properties of coefficients of certain linear forms in generalized polylogarithms, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 6, pp. 41—58.

We study properties of coefficients of a linear form originating from a multiple integral. As a corollary, we prove Vasilyev's conjecture, connected with the problem of irrationality of the Riemann zeta function at odd integers.

1. Введение

Для каждого вектора $\vec{s} = (s_1, \ldots, s_l)$, $s_j \in \mathbb{N}$, определим обобщённый полилогарифм равенством

$$\operatorname{Le}_{\vec{s}}(z) = \sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_l \geqslant 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \ldots n_l^{s_l}}.$$

Этот ряд сходится при $|z| < 1$. В [4], в связи с приближениями значений обобщённых полилогарифмов, при условии, что a_i, b_i, c_j — целые числа, удовлетворяющие некоторым неравенствам, было доказано тождество

$$S(z) = \int\limits_{[0,1]^m} \frac{\prod\limits_{i=1}^{m} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod\limits_{j=1}^{l} (1 - z x_1 x_2 \ldots x_{r_j})^{c_j}} \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_m = \sum_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1}) \operatorname{Le}_{\vec{s}}(z), \quad (1)$$

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ 03-01-00359.

© 2005 *Центр новых информационных технологий МГУ,*
Издательский дом «Открытые системы»

где $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_l = m$ и $P_{\vec{s}}$ — многочлены с рациональными коэффициентами. Это представление единственно в силу линейной независимости $\mathrm{Le}_{\vec{s}}(z)$ с различными наборами индексов над $\mathbb{C}(z)$ (см. [4, следствие 1]).

Для арифметических приложений важно иметь оценки абсолютной величины и общего знаменателя коэффициентов многочленов $P_{\vec{s}}$ в зависимости от параметров a_i, b_i, c_j, а также размерности интеграла m. Это является основной целью данной работы.

Одно из возможных применений интегралов вида $S(z)$ связано с проблемой иррациональности дзета-функции Римана $\zeta(k)$ в нечётных точках $k = 3, 5, 7, \ldots$. В [1] Д. В. Васильев рассмотрел интегралы

$$V_{m,n} = \int\limits_{[0,1]^m} \frac{\prod\limits_{i=1}^{m} x_i^n (1-x_i)^n}{(1 - x_1 + x_1x_2 - \ldots + (-1)^m x_1x_2\ldots x_m)^{n+1}}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_m.$$

Он предположил, что

$$V_{2l+1,n} = A_0 + \sum_{j=1}^{l} A_j \zeta(2j+1), \quad D_n^{2l+1} A_j \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

где D_n — наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \ldots, n$. Интеграл $V_{3,n}$ равен интегралу, с помощью которого Ф. Бейкерс доказал иррациональность $\zeta(3)$ (см. [8]). Для этого интеграла равенство (2) выполняется. Сам Васильев доказал равенство (2) для $m = 5$. В. В. Зудилин [5] показал справедливость (2) с более слабым включением $D_n^{2l+2}\Phi_n^{-1} A_j \in \mathbb{Z}$, где Φ_n — произведение простых чисел $p < n$, для которых $2/3 \leqslant \{n/p\} < 1$ ($\{\cdot\}$ — дробная часть числа). Справедливость $D_n^{2l+1} A_j \in \mathbb{Z}$ была доказана К. Краттенталером и Т. Ривоалем [9, теорема 1]. Их доказательство технически сложно. В данной работе мы докажем (2), используя представление $V_{m,n}$ в виде (1) (см. [2, следствие 2]):

$$V_{2l+1,n} = \int\limits_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod\limits_{i=1}^{2l+1} x_i^n (1-x_i)^n \, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{2l+1}}{\prod\limits_{j=1}^{l} (1 - x_1 \ldots x_{2j})^{n+1} (1 - x_1x_2 \ldots x_{2l}x_{2l+1})^{n+1}}. \tag{3}$$

Теоремы 1 и 2, доказываемые в разделах 3 и 4 настоящей статьи, дают при некоторых условиях оценки общего знаменателя коэффициентов $P_{\vec{s}}$ в представлении $S(z)$ и их величины.

2. Элементарные суммы

Назовём сумму вида

$$\sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_l \geqslant 1} z^{n_1 - 1} \prod_{j=1}^{l} \frac{1}{(n_j + p_j)^{u_j}}, \quad p_j \in \{0, 1, 2, \ldots\}, \quad u_j \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

элементарной. Из [4, теорема 1] следует, что эту сумму можно представить в виде (1).

Далее для любого вектора $\vec{s}=(s_1,s_2,\ldots,s_l)$ будет использоваться обозначение $w(\vec{s})=s_1+s_2+\ldots+s_l$. *Высотой* многочлена назовём максимум модулей его коэффициентов.

Лемма 1. *Пусть* $P=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant l} p_j$. *Тогда для суммы* (4) *высоты многочленов* $P_{\vec{s}}$ *не превосходят*

$$\max(l!\cdot(w(\vec{u})2^{w(\vec{u})})^{l-1}P^l,1) \tag{5}$$

и $D_P^{w(\vec{u})-w(\vec{s})}P_{\vec{s}}(z)\in\mathbb{Z}[z]$.

Доказательство. Введём следующие обозначения:

$$r_0=0,\quad r_j=u_1+u_2+\ldots+u_j,\quad m=r_l=w(\vec{u}).$$

Используя [4, лемма 2], выражение (4) можно записать в виде интеграла

$$I(p_1,p_2,\ldots,p_l)=\int\limits_{[0,1]^m}\frac{\prod\limits_{j=1}^{l}(x_{r_{j-1}+1}x_{r_{j-1}+2}\ldots x_{r_j})^{p_j}}{\prod\limits_{j=1}^{l}(1-zx_1x_2\ldots x_{r_j})}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_m.$$

Доказательство леммы 1 проведём индукцией по вектору $(l,p_1+p_2+\ldots+p_l)$. Векторы (l,k) мы упорядочиваем в лексикографическом порядке, т. е.

$$(l_1,k_1)<(l_2,k_2)\iff l_1<l_2 \text{ или } l_1=l_2 \text{ и } k_1<k_2.$$

Утверждение, которое мы будем доказывать по индукции, немного более строгое, чем утверждение леммы: высоты $P_{\vec{s}}(z)$ не превосходят

$$\max\biggl(\sum_{j=1}^{l}p_j\cdot(l-1)!\cdot(m2^mP)^{l-1},1\biggr).$$

Эта оценка действительно более точная, чем (5), так как $\sum\limits_{j=1}^{l}p_j\leqslant l\cdot P$. База индукции ($p_1=p_2=\ldots=p_l=0$) следует из (4):

$$I(0,0,\ldots,0)=z^{-1}\operatorname{Le}_{u_1,u_2,\ldots,u_l}(z).$$

Пусть $p_h>0$ при некотором $h>1$. Запишем равенство

$$\begin{aligned}(x_{r_{h-1}+1}x_{r_{h-1}+2}\ldots x_{r_h})^{p_h}&=(x_{r_{h-1}+1}x_{r_{h-1}+2}\ldots x_{r_h})^{p_h-1}+\\&+(x_{r_{h-1}+1}x_{r_{h-1}+2}\ldots x_{r_h})^{p_h}(1-zx_1x_2\ldots x_{r_{h-1}})-\\&-(x_{r_{h-1}+1}x_{r_{h-1}+2}\ldots x_{r_h})^{p_h-1}(1-zx_1x_2\ldots x_{r_h}),\end{aligned}$$

из которого следует

$$I(p_1,p_2,\ldots,p_h,\ldots,p_l) = I(p_1,p_2,\ldots,p_h-1,\ldots,p_l) +$$
$$+\int\limits_{[0,1]^m} \frac{\prod\limits_{j=1}^{l}(x_{r_{j-1}+1}x_{r_{j-1}+2}\ldots x_{r_j})^{p_j}}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq h-1}}^{l}(1-zx_1x_2\ldots x_{r_j})}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_m -$$
$$-\int\limits_{[0,1]^m} \frac{\prod\limits_{j=1}^{l}(x_{r_{j-1}+1}x_{r_{j-1}+2}\ldots x_{r_j})^{p'_j}}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq h}}^{l}(1-zx_1x_2\ldots x_{r_j})}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_m,$$

где $p'_j = p_j$ при $j \neq h$ и $p'_h = p_h - 1$. Используя [4, лемма 2], перепишем это равенство как

$$I(p_1,p_2,\ldots,p_h,\ldots,p_l) =$$
$$= I(p_1,p_2,\ldots,p_h-1,\ldots,p_l) + \tag{6}$$
$$+\sum_{n_1\geqslant n_2\geqslant\ldots\geqslant n_{l-1}\geqslant 1} z^{n_1-1}\prod_{j=1}^{h-2}\frac{1}{(n_j+p_j)^{u_j}}\times$$
$$\times\frac{1}{(n_{h-1}+p_{h-1})^{u_{h-1}}(n_{h-1}+p_h)^{u_h}}\prod_{j=h}^{l-1}\frac{1}{(n_j+p_{j+1})^{u_{j+1}}} - \tag{7}$$
$$-\sum_{n_1\geqslant n_2\geqslant\ldots\geqslant n_{l-1}\geqslant 1} z^{n_1-1}\prod_{j=1}^{h-1}\frac{1}{(n_j+p_j)^{u_j}}\times$$
$$\times\frac{1}{(n_h+p_h-1)^{u_h}(n_h+p_{h+1})^{u_{h+1}}}\prod_{j=h+1}^{l-1}\frac{1}{(n_j+p_{j+1})^{u_{j+1}}}. \tag{8}$$

В случае $h = l$ вычитаемая сумма выглядит как

$$\frac{1}{p_l^{u_l}}\sum_{n_1\geqslant n_2\geqslant\ldots\geqslant n_{l-1}\geqslant 1} z^{n_1-1}\prod_{j=1}^{l-1}\frac{1}{(n_j+p_j)^{u_j}}.$$

Рассмотрим подробнее сумму (7). Если $p_{h-1} = p_h$, то

$$\frac{1}{(n_{h-1}+p_{h-1})^{u_{h-1}}(n_{h-1}+p_h)^{u_h}} = \frac{1}{(n_{h-1}+p_{h-1})^{u_{h-1}+u_h}},$$

т. е. сумма (7) сама является элементарной и к ней можно применить предположении индукции. В этом случае высоты многочленов $P_{\vec{t}}(z)$ в её разложении не превосходят

$$(l-1)!\cdot(m2^m)^{l-2}P^{l-1},$$

а общий знаменатель коэффициентов $P_{\vec{t}}(z)$ делит $D_P^{m-w(\vec{t})}$. Если $p_{h-1} \neq p_h$, то рассмотрим следующее разложение в сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{(n_{h-1}+p_{h-1})^{u_{h-1}}(n_{h-1}+p_h)^{u_h}} = \sum_{k=1}^{u_{h-1}} \frac{A_k}{(n_{h-1}+p_{h-1})^k} + \sum_{k=1}^{u_h} \frac{B_k}{(n_{h-1}+p_h)^k},$$

$$A_k = (-1)^{u_{h-1}-k} \binom{u_{h-1}+u_h-k-1}{u_{h-1}-k} \frac{1}{(p_h-p_{h-1})^{u_{h-1}+u_h-k}},$$

$$B_k = (-1)^{u_h-k} \binom{u_{h-1}+u_h-k-1}{u_h-k} \frac{1}{(p_{h-1}-p_h)^{u_{h-1}+u_h-k}}.$$

Подставляя это равенство в (7), мы представим (7) в виде суммы $u_{h-1}+u_h$ элементарных сумм (с коэффициентами A_k и B_k), к каждой из которых можно применить предположение индукции. Рассмотрим какую-то одну из них:

$$\sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_{l-1} \geqslant 1} z^{n_1-1} \prod_{j=1}^{h-2} \frac{1}{(n_j+p_j)^{u_j}} \frac{1}{(n_{h-1}+p_{h-1})^k} \prod_{j=h}^{l-1} \frac{1}{(n_j+p_{j+1})^{u_{j+1}}}.$$

Ей соответствуют следующие параметры:

$$l' = l-1, \quad m' = m+k-u_{h-1}-u_h, \quad \vec{p}\,' = (p_1, \ldots, p_{h-2}, p_{h-1}, p_{h+1}, \ldots, p_l).$$

Если $P_{\vec{t}}(z)$ — многочлены разложения в линейную форму от обобщённых полилогарифмов, то общий знаменатель коэффициентов $P_{\vec{t}}(z)$ делит $D_P^{m'-w(\vec{t})}$. Так как $D_P^{u_{h-1}+u_h-k} A_k \in \mathbb{Z}$, то $D_P^{m-w(\vec{t})}(A_k \cdot P_{\vec{t}}(z)) \in \mathbb{Z}[z]$, что и требуется. Высоты $P_{\vec{t}}(z)$ не превосходят

$$(l-1)! \cdot (m2^m)^{l-2} \cdot P^{l-1}.$$

Следовательно, высоты многочленов в разложении суммы (7) не превосходят

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{k=1}^{u_{h-1}} |A_k| + \sum_{k=1}^{u_h} |B_k| \right) \cdot (l-1)! \cdot (m2^m)^{l-2} \cdot P^{l-1} \leqslant \\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{u_{h-1}} \binom{u_{h-1}+u_h-k-1}{u_{h-1}-k} + \sum_{k=1}^{u_h} \binom{u_{h-1}+u_h-k-1}{u_h-k} \right) \times \\ &\times (l-1)! \cdot (m2^m)^{l-2} \cdot P^{l-1} \leqslant \\ &\leqslant (u_{h-1}+u_h) 2^{u_{h-1}+u_h-2} \cdot (l-1)! \cdot (m2^m)^{l-2} \cdot P^{l-1} \leqslant \\ &\leqslant m2^{m-2} \cdot (l-1)! \cdot (m2^m)^{l-2} \cdot P^{l-1} \leqslant \frac{1}{2} \cdot (l-1)! \cdot (m2^m P)^{l-1}. \end{aligned}$$

Сумма (8) рассматривается аналогично, к интегралу $I(p_1, p_2, \ldots, p_h-1, \ldots, p_l)$ можно применить предположение индукции. Для всех трёх слагаемых (6), (7), (8) в линейной форме (1) знаменатели коэффициентов многочлена при $\mathrm{Le}_{\vec{t}}(z)$ делят $D_P^{m-w(\vec{t})}$. Высоты многочленов $P_{\vec{s}}(z)$ исходной суммы в случае $\sum\limits_{j=1}^{l} p_j > 1$

не превосходят

$$\left(\sum_{j=1}^{l} p_j - 1\right) \cdot (l-1)! \cdot (m2^m P)^{l-1} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (l-1)! \cdot (m2^m P)^{l-1} = \\ = \sum_{j=1}^{l} p_j \cdot (l-1)! \cdot (m2^m P)^{l-1}.$$

В случае $\sum\limits_{j=1}^{l} p_j = 1$ векторы обобщённых полилогарифмов из разложения сумм (7) и (8) имеют длину меньше l, а в разложении $I(\{0\}_l)$ только один полилогарифм длины l, т. е. множества полилогарифмов не пересекаются и оценка на высоты в этом случае также справедлива.

Остаётся доказать утверждение леммы для интеграла

$$I(p_1, 0, \ldots, 0) = \int\limits_{[0,1]^m} \frac{(x_1 x_2 \ldots x_{r_1})^{p_1}}{\prod\limits_{j=1}^{l} (1 - z x_1 x_2 \ldots x_{r_j})} \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_m.$$

Из равенства

$$(x_1 x_2 \ldots x_{r_1})^{p_1} = z^{-1} (x_1 x_2 \ldots x_{r_1})^{p_1 - 1} - z^{-1} (x_1 x_2 \ldots x_{r_1})^{p_1 - 1} (1 - z x_1 x_2 \ldots x_{r_1})$$

следует

$$I(p_1, 0, \ldots, 0) = \\ = z^{-1} I(p_1 - 1, 0, \ldots, 0) - z^{-1} \int\limits_{[0,1]^m} \frac{(x_1 x_2 \ldots x_{r_1})^{p_1 - 1}}{\prod\limits_{j=2}^{l} (1 - z x_1 x_2 \ldots x_{r_j})} \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_m = \\ = z^{-1} I(p_1 - 1, 0, \ldots, 0) - z^{-1} \sum_{n_1 \geqslant \ldots \geqslant n_{l-1} \geqslant 1} z^{n_1 - 1} \frac{1}{(n_1 + p_1 - 1)^{u_1} n_1^{u_2}} \prod_{j=2}^{l-1} \frac{1}{n_j^{u_{j+1}}}.$$

Далее рассуждаем аналогично случаю $p_h > 0$ при $h > 1$. Лемма теперь полностью доказана.

3. Знаменатели коэффициентов линейных форм

Здесь мы рассмотрим вопрос о знаменателях коэффициентов линейных форм. Нам понадобится понятие целозначного многочлена. Напомним, что это многочлен, который при любом целом аргументе принимает целое значение. Для целозначности многочлена степени N достаточно, чтобы он принимал целые значения в $N+1$ соседних целых точках (см. [6, теорема 12.1]).

Пусть зафиксировано некоторое целое неотрицательное число Δ. Будем называть рациональную функцию $R(x)$ Δ-нормальной, если она представляется в виде

$$R(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \sum_{m=1}^{M} \frac{A_{m,\alpha}}{(x+\alpha)^m} + P(x),$$

где $\mathcal{A}$ — множество целых неотрицательных чисел из некоторого отрезка $[\alpha_1, \alpha_2]$, $D_\Delta^{M-m} A_{m,\alpha} \in \mathbb{Z}$, а $D_\Delta^M P(x)$ — целозначный многочлен.

Лемма 2. *Если Δ-нормальную функцию домножить на целозначный многочлен степени не выше Δ, то полученная рациональная функция будет Δ-нормальной.*

Доказательство. Если целозначный многочлен $D_\Delta^M P(x)$ умножить на любой другой целозначный многочлен, то он останется целозначным. Утверждение леммы будет доказано, если мы покажем его для

$$R(x) = \frac{A_{m,\alpha}}{(x+\alpha)^m}, \quad D_\Delta^{M-m} A_{m,\alpha} \in \mathbb{Z}.$$

Сделаем это индукцией по m. Проверим вначале базу индукции $m = 1$.

Пусть $T(x)$ — целозначный многочлен степени не выше Δ и α — целое число. Тогда

$$\frac{T(x)}{x+\alpha} = \frac{T(-\alpha)}{x+\alpha} + Q(x),$$

где $Q(x)$ — многочлен степени не выше $\Delta - 1$ (при $\Delta = 0$ он отсутствует). По условию $T(-\alpha)$ является целым числом. Рассмотрим теперь $Q(x)$ в точках $x = -\alpha + k$, где $k = 1, 2, \ldots, \Delta$:

$$Q(-\alpha + k) = \frac{T(-\alpha + k) - T(-\alpha)}{k}.$$

После домножения на D_Δ все эти числа будут целыми, а значит, и $D_\Delta Q(x)$ — целозначный многочлен.

Поэтому в случае $m = 1$

$$R(x)T(x) = \frac{A_{1,\alpha} T(-\alpha)}{x+\alpha} + A_{1,\alpha} Q(x).$$

При этом

$$D_\Delta^{M-1}(A_{1,\alpha} T(-\alpha)) = (D_\Delta^{M-1} A_{1,\alpha}) T(-\alpha) \in \mathbb{Z}$$

и

$$D_\Delta^{M}(A_{1,\alpha} Q(x)) = (D_\Delta^{M-1} A_{1,\alpha})(D_\Delta Q(x))$$

является целозначным многочленом.

Пусть теперь $m > 1$. В этом случае

$$R(x)T(x) = \frac{A_{m,\alpha}}{(x+\alpha)^{m-1}} \frac{T(x)}{x+\alpha} = \frac{A_{m,\alpha} T(-\alpha)}{(x+\alpha)^m} + \frac{A_{m,\alpha}}{(x+\alpha)^{m-1}} Q(x).$$

Так как

$$D_\Delta^{M-m}(A_{m,\alpha} T(-\alpha)) = (D_\Delta^{M-m} A_{m,\alpha}) T(-\alpha) \in \mathbb{Z},$$

то первое слагаемое Δ-нормальное. Второе слагаемое перепишем как

$$\frac{A_{m,\alpha}/D_\Delta}{(x+\alpha)^{m-1}}(D_\Delta Q(x)).$$

Так как $D_\Delta^{M-(m-1)}(A_{m,\alpha}/D_\Delta) \in \mathbb{Z}$ и $D_\Delta Q(x)$ — целозначный многочлен, то к этому выражению можно применить предположение индукции. Лемма доказана.

Определим *индекс* рациональной функции $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ как

$$I(R) = \deg P - \deg Q.$$

Лемма 3. *Пусть для суммы*

$$\mathcal{F} = \sum_{n_1=1}^{\infty} z^{n_1-1} R_1(n_1) \sum_{n_2=1}^{n_1} R_2(n_2) \ldots \sum_{n_l=1}^{n_{l-1}} R_l(n_l)$$

выполняются неравенства

$$\sum_{j=1}^{j_1}(I(R_j)+1) \leqslant 0, \quad \sum_{j=j_1}^{j_2}(I(R_j)+1) \leqslant \Delta \tag{9}$$

для любых $1 \leqslant j_1 \leqslant j_2 \leqslant l$, а функции R_j являются Δ-нормальными. Тогда $\mathcal{F}$ представляется в виде конечной суммы $\sum\limits_i \lambda_i \mathcal{F}_i$, $\lambda_i \in \mathbb{Q}$, где

$$\mathcal{F}_i = \sum_{n_1=1}^{\infty} z^{n_1-1} R_{i,1}(n_1) \sum_{n_2=1}^{n_1} R_{i,2}(n_2) \ldots \sum_{n_{l(i)}=1}^{n_{l(i)-1}} R_{i,l(i)}(n_{l(i)})$$

и $I(R_{i,j}) < 0$ для любых i, j. При этом функции $R_{i,j}$ Δ-нормальные и $D_\Delta^{w_i}\lambda_i \in \mathbb{Z}$, где

$$w_i = \sum_{j=1}^{l} M_j - \sum_{j=1}^{l(i)} M_{i,j},$$

M_j, $M_{i,j}$ — максимальные порядки полюсов функций R_j и $R_{i,j}$.

Доказательство. Проведём индукцию по вектору (l,k), где k — количество функций R_j с $I(R_j) \geqslant 0$ ($0 \leqslant k < l$). Векторы (l,k) мы упорядочиваем в лексикографическом порядке. База индукции, $l=1$, очевидна, так как в этом случае по условию $I(R_1) \leqslant -1$.

Докажем утверждение для вектора (l,k), предполагая, что для меньших векторов оно доказано. Если $k=0$, то доказывать нечего, ведь тогда $I(R_j) < 0$ для любого j. Пусть $k > 0$, т. е. есть такое j, что $I(R_j) \geqslant 0$. Так как по условию $I(R_1) \leqslant -1$, то $j > 1$. Представляя R_j в виде суммы многочлена и правильной дроби, запишем $\mathcal{F}$ в виде суммы двух слагаемых. В слагаемом с правильной дробью (она Δ-нормальна) число k уменьшилось на единицу, и к нему можно применить предположение индукции. Рассмотрим теперь второе слагаемое, в котором $R_j(x) = P(x)$ — многочлен. Из нормальности R_j следует, что многочлен

$D_{\Delta}^{M_j} P$ является целозначным, при этом сумма максимальных порядков полюсов функций R_j как раз уменьшилась на M_j по сравнению с $\mathcal{F}$.

а) Если $j = l$, то просуммируем последнюю сумму:

$$\sum_{n_l=1}^{n_{l-1}} P(n_l) = Q(n_{l-1}),$$

где $D_{\Delta}^{M_j} Q$ — целозначный многочлен степени $\deg P + 1$. Таким образом, R_{l-1} умножится на Q. Итак, по сравнению с исходной суммой количество знаков суммирования уменьшилось на единицу. К полученной сумме, домноженной на $D_{\Delta}^{M_j}$, можно применить предположение индукции, так как вектор из индексов входящих в неё рациональных функций будет

$$(I(R_1), \ldots, I(R_{l-2}), I(R_{l-1}) + I(R_l) + 1)),$$

а домножение на $D_{\Delta}^{M_j} Q(x)$ функции R_{l-1} по лемме 2 оставляет её P-нормальной, ведь в силу условия (9) для $j_1 = j_2 = j$

$$\deg Q(x) = \deg P + 1 = I(R_j) + 1 \leqslant \Delta.$$

б) Пусть теперь $R_j(x) = P(x)$ при $1 < j < l$. Перепишем исходную сумму в виде

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} z^{n_1-1} R_1(n_1) \sum_{n_2=1}^{n_1} R_2(n_2) \ldots \sum_{n_{j-1}=1}^{n_{j-2}} R_{j-1}(n_{j-1}) \sum_{n_j=1}^{n_{j-1}} P(n_j) \sum_{n_{j+1}=1}^{n_j} f(n_{j+1}),$$

где

$$f(n_{j+1}) = R(n_{j+1}) \sum_{n_{j+2}=1}^{n_{j+1}} R_{j+2}(n_{j+2}) \ldots \sum_{n_l=1}^{n_{l-1}} R_l(n_l).$$

Имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned}
&\sum_{n_j=1}^{n_{j-1}} P(n_j) \sum_{n_{j+1}=1}^{n_j} f(n_{j+1}) = \\
&\quad = \sum_{n_j=1}^{n_{j-1}} P(n_j) \sum_{n_{j+1}=1}^{n_{j-1}} f(n_{j+1}) - \sum_{n_j=1}^{n_{j-1}} P(n_j) \sum_{n_{j+1}=n_j+1}^{n_{j-1}} f(n_{j+1}) = \\
&\quad = Q_1(n_{j-1}) \sum_{n_{j+1}=1}^{n_{j-1}} f(n_{j+1}) - \sum_{n_{j+1}=2}^{n_{j-1}} f(n_{j+1}) \sum_{n_j=1}^{n_{j+1}-1} P(n_j) = \\
&\quad = Q_1(n_{j-1}) \sum_{n_{j+1}=1}^{n_{j-1}} f(n_{j+1}) - \sum_{n_{j+1}=1}^{n_{j-1}} Q_2(n_{j+1}) f(n_{j+1}),
\end{aligned}$$

причём $\deg Q_1 = \deg Q_2 = \deg P + 1$, $Q_2(1) = 0$. Таким образом, исходную сумму мы представим в виде разности сумм меньшей кратности с соответствующими им векторами

$$(I(R_1),\dots,I(R_{j-1})+I(R_j)+1,I(R_{j+1}),\dots,I(R_l)),$$
$$(I(R_1),\dots,I(R_{j-1}),I(R_{j+1})+I(R_j)+1,\dots,I(R_l)).$$

Для каждой суммы неравенства (9) будут также выполняться. Так как $D_\Delta^{M_j}P(x)$ — целозначный многочлен и $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ — такие многочлены, что

$$Q_1(n)=\sum_{k=1}^{n}P(k),\quad Q_2(n)=\sum_{k=1}^{n-1}P(k)$$

при натуральных n, то $D_\Delta^{M_j}Q_1$ и $D_\Delta^{M_j}Q_2$ являются целозначными. Домножение на $D_\Delta^{M_j}Q_1(x)$ и $D_\Delta^{M_j}Q_2(x)$ функций R_{j-1} и R_{j+1} по лемме 2 оставляет их P-нормальными, ведь $\deg Q_1(x)=\deg Q_2(x)=\deg P+1=I(R_j)+1\leqslant\Delta$. Последнее неравенство справедливо в силу условия (9) для $j_1=j_2=j$. Итак, к каждой из двух сумм, после домножения на $D_\Delta^{M_j}$, можно применить предположение индукции, что и доказывает лемму.

Лемма 4. *Пусть параметры a_i, b_i, c_j целые, причём $b_i>a_i\geqslant 1$ при $i=1,\dots,m$, $P=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}b_i-2$, $q_j=\sum\limits_{i=r_{j-1}+1}^{r_j}(b_i-a_i)$ и выполняются неравенства*

$$1\leqslant c_j\leqslant P+1,\quad c_1+\ldots+c_j\leqslant q_1+\ldots+q_j,\quad j=1,\dots,l;$$
$$c_{j_1-1}+\sum_{j=j_1}^{j_2}(c_j-q_j)\leqslant P+1,\quad 1<j_1\leqslant j_2\leqslant l.$$

Пусть $P_{\vec s}$ — многочлены в линейной форме $S(z)=\sum\limits_{\vec s}P_{\vec s}(z^{-1})\,\mathrm{Le}_{\vec s}(z)$. Тогда многочлен $D_P^{m-w(\vec s)}P_{\vec s}(z)$ имеет целые коэффициенты.

Доказательство. По [4, лемма 2] интеграл $S(z)$ можно представить в виде

$$S(z)=\frac{\prod\limits_{i=1}^{m}\Gamma(b_i-a_i)}{\prod\limits_{j=1}^{l}\Gamma(c_j)}\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{n_1}\dots\sum_{n_l=1}^{n_{l-1}}z^{n_1-1}\times$$
$$\times\frac{\prod\limits_{j=1}^{l}[(n_j-n_{j+1}+1)(n_j-n_{j+1}+2)\dots(n_j-n_{j+1}+c_j-1)]}{\prod\limits_{j=1}^{l}\prod\limits_{i=r_{j-1}+1}^{r_j}[(n_j+a_i-1)(n_j+a_i)\dots(n_j+b_i-2)]},$$

где мы полагаем $n_{l+1}\equiv 1$. Из известной формулы (см., например, [1, лемма 5])

$$(x-y+1)\dots(x-y+n) = \\ = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x+k+1)\dots(x+n)(y+1)\dots(y+k-1)$$

следует

$$(n_j-n_{j+1}+1)\dots(n_j-n_{j+1}+c_j-1) = \sum_{k_j=0}^{c_j-1}(-1)^{k_j}\binom{c_j-1}{k_j}\times \\ \times(n_j+k_j+1)(n_j+k_j+2)\dots(n_j+c_j-1)n_{j+1}(n_{j+1}+1)\dots(n_{j+1}+k_j-1).$$

Применяя последнее равенство для каждого j, получим, что $S(z)$ представляется в виде целочисленной линейной комбинации сумм (с фиксированными k_j) вида

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{n_1}\dots\sum_{n_l=1}^{n_{l-1}} z^{n_1-1}\prod_{j=1}^{l}p_j^1(n_j)p_j^2(n_{j+1})\times \\ \times\prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j}\frac{\Gamma(b_i-a_i)}{(n_j+a_i-1)(n_j+a_i)\dots(n_j+b_i-2)},$$

где

$$p_j^1(x) = \frac{(x+k_j+1)(x+k_j+2)\dots(x+c_j-1)}{(c_j-k_j-1)!},$$
$$p_j^2(x) = \frac{x(x+1)\dots(x+k_j-1)}{k_j!} -$$

целозначные многочлены. Перепишем последнее выражение в виде

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} z^{n_1-1}R_1(n_1)\sum_{n_2=1}^{n_1}R_2(n_2)\dots\sum_{n_l=1}^{n_{l-1}}R_l(n_l),$$

где

$$R_j(x) = p_j^1(x)p_{j-1}^2(x)\prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j}\frac{\Gamma(b_i-a_i)}{(x+a_i-1)(x+a_i)\dots(x+b_i-2)}.$$

При $j=1$ имеем $p_0^2(x)\equiv 1$ (считаем, что $c_0=1$, $k_0=0$).

Так как

$$|(b_{i_1}-2)-(a_{i_2}-1)| \leqslant P-\Big(\min_{1\leqslant i\leqslant m}a_i-1\Big)\leqslant P,$$

произведение

$$\prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j}\frac{\Gamma(b_i-a_i)}{(x+a_i-1)(x+a_i)\dots(x+b_i-2)}$$

является P-нормальным. Следовательно, к нему можно применить лемму 2 для домножения на $p_j^1(x)$ и $p_{j-1}^2(x)$. Оценки на степени многочленов выполняются: $\deg p_j^1\leqslant c_j-1\leqslant P$ и $\deg p_{j-1}^2\leqslant c_{j-1}-1\leqslant P$. Итак, R_j является P-нормальной функцией.

Проверим условие (9) для функций R_j:

$$\sum_{j=j_1}^{j_2}(I(R_j)+1)=\sum_{j=j_1}^{j_2}(k_{j-1}+(c_j-k_j-1)-q_j+1)\leqslant c_{j_1-1}-1+\sum_{j=j_1}^{j_2}(c_j-q_j)\leqslant P.$$

Последнее неравенство справедливо в силу условия леммы.

Применяя лемму 3, мы можем считать, что для любого j выполняется $I(R_j)<0$, при этом R_j является P-нормальной функцией. Другими словами, мы представили $S(z)$ в виде целочисленной линейной комбинации сумм

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} z^{n_1-1}\frac{A_{\vec{u},\vec{\alpha}}}{(n_1+\alpha_1)^{u_1}}\sum_{n_2=1}^{n_1}\frac{1}{(n_2+\alpha_2)^{u_2}}\cdots\sum_{n_{l'}=1}^{n_{l'-1}}\frac{1}{(n_{l'}+\alpha_{l'})^{u_{l'}}},$$

где $l'\leqslant l$, $p\leqslant\alpha_j\leqslant P$. При этом $D_P^{m-w(\vec{u})}A_{\vec{u},\vec{\alpha}}\in\mathbb{Z}$. Далее, для многочленов $P_{\vec{s}}$ в разложении элементарной суммы

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} z^{n_1-1}\frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{u_1}}\sum_{n_2=1}^{n_1}\frac{1}{(n_2+\alpha_2)^{u_2}}\cdots\sum_{n_{l'}=1}^{n_{l'-1}}\frac{1}{(n_{l'}+\alpha_{l'})^{u_{l'}}}$$

в линейную форму $\sum\limits_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1})\operatorname{Le}_{\vec{s}}(z)$ по лемме 1 будет выполняться включение $D_P^{w(\vec{u})-w(\vec{s})}P_{\vec{s}}(z)\in\mathbb{Z}[z]$, откуда и следует утверждение леммы.

Замечание. Лемма 4 справедлива, если некоторые c_j равны нулю.

Теорема 1. *Пусть параметры a_i, b_i, c_j — целые, причём $b_i>a_i\geqslant 1$ при $i=1,\ldots,m$ и $c_j\geqslant 1$, $c_1+\ldots+c_j\leqslant q_1+\ldots+q_j$, где $q_j=\sum\limits_{i=r_{j-1}+1}^{r_j}(b_i-a_i)$, $j=1,\ldots,l$; d_j — неотрицательные целые числа, удовлетворяющие неравенствам $d_j\leqslant c_j$ при $j=1,\ldots,l$ и $\sum\limits_{k=j}^{l}d_k<a_i$ при $j=1,\ldots,l$ и $r_{j-1}<i\leqslant r_j$. Обозначим*

$$\Delta=\max_{1\leqslant j\leqslant l}\ \max_{r_{j-1}<i\leqslant r_j}\left(b_i-\sum_{k=j}^{l}d_k-2\right).$$

Пусть также выполняются неравенства

$$1\leqslant c_j\leqslant\Delta+1,\quad c_{j_1-1}+\sum_{j=j_1}^{j_2}(c_j-q_j)\leqslant\Delta+1,\quad 1<j_1\leqslant j_2\leqslant l,$$

а $P_{\vec{s}}$ — многочлены в линейной форме $S(z)=\sum\limits_{\vec{s}}P_{\vec{s}}(z^{-1})\operatorname{Le}_{\vec{s}}(z)$. Тогда многочлен $D_\Delta^{m-w(\vec{s})}P_{\vec{s}}(z)$ имеет целые коэффициенты.

Доказательство. В числителе подынтегрального выражения $S(z)$ используем следующие равенства:

$$(x_1x_2\ldots x_{r_j})^{d_j}=\left(\frac{1-(1-zx_1x_2\ldots x_{r_j})}{z}\right)^{d_j},\quad j=1,\ldots,l.$$

Это можно сделать, так как $\sum\limits_{k=j}^{l} d_k < a_i$ при $j = 1, \dots, l$ и $r_{j-1} < i \leqslant r_j$. В результате получим целочисленную линейную комбинацию выражений вида

$$\frac{1}{z^{d_1+d_2+\ldots+d_l}} \int\limits_{[0,1]^m} \frac{\prod\limits_{i=1}^{m} x_i^{a'_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod\limits_{j=1}^{l}(1-zx_1x_2\ldots x_{r_j})^{c'_j}}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_m$$

с переменными c'_j, причём $0 \leqslant c'_j \leqslant c_j$, $a'_i = a_i - \sum\limits_{k=j}^{l} d_k \geqslant 1$ для $j = 1, \dots, l$ и $r_{j-1} < i \leqslant r_j$. Осталось к каждому такому интегралу применить лемму 4 (в качестве P там будем фигурировать Δ).

Следствие. *Пусть интеграл $S(z)$ имеет параметры*

$$a_i = n+1, \quad b_i = 2n+2, \quad c_j = n+1.$$

Тогда многочлен $D_n^{m-w(\vec{s})} P_{\vec{s}}(z)$ имеет целые коэффициенты.

Доказательство. В теореме 1 положим $d_j = 0$ при $j = 1, \dots, l-1$ и $d_l = n$. Тогда $\Delta = n$ и все условия теоремы соблюдаются.

Это следствие мы можем применить к интегралу

$$I_{2l+1,n}(z) = \int\limits_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod\limits_{i=1}^{2l+1} x_i^n(1-x_i)^n\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{2l+1}}{\prod\limits_{j=1}^{l}(1-zx_1\ldots x_{2j})^{n+1}(1-zx_1x_2\ldots x_{2l}x_{2l+1})^{n+1}}.$$

Из [4, теорема 6] следует, что ($\{a\}_k$ означает k раз повторенное через запятую число a)

$$I_{2l+1,n}(z) = \sum_{k=0}^{l} P_k(z^{-1}) \operatorname{Le}_{\{2\}_k,1}(z) + \sum_{k=0}^{l-1} T_k(z^{-1}) \operatorname{Le}_{1,\{2\}_k,1}(z) - U(z^{-1}),$$

где P_k, T_k, U — многочлены с рациональными коэффициентами и $P_0(1) = 0$, $T_k(1) = 0$. По следствию заключаем, что эти многочлены после домножения на D_n^{2l+1} будут иметь целые коэффициенты. Переходя в пределу $z \to 1-$ и используя равенства $\operatorname{Le}_{\{2\}_k,1}(1) = 2\zeta(2k+1)$ (см. [3]) и (3), мы доказываем гипотезу Васильева (2).

4. Оценка коэффициентов линейных форм

Во многих арифметических приложениях важно иметь оценку сверху для абсолютной величины коэффициентов линейных форм. В этом разделе мы изучим высоты многочленов от обобщённых полилогарифмов в линейной форме, возникающей из интеграла $S(z)$ (см. (1)).

Предварительно докажем лемму об оценке факториалов.

Лемма 5. *Для целых неотрицательных a и b выполнена двухсторонняя оценка*
$$\frac{1}{a+b+1}\,\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b} \leqslant \frac{(a+b)!}{a!\,b!} \leqslant \frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b}$$
(в случае $x=0$ считаем, что $x^x=1$).

Доказательство. В случае, если $a=0$ или $b=0$, оба неравенства выполнены. Далее считаем, что a и b натуральные.

Рассмотрим бета-интеграл
$$\int\limits_0^1 x^a(1-x)^b\,dx = B(a+1,b+1) = \frac{a!\,b!}{(a+b+1)!}.$$
Функция $f(x) = x^a(1-x)^b$ на отрезке $[0,1]$ достигает максимума в точке $x=a/(a+b)$. Следовательно,
$$\frac{a!\,b!}{(a+b+1)!} \leqslant f\left(\frac{a}{a+b}\right) = \frac{a^a b^b}{(a+b)^{a+b}}.$$
Первое неравенство доказано. Докажем второе неравенство индукцией по величине $a+b$. База индукции $a=b=1$ выполняется. Введём обозначение
$$g(a,b) = \frac{(a+b)!}{a!\,b!}.$$
Пусть теперь $b>1$ и по индукционному предположению
$$g(a,b-1) \leqslant \frac{(a+b-1)^{a+b-1}}{a^a(b-1)^{b-1}}.$$
Из определения функции g
$$\frac{g(a,b)}{g(a,b-1)} = \frac{a+b}{b}.$$
Функция $(1+1/m)^m$ монотонно возрастает по m, следовательно,
$$\left(1+\frac{1}{a+b-1}\right)^{a+b-1} \geqslant \left(1+\frac{1}{b-1}\right)^{b-1}.$$
Последнее неравенство можно переписать как
$$\frac{(a+b-1)^{a+b-1}}{(b-1)^{b-1}} \leqslant \frac{(a+b)^{a+b-1}}{b^{b-1}}.$$
Окончательно получаем
$$g(a,b) = \frac{a+b}{b}g(a,b-1) \leqslant \frac{a+b}{b}\,\frac{(a+b-1)^{a+b-1}}{a^a(b-1)^{b-1}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{a+b}{b}\,\frac{(a+b)^{a+b-1}}{a^a b^{b-1}} = \frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b},$$
что и требовалось доказать.

Замечание. Выражение
$$\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b}$$
можно записать в виде
$$\left(\frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^\alpha \beta^\beta}\right)^n,$$
где $\alpha = a/n$, $\beta = b/n$.

По [4, лемма 2] интеграл $S(z)$ представляется в виде
$$S(z) = \sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_l \geqslant 1} R(n_1, n_2, \ldots, n_l) z^{n_1 - 1},$$
где
$$R(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l) = \\ = \frac{\prod\limits_{i=1}^{m} \Gamma(b_i - a_i)}{\prod\limits_{j=1}^{l} \Gamma(c_j)} \frac{\prod\limits_{j=1}^{l} [(\zeta_j - \zeta_{j+1} + 1)(\zeta_j - \zeta_{j+1} + 2) \ldots (\zeta_j - \zeta_{j+1} + c_j - 1)]}{\prod\limits_{j=1}^{l} \prod\limits_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} [(\zeta_j + a_i - 1)(\zeta_j + a_i) \ldots (\zeta_j + b_i - 2)]}.$$

В оставшейся части раздела будем предполагать, что параметры a_i, b_i, c_j меняются линейно по растущему натуральному параметру n:
$$a_i = \alpha_i n + \alpha_i', \quad b_i = \beta_i n + \beta_i', \quad c_j = \gamma_j n + \gamma_j', \quad \alpha_i, \beta_i, \gamma_j \in \mathbb{N}, \quad \alpha_i', \beta_i', \gamma_j' \in \mathbb{Z}.$$
Как и раньше,
$$q_j = \sum_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} (b_i - a_i).$$
Также введём обозначения
$$p_j = \min_{r_{j-1}+1 \leqslant i \leqslant r_j} a_i - 1, \qquad P_j = \max_{r_{j-1}+1 \leqslant i \leqslant r_j} b_i - 2,$$
$$h_j = \min_{r_{j-1}+1 \leqslant i \leqslant r_j} \alpha_i, \qquad H_j = \max_{r_{j-1}+1 \leqslant i \leqslant r_j} \beta_i,$$
$$\varphi(x, y) = |x+y|^{x+y} \cdot |x|^{-x}.$$
Здесь и далее $|x|^x = 1$ при $x = 0$, что соответствует пределу функции $|x|^x$ при $x \to 0$.

Лемма 6. *Пусть $c_1 \leqslant q_1$ и $c_{j-1} + c_j \leqslant q_j$ при $j = 2, \ldots, l$. Тогда*
$$R(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l) = \sum_{\vec{s}, \vec{k}} A_{\vec{s}, \vec{k}} \prod_{j=1}^{l} \frac{1}{(\zeta_j + k_j)^{s_j}}$$
и при $n \to \infty$
$$|A_{\vec{s}, \vec{k}}| \leqslant (F(x_1, \ldots, x_l))^{n + o(n)},$$

где

$$x_j = \frac{k_j - p_j}{P_j - p_j} \in [0, 1]$$

и

$$F(x_1, \ldots, x_l) = \prod_{j=1}^{l} \prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} \frac{(\beta_i - \alpha_i)^{\beta_i - \alpha_i}}{\varphi(\alpha_i - h_j - (H_j - h_j)x_j, \beta_i - \alpha_i)} \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{l-1} \frac{\varphi(h_{j+1} + (H_{j+1} - h_{j+1})x_{j+1} - h_j - (H_j - h_j)x_j, \gamma_j)}{\gamma_j^{\gamma_j}} \times$$
$$\times \frac{\varphi(h_l + (H_l - h_l)x_l - \gamma_l, \gamma_l)}{\gamma_l^{\gamma_l}}. \tag{10}$$

Доказательство. Если разложить числитель функции R в сумму мономов, то для каждого монома в соответствующей ему функции $\hat{R}(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l)$ по каждой переменной степень числителя будет меньше степени знаменателя. Следовательно, функцию $R(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l)$ можно представить в виде

$$R(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l) = \sum_{\vec{s}, \vec{k}} A_{\vec{s}, \vec{k}} \prod_{j=1}^{l} \frac{1}{(\zeta_j + k_j)^{s_j}}.$$

Из интегральной формулы Коши для полицилиндрической области (см. [7, (1.28)]), применённой к частным производным функции

$$(\zeta_1 + k_1)^{m_1} \ldots (\zeta_l + k_l)^{m_l} R(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l),$$

где m_j — максимальной порядок полюса по переменной ζ_j, следует

$$A_{\vec{s}, \vec{k}} = \frac{1}{(2\pi i)^l} \int\limits_{|\zeta_1 + k_1| = \frac{1}{2}} \cdots \int\limits_{|\zeta_l + k_l| = \frac{1}{2}} R(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l) \times$$
$$\times (\zeta_1 + k_1)^{s_1 - 1} \ldots (\zeta_l + k_l)^{s_l - 1} \, d\zeta_1 \ldots d\zeta_l.$$

Введём функцию

$$\Phi(u, v) = |u + v|!^{\operatorname{sign}(u+v)} \cdot |u|!^{-\operatorname{sign}(u)},$$

определённую при целых u и v. На окружностях $|\zeta_j + k_j| = 1/2$ выполнены неравенства

$$|(\zeta_j + a_i - 1) \ldots (\zeta_j + b_i - 2)| \geqslant \Phi((a_i - 1) - k_j, b_i - a_i - 1) e^{o(n)},$$
$$|\zeta_l(\zeta_l + 1) \ldots (\zeta_l + c_l - 2)| \leqslant \Phi(k_l - c_l + 1, c_l - 1) e^{o(n)},$$
$$|(\zeta_j - \zeta_{j+1} + 1) \ldots (\zeta_j - \zeta_{j+1} + c_j - 1)| \leqslant \Phi(k_{j+1} - k_j, c_j - 1) e^{o(n)}.$$

Докажем первое неравенство (остальные доказываются аналогично). Рассмотрим вначале случай, когда k_j лежит внутри интервала $(a_i - 1, b_i - 2)$. Тогда при $N < k_j$

$$|\zeta_j + N| = |(k_j - N) - (\zeta_j + k_j)| \geqslant (k_j - N) - \frac{1}{2},$$

а при $N > k_j$

$$|\zeta_j + N| = |(N - k_j) + (\zeta_j + k_j)| \geqslant (N - k_j) - \frac{1}{2}.$$

Следовательно (если в произведении верхний предел больше нижнего, то считаем его равным 1),

$$\begin{aligned}
&|(\zeta_j + a_i - 1) \ldots (\zeta_j + b_i - 2)| \geqslant \\
&\quad \geqslant \prod_{N=a_i-1}^{k_j-1} \left(k_j - N - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} \prod_{N=k_j+1}^{b_i-2} \left(N - k_j - \frac{1}{2}\right) \geqslant \\
&\quad \geqslant \frac{1}{8} \prod_{N=a_i-1}^{k_j-2} (k_j - N - 1) \prod_{N=k_j+2}^{b_i-2} (N - k_j - 1) = \\
&\quad = \frac{(k_j - (a_i - 1))!((b_i - 2) - k_j)!}{8(k_j - (a_i - 1))((b_i - 2) - k_j)} = \Phi((a_i - 1) - k_j, b_i - a_i - 1)e^{o(n)}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай $k_j < a_i - 1$:

$$\begin{aligned}
|(\zeta_j + a_i - 1) \ldots (\zeta_j + b_i - 2)| &\geqslant \prod_{N=a_i-1}^{b_i-2} \left(N - k_j - \frac{1}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2} \prod_{N=a_i}^{b_i-2} (N - k_j - 1) = \\
&= \frac{a_i - 1 - k_j}{2(b_i - 2 - k_j)} \frac{((b_i - 2) - k_j)!}{((a_i - 1) - k_j)!} = \Phi((a_i - 1) - k_j, b_i - a_i - 1)e^{o(n)}.
\end{aligned}$$

Случай $k_j > b_i - 2$ рассматривается аналогично. Случаи, когда $k_j = a_i - 1$ или $k_j = b_i - 2$, проверяются прямой подстановкой.

Итак,

$$\begin{aligned}
|A_{\vec{s},\vec{k}}| \leqslant \prod_{j=1}^{l} \prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} \frac{(b_i - a_i - 1)!}{\Phi((a_i - 1) - k_j, b_i - a_i - 1)} \times \\
\times \prod_{j=1}^{l-1} \frac{\Phi(k_{j+1} - k_j, c_j - 1)}{(c_j - 1)!} \frac{\Phi(k_l - c_l + 1, c_l - 1)}{(c_l - 1)!} e^{o(n)}. \qquad (11)
\end{aligned}$$

Сделаем замену $k_j = p_j + (P_j - p_j)x_j$, $j = 1, \ldots, l$, $x_j \in [0, 1]$. Из леммы 5 и оценки (11) следует, что

$$|A_{\vec{s},\vec{k}}| \leqslant (F(x_1, \ldots, x_l))^n e^{o(n)},$$

где $F(x_1, \ldots, x_l)$ — функция, указанная в условии леммы.

Теорема 2. *Пусть $c_1 \leqslant q_1$ и $c_{j-1} + c_j \leqslant q_j$ при $j = 2, \ldots, l$. Тогда высоты всех многочленов в линейной форме $S(z) = \sum_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1}) \operatorname{Le}_{\vec{s}}(z)$ не превосходят $M^{n+o(n)}$, $n \to \infty$, где M — максимум функции* (10) *на кубе* $[0, 1]^l$.

Доказательство. Используя лемму 6, имеем равенство

$$S(z) = \sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_l \geqslant 1} R(n_1, n_2, \ldots, n_l) z^{n_1 - 1} = \\ = \sum_{\vec{s}, \vec{k}} A_{\vec{s}, \vec{k}} \sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_l \geqslant 1} z^{n_1 - 1} \prod_{j=1}^{l} \frac{1}{(\zeta_j + k_j)^{s_j}}.$$

Так как $s_j \leqslant m$ и $b_i - a_i \leqslant Cn$, то количество слагаемых во внешней сумме не превосходит $(m \cdot Cn)^l = e^{o(n)}$. Далее, при фиксированных $\vec{s}$ и $\vec{k}$ в разложении элементарной суммы

$$\sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_l \geqslant 1} z^{n_1 - 1} \prod_{j=1}^{l} \frac{1}{(n_j + k_j)^{s_j}}$$

в линейную форму от полилогарифмов, высоты всех многочленов по лемме 1 будут $e^{o(n)}$. Из леммы 6 следует, что $|A_{\vec{s}, \vec{k}}| \leqslant M^{n + o(n)}$, откуда получаем утверждение теоремы.

Литература

[1] Васильев Д. В. О малых линейных формах от значений дзета-функции Римана в нечётных точках. — Препринт № 1 (558). — Минск: НАН Беларуси, Ин-т математики, 2000.

[2] Злобин С. А. Интегралы, представляемые в виде линейных форм от обобщённых полилогарифмов // Мат. заметки. — 2002. — Т. 71, № 5. — С. 782—787.

[3] Злобин С. А. Производящие функции для значений кратной дзета-функции // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2005. — № 2. — С. 55—59.

[4] Злобин С. А. Разложения кратных интегралов в линейные формы // Мат. заметки. — 2005. — Т. 77, № 5. — С. 683—706.

[5] Зудилин В. В. Совершенно уравновешенные гипергеометрические ряды и кратные интегралы // Успехи мат. наук. — 2002. — Т. 57, № 4. — С. 177—178.

[6] Прасолов В. В. Многочлены. — М.: МЦНМО, 1999.

[7] Фукс Б. А. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. — М.: Физматгиз, 1962.

[8] Beukers F. A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ // Bull. London Math. Soc. — 1979. — Vol. 11, no. 3. — P. 268—272.

[9] Krattenthaler C., Rivoal T. Hypergéométrie et fonction zêta de Riemann. — `arXiv: math.NT/0311114`.