# Элементарное доказательство иррациональности ряда Чакалова*

**В. ЗУДИЛИН**
*Московский государственный университет*
*им. М. В. Ломоносова*
e-mail: wadim@ips.ras.ru

УДК 511.3

**Ключевые слова:** иррациональность, мера иррациональности, ряд Чакалова, гипергеометрический ряд, $q$-биномиальная теорема.

**Аннотация**

Даётся новое доказательство иррациональности значений ряда

$$\mathcal{T}_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n q^{-n(n-1)/2}$$

как в качественной, так и в количественной формах. В основе этого доказательства лежит гипергеометрическая конструкция рациональных приближений к $\mathcal{T}_q(z)$.

**Abstract**

*W. Zudilin, An elementary proof of the irrationality of Tschakaloff series*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 6, pp. 59—64.

We present a new proof of the irrationality of values of the series

$$\mathcal{T}_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n q^{-n(n-1)/2}$$

in both qualitative and quantitative forms. The proof is based on a hypergeometric construction of rational approximations to $\mathcal{T}_q(z)$.

## 1. Введение

В 1921 году Л. Чакалов рассмотрел ряд [10]

$$\mathcal{T}_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n q^{-n(n-1)/2}, \tag{1}$$

сходящийся при $|q| > 1$ во всей комплексной $z$-плоскости, и доказал иррациональность и линейную независимость его значений в ненулевых рациональных

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00359.

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2005, том 11, № 6, с. 59—64.

точках $z$ и $q$ (при некоторых ограничениях на $q$). Чакалов обобщил метод, предложенный О. Сасом [9] для частного случая ряда (1), именно для функции

$$\Theta_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n q^{-n^2} = \mathcal{T}_{q^2}(z/q).$$

Примерно в это же время Ф. Бернштейн и О. Сас [2] применили непрерывную дробь Эйзенштейна для $\Theta_q(z)$, чтобы получить иное доказательство иррациональности значений $\Theta_q(z)$ в некоторых рациональных точках $q$ и $z$. По всей видимости, это самые первые результаты об арифметической природе значений $q$-рядов.

Цель настоящей заметки — дать элементарное доказательство теоремы Чакалова [10], а также указать количественную версию этого результата, полученную П. Бундшу в [4, теорема 2].

**Теорема.** *Пусть $q = q_1/q_2$ и $z$ — ненулевые рациональные числа, причём $|q| > 1$ и $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$. Предположим, что ненулевое число*

$$\gamma = \frac{\log|q_2|}{\log|q_1|}$$

*удовлетворяет неравенству $\gamma < \gamma_0 = (3 - \sqrt{5})/2$. Тогда значение $\mathcal{T}_q(z)$ иррационально; более того, для всякого $\varepsilon > 0$ существует положительная постоянная $b_0(\varepsilon)$, такая что*

$$\left|\mathcal{T}_q(z) - \frac{a}{b}\right| > |b|^{-1-\frac{\sqrt{5}-1}{2(\gamma_0-\gamma)}-\varepsilon} \tag{2}$$

*выполнено для всех целых $a$ и $b$ с условием $|b| \geqslant b_0(\varepsilon)$.*

Рациональные приближения к функции Чакалова (1), строящиеся в следующем пункте, на самом деле совпадают с полученными в [4, 10]. Наш вклад состоит в элементарном объяснении, почему эти приближения пригодны для установления иррациональности $\mathcal{T}_q(z)$. Предлагаемое доказательство инспирировано идеями Л. Гутника и Ю. Нестеренко (см. [1, § 1]) доказательства $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$. Последний результат является знаменитой теоремой Р. Апери; элементарные доказательства и связь с результатами об иррациональности других математических постоянных можно найти в [5, 8].

## 2. Доказательство

В первом абзаце мы считаем $q$ *переменной*. Для целого положительного $n$ определим многочлен

$$R(T;q) = R_n(T;q) = (1-qT)(1-q^2T)\dots(1-q^nT).$$

Раскрытие скобок в произведении даёт разложение

$$R(T;q) = \sum_{k=0}^{n} C_k(q) T^k, \tag{3}$$

где при каждом $k = 0, 1, \ldots, n$

$$C_k(q) = C_{k,n}(q) \in \mathbb{Z}[q] \tag{4}$$

является многочленом от $q$ степени

$$\operatorname{degree} C_k(q) \leqslant \frac{n(n+1)}{2}. \tag{5}$$

Согласно (4) и (5) заключаем, что в случае $q = q_1/q_2$ выполнено

$$q_2^{n(n+1)/2} C_k\left(\frac{q_1}{q_2}\right) \in \mathbb{Z} \tag{6}$$

при $k = 0, 1, \ldots, n$, каковы бы ни были ненулевые целые $q_1$ и $q_2$.

Положим $m = \lfloor \beta n \rfloor$ ($\lfloor\cdot\rfloor$ обозначает целую часть числа), где $\beta = (\sqrt{5}-1)/2$ — положительный корень многочлена $x^2 + x - 1$, и рассмотрим ряд

$$I_n = I_n(z;q) = \sum_{t=1}^{\infty} R_n(q^{-t};q) z^{t+m} q^{-(t+m)(t+m-1)/2}, \tag{7}$$

сходящийся при $|q| > 1$. Используя (3), находим

$$\begin{aligned}
I_n &= \sum_{t=1}^{\infty} z^{t+m} \sum_{k=0}^{n} C_k(q) q^{-kt-(t+m)(t+m-1)/2} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} z^{-k} C_k(q) q^{k(k-1)/2+km} \sum_{t=1}^{\infty} z^{k+t+m} q^{-(k+t+m)(k+t+m-1)/2} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} z^{-k} C_k(q) q^{k(k-1)/2+km} \sum_{l=k+m+1}^{\infty} z^l q^{-l(l-1)/2} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} z^{-k} C_k(q) q^{k(k-1)/2+km} \left( \sum_{l=0}^{\infty} z^l q^{-l(l-1)/2} - \sum_{l=0}^{k+m} z^l q^{-l(l-1)/2} \right) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} z^{-k} C_k(q) q^{k(k-1)/2+km} \cdot \mathcal{T}_q(z) - \\
&- \sum_{k=0}^{n} C_k(q) \sum_{l=0}^{k+m} z^{-(k-l)} q^{k(k-1)/2+km-l(l-1)/2}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Если $q = q_1/q_2$ и $z = z_1/z_2$, где $q_1, q_2, z_1, z_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, то согласно (6) и (8) величина $\tilde{I}_n = \tilde{I}_n(z;q)$, заданная равенством

$$\tilde{I}_n = z_1^n z_2^m q_1^{m(m-1)/2} q_2^{n(n+1)/2+n(n-1)/2+nm} I_n, \tag{9}$$

имеет вид

$$\tilde{I}_n = B_n \cdot \mathcal{T}_q(z) - A_n, \tag{10}$$

где $A_n$ и $B_n$ — целые числа, определённые в соответствии с (8) и (9). Кроме того, поскольку равенство в (5) достигается только в случае $k = n$, заключаем, что коэффициент при $\mathcal{T}_q(z)$ в (8) имеет следующую асимптотику при $n \to \infty$:

$$\biggl|\sum_{k=0}^{n} z^{-k} C_k(q) q^{k(k-1)/2+km}\biggr| \sim |z|^{-n}|C_n(q)|\,|q|^{n(n-1)/2+nm} = |z|^{-n}|q|^{n(n+m)} \qquad (11)$$

(запись $f(n) \sim g(n)$ означает $f(n)/g(n) \to 1$).

Для того чтобы оценить асимптотическое поведение суммы ряда в (7), заметим, что $R_n(q^{-t};q) = 0$ при $t = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно,

$$\begin{aligned} I_n = \sum_{t=n+1}^{\infty} & R_n(q^{-t};q) z^{t+m} q^{-(t+m)(t+m-1)/2} = \\ &= R_n(q^{-(n+1)};q) z^{n+m+1} q^{-(n+m)(n+m+1)/2} + O(q^{-(n+m+1)(n+m+2)/2}) = \\ &= z^{n+m+1} q^{-(n+m)(n+m+1)/2} (1-q^{-1})(1-q^{-2})\ldots(1-q^{-n}) + \\ &+ O(q^{-(n+m+1)(n+m+2)/2}) \sim \\ &\sim z^{n+m+1} q^{-(n+m)(n+m+1)/2} \quad \text{при} \quad n \to \infty \end{aligned} \qquad (12)$$

(запись $f(n) = O(g(n))$ при $n \to \infty$ означает, что $|f(n)| \leqslant C|g(n)|$ с некоторой постоянной $C > 0$ для всех достаточно больших $n$). В частности, $I_n \neq 0$, как только $n$ достаточно велико.

Наконец, условие $|q_1/q_2| = |q| > 1$ влечёт $|q_1| > 1$, и это даёт возможность определить $\gamma$ соотношением $\log|q_2| = \gamma \log|q_1|$ так, что $\gamma \geqslant 0$. Пусть $\gamma < \gamma_0 = (3-\sqrt{5})/2$. Тогда согласно (9), (11), (12) и соотношению $m = \lfloor \beta n \rfloor$ для величин $B_n$ и $\tilde{I}_n$ в (10) выполнено

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log|B_n|}{n^2 \log|q_1|} = (1-\gamma)(1+\beta) + \gamma(1+\beta) + \frac{\beta^2}{2} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{4} \qquad (13)$$

и

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\log|\tilde{I}_n|}{n^2 \log|q_1|} = -(1-\gamma)\frac{(1+\beta)^2}{2} + \gamma(1+\beta) + \frac{\beta^2}{2} = \\ = -\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)(\gamma_0-\gamma)}{2(\sqrt{5}-1)} < 0. \end{aligned} \qquad (14)$$

Покажем теперь иррациональность $\mathcal{T}_q(z)$. Предположим от противного, что $\mathcal{T}_q(z) = a/b$ для некоторых целых $a$ и $b \neq 0$. Согласно (10)

$$b\tilde{I}_n = B_n a - A_n b \in \mathbb{Z} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Вспоминая, что (12) влечёт $I_n \neq 0$ для больших $n$, получаем $|b\tilde{I}_n| \geqslant 1$. С другой стороны, из (14) следует, что $|b\tilde{I}_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Полученное противоречие показывает, что $\mathcal{T}_q(z) \notin \mathbb{Q}$.

Мы оставляем читателю вывод оценки (2) из (10), (13) и (14) с помощью следующего стандартного утверждения (ср. [3, § 11.3, упражнение 3]), в котором необходимо положить $a_n = A_n$ и $b_n = B_n$.

**Лемма.** *Пусть $\alpha$ — действительное иррациональное число. Предположим, что имеется последовательность рациональных приближений $a_n/b_n$ к $\alpha$* (где $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ *при* $n = 1, 2, \ldots$), *такая что последовательность $|b_n|$ неограниченно возрастает,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log|b_{n+1}|}{\log|b_n|} = 1$$

*и с некоторой постоянной $c > 0$ выполнено*

$$\left|\alpha - \frac{a_n}{b_n}\right| < \frac{1}{|b_n|^{1+c}}$$

*при всех достаточно больших $n$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует положительная постоянная $b_0(\varepsilon)$, такая что*

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| > \frac{1}{b^{1+1/c+\varepsilon}}$$

*выполнено для всех целых $a$ и $b$ с условием $|b| \geqslant b_0(\varepsilon)$.*

## 3. Связь с другими результатами

Хотя нам удалось доказать иррациональность $\mathcal{T}_q(z)$ только при дополнительном ограничении $\gamma < \gamma_0 = 0{,}381966\ldots$, предположительно это условие может быть опущено, т. е. значения $\mathcal{T}_q(z)$ иррациональны при всех $z \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ и $q \in \mathbb{Q}$, $|q| > 1$. Этот вопрос остаётся открытым. Ранний метод из [9] требовал условия $\gamma < 1/3$ (несколько худшего ввиду $1/3 < \gamma_0$), отвечающего более простому выбору $\beta = 0$ в наших обозначениях. Выбор $\beta = (\sqrt{5} - 1)/2$ обеспечивает оптимальное значение величины $\gamma_0$ в терминах приведённой выше конструкции.

Функция Чакалова (1) может быть интерпретирована как «половинка» тэта-ряда

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{n-1/2} q^{-(n-1/2)^2}.$$

Это обстоятельство и теорема Нестеренко [7] о трансцендентности значений некоторых тэта-рядов доказывают трансцендентность $\mathcal{T}_q(z)$ в случае алгебраического $q$, $|q| > 1$, и $z = q^k$ с некоторым $k \in \mathbb{Z}$, отвечая на открытый вопрос в этом частном случае. С другой стороны, когда числа $z$ и $q$ мультипликативно независимы, не известно ни одного результата о трансцендентности. Это является частью общей проблемы, поставленной К. Малером в [6] для аналитических функций, удовлетворяющих функциональным уравнениям (таким, как $\mathcal{T}_q(z) = 1 + z\mathcal{T}_q(z/q)$ в случае функции (1)), но к которым метод Малера из [6] не может быть применён.

Постоянные $\beta = (\sqrt{5} - 1)/2$ и $\gamma_0 = 1 - \beta$, возникающие в доказательстве теоремы, связаны с *золотым сечением* — положительным корнем многочлена $x^2 - x - 1$. Нам представляется любопытным тот факт, что золотое сечение и его обобщения (так называемые *металлические сечения*) также появляются в других доказательствах иррациональности, связанных с теоремой Апери [5].

Наконец, отметим, что частным случаем $q$-биномиальной теоремы является явная формула для многочлена (4)

$$C_k(q) = (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k+1)/2},$$

содержащая $q$-биномиальные коэффициенты

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!} \in \mathbb{Z}[q],$$

где $[0]_q! = 1$ и

$$[k]_q! = \frac{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)\dots(q^k-1)}{(q-1)^k}$$

при $k = 1, 2, \dots$.

Я искренне признателен Джонатану Сондову за ряд полезных предложений, концептуально повлиявших на эту заметку.

## Литература

[1] Нестеренко Ю. В. Некоторые замечания о $\zeta(3)$ // Мат. заметки. — 1996. — Т. 59, № 6. — С. 865—880.

[2] Bernstein F., Szász O. Über Irrationalität unendlicher Kettenbrüche mit einer Anwendung auf die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} q^{\nu^2} x^{\nu}$ // Math. Ann. — 1915. — Bd. 76. — S. 295—300.

[3] Borwein J. M., Borwein P. B. Pi and the AGM: A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity. — New York: Wiley, 1987. — Can. Math. Soc. Ser. Monogr. Adv. Texts.

[4] Bundschuh P. Verschärfung eines arithmetischen Satzes von Tschakaloff // Portugal. Math. — 1974. — Vol. 33, no. 1. — P. 1—17.

[5] Huylebrouck D. Similarities in irrationality proofs for $\pi$, $\ln 2$, $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ // Amer. Math. Monthly. — 2001. — Vol. 108, no. 3. — P. 222—231.

[6] Mahler K. Remarks on a paper by W. Schwarz // J. Number Theory. — 1969. — Vol. 1. — P. 512—521.

[7] Nesterenko Yu. Modular functions and transcendence problems // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. — 1996. — Vol. 322, no. 10. — P. 909—914.

[8] Van der Poorten A. A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$. An informal report // Math. Intelligencer. — 1979. — Vol. 1, no. 4. — P. 195—203.

[9] Szász O. Über Irrationalität gewisser unendlicher Reihen // Math. Ann. — 1915. — Bd. 76. — S. 485—487.

[10] Tschakaloff L. Arithmetische Eigenschaften der unendlichen Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} a^{-\frac{1}{2}\nu(\nu-1)}$ // Math. Ann. — 1921. — Bd. 84. — S. 100—114.