О значениях гипергеометрических функций с различными иррациональными параметрами

П. Л. ИВАНКОВ
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
e-mail: ivankoovpl@mail.ru

УДК 511.361

Ключевые слова: гипергеометрические функции с иррациональными параметрами, линейная независимость значений.

Аннотация

В работе исследуется арифметическая природа значений обобщённых гипергеометрических функций с различными иррациональными параметрами. С помощью эффективной конструкции аппроксимаций Паде доказывается линейная независимость указанных значений; получен соответствующий количественный результат.

Abstract

P. L. Ivankov, On values of hypergeometric functions with different irrational parameters, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 6, pp. 65—72.

In this paper, we study the arithmetic nature of the values of generalized hypergeometric functions with different irrational parameters. Linear independence of such values is proved by means of an effective construction of Pade approximation; corresponding quantitative results are obtained.

Пусть $\mathbb{I}$ — мнимое квадратичное поле, λ_1 и λ_2 — иррациональные числа из этого поля, разность которых есть дробное рациональное число. Рассмотрим функции

$$\psi_{kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}\nu^{j-1}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{b_k(x)}, \tag{1}$$

где $b_k(x) = (x+\lambda_k)b(x) \in \mathbb{I}[x]$ — многочлен степени m, старший коэффициент которого равен 1, $b(0)=0$, $k=1,2$, $j=1,\ldots,m$, $b(x)\neq 0$ при $x=1,2,\ldots$.

Теорема. *Пусть ξ — отличное от нуля число из поля $\mathbb{I}$, h_{kj}, $k=1,2$, $j=1,\ldots,m$, — целые числа из этого поля,*

$$H = \max(|h_{kj}|,\ k=1,2,\ j=1,\ldots,m).$$

Тогда для любого положительного ε найдётся такое H_0, что при $H \geqslant H_0$ выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{m} h_{kj}\psi_{kj}(\xi)\right\| > H^{1-4m-\varepsilon}.$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 6, с. 65—72.

Арифметические свойства значений гипергеометрических функций с различными параметрами изучались в ряде работ (см., например, [3, 4, 7]), однако во всех этих работах предполагалось, что варьируемые параметры (в нашем случае λ_1 и λ_2) рациональны.

Пусть n — натуральное число. Обозначим $N = (n+1)m - 1$, и пусть $N_{qlk} = N + l$, если $q = k$, и $N_{qlk} = N$, если $q \neq k$; $q, k = 1, 2$, $l = 1, \ldots, m$. Рассмотрим при $q = 1, 2$, $l = 1, \ldots, m$ следующие функции, определённые при целых рациональных $\nu \geqslant 0$:

$$\Phi_{ql}(\nu) = \frac{N!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \prod_{x=1}^{2N+l} (\zeta + x) \cdot \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\zeta + x} \prod_{k=1}^{2} \prod_{\sigma_k=0}^{N_{qlk}} \frac{1}{\zeta - \lambda_k + \sigma_k}\, d\zeta, \tag{2}$$

где Γ — положительно ориентированный контур, охватывающий все полюсы подынтегральной функции вида $\lambda_k - \sigma_k$ и не содержащий точки $-1, -2, \ldots, -\nu$.

Лемма 1. *Функции $\Phi_{ql}(\nu)$ обладают следующими свойствами.*

1. $\Phi_{ql}(\nu) = 0$ *при* $\nu = 0, 1, \ldots, 2N + l$, $\Phi_{ql}(2N + l + 1) \neq 0$.
2. *Справедливо*

$$\Phi_{ql}(\nu) = \sum_{k=1}^{2} \sum_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda_k + x} \frac{\prod\limits_{x=1}^{N} (\lambda_k + x)}{N!} B_{qlk}(\nu),$$

где

$$B_{qlk}(\nu) = \sum_{\sigma_k=0}^{N_{qlk}} (N!)^2 \prod_{\substack{k_1=1 \\ (k_1, \sigma_{k_1}) \neq (k, \sigma_k)}}^{2} \sum_{\sigma_{k_1}=0}^{N_{qlk_1}} \frac{1}{\lambda_k - \lambda_{k_1} - \sigma_k + \sigma_{k_1}} \times$$
$$\times \prod_{x=1}^{N+l-\sigma_k} (\lambda_k + N + x) \prod_{x=0}^{\sigma_k - 1} (\nu + \lambda_k - x). \tag{3}$$

Доказательство. Равенство $\Phi_{ql}(\nu) = 0$ справедливо потому, что при указанных ν контур интегрирования содержит все особые точки подынтегральной функции, причём степень числителя по крайней мере на две единицы превышает степень знаменателя. Если $\nu = 2N + l + 1$, то интеграл из правой части (2) равен с точностью до знака вычету подынтегральной функции относительно $\zeta = -2N - l - 1$. Этот вычет, очевидно, отличен от нуля.

Утверждение второго пункта леммы получается применением к интегралу из правой части (2) теоремы о вычетах. Получающееся выражение подвергается затем очевидным тождественным преобразованиям. Лемма доказана.

Общим знаменателем некоторого множества чисел из поля $\mathbb{I}$ будем называть отличное от нуля целое число из этого поля, после умножения на которое все числа данного множества становятся целыми в названном поле. Через $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$

будем обозначать положительные постоянные, зависящие от параметров функций $\psi_{kj}(z)$ и, возможно, от точки, в которой вычисляются указанные в теореме значения этих функций.

Для доказательства следующей леммы нам потребуется модификация одного из тождеств, используемых в теории интерполирования (см., например, [5, равенство (4.4:7) на с. 450]). Разделим $b_k(\zeta) - b_k(\nu)$ на $\zeta - \nu$ и запишем получившийся многочлен по степеням ν:

$$\frac{b_k(\zeta) - b_k(\nu)}{\zeta - \nu} = \sum_{j=1}^{m} \tau_{kj}(\zeta)\nu^{j-1}, \tag{4}$$

где $\tau_{kj}(\zeta) \in \mathbb{I}[\zeta]$. С помощью индукции (по u) нетрудно проверить, что тождественно по ν и ζ выполняется равенство

$$\frac{1}{\zeta - \nu} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=0}^{u} \frac{\tau_{kj}(\zeta - s)(\nu - s)^{j-1}}{b_k(\zeta - s)} \prod_{x=0}^{s-1} \frac{b_k(\nu - x)}{b_k(\zeta - x)} + \frac{1}{\zeta - \nu} \prod_{x=0}^{u} \frac{b_k(\nu - x)}{b_k(\zeta - x)}. \tag{5}$$

Лемма 2. *В поле* $\mathbb{I}$ *существуют числа*

$$p_{qlkjs}, \quad k, q = 1, 2, \quad l, j = 1, \ldots, m, \quad s = 0, 1, \ldots, n+1, \tag{6}$$

для которых тождественно по ν *при указанных значениях индексов* q, l, k *выполняются равенства*

$$B_{qlk}(\nu) = \sum_{s=0}^{n+1} \sum_{j=1}^{m} p_{qlkjs}(\nu - s)^{j-1} \prod_{x=0}^{s-1} b_k(\nu - x). \tag{7}$$

При этом модули чисел (6) *и модуль их общего знаменателя оцениваются сверху соответственно величинами* $n^{mn}e^{\gamma_1 n}$ *и* $e^{\gamma_2 n}$.

Доказательство. Напишем (5) при $u = n + 1$ и умножим обе его части на $B_{qlk}(\zeta)/(2\pi i)$. Получившееся равенство проинтегрируем по ζ вдоль какой-либо положительно ориентированной окружности Γ, содержащей точку $\zeta = \nu$, а также все нули многочленов $b_k(\zeta - x)$, $x = 0, 1, \ldots, n+1$. Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{B_{qlk}(\zeta)}{\zeta - \nu} \prod_{x=0}^{n+1} \frac{b_k(\nu - x)}{b_k(\zeta - x)}\, d\zeta = 0,$$

поскольку $\deg B_{qlk}(\zeta) \leqslant (n+2)m - 1$ и контур интегрирования содержит все полюсы подынтегральной функции. Поэтому (7) выполняется тождественно по ν, если положить

$$p_{qlkjs} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} B_{qlk}(\zeta)\tau_{kj}(\zeta - s) \prod_{x=0}^{s} \frac{1}{b_k(\zeta - x)}\, d\zeta. \tag{8}$$

Оценка модулей чисел (6) следует непосредственно из последнего равенства. Оценка общего знаменателя указанных чисел может быть получена следующим образом. Сначала, опираясь на то, что $\lambda_k - \lambda_{k_1} \in \mathbb{Q}$, с помощью стандартного рассуждения, основанного на сравнении степеней, в которых простые числа входят в числитель и знаменатель дроби (примером такого рассуждения может служить [8, доказательство леммы 2, с. 186]), убедимся, что в качестве общего знаменателя чисел

$$(N!)^2 \prod_{k_1=1}^{2} \prod_{\substack{\sigma_{k_1}=0 \\ (k_1,\sigma_{k_1})\neq(k,\sigma_k)}}^{N_{qlk_1}} \frac{1}{\lambda_k - \lambda_{k_1} - \sigma_k + \sigma_{k_1}}$$

из правой части (3) можно взять натуральное число, не превосходящее $e^{\gamma_3 n}$. При получении этой оценки следует использовать и тот факт, что наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \ldots, n$ есть величина порядка $e^{O(n)}$. Аналогичная оценка справедлива и для общего знаменателя чисел $\prod\limits_{x=1}^{N+l-\sigma_k} (\lambda_k + N + x)$, входящих в качестве множителя в правую часть (3). Осталось оценить общий знаменатель интегралов

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \prod_{x=0}^{\sigma_k - 1} (\zeta + \lambda_k - x) \tau_{kj}(\zeta - s) \prod_{x=0}^{s} \frac{1}{b_k(\zeta - x)}\, d\zeta.$$

Для получения такой оценки достаточно записать этот интеграл в виде вычета относительно $\zeta = \infty$. Таким образом, указанная в лемме оценка общего знаменателя чисел (6) действительно справедлива. Лемма доказана.

Пусть $A = (p_{qlkj,n+1})$ — матрица, строки которой определяются парой индексов (q, l), а столбцы — парой (k, j), причём строки расположены в порядке возрастания q (при равных q — в порядке возрастания l), а столбцы — в порядке возрастания k (при равных k — в порядке возрастания j), $q, k = 1, 2$, $l, j = 1, \ldots, m$.

Лемма 3. *Главная диагональ матрицы A состоит из ненулевых чисел, а все элементы этой матрицы, расположенные выше главной диагонали, равны нулю.*

Доказательство. Из (3) и (4) видно, что $\deg B_{qlk}(\zeta) = N_{qlk}$, а $\deg \tau_{kj}(\zeta) = m - j$. Поэтому в равенстве (8) при $s = n + 1$ для элементов матрицы A, расположенных выше её главной диагонали, степень числителя подынтегральной функции по крайней мере на две единицы меньше степени знаменателя. Для элементов главной диагонали матрицы A разность этих степеней равна 1. Отсюда следуют утверждения леммы. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Существует натуральное число Q, являющееся общим знаменателем чисел*

$$\Theta_k = N! \prod_{x=1}^{N} \frac{1}{\lambda_k + x}, \quad k = 1, 2, \tag{9}$$

такое что $Q \leqslant n^{mn} e^{\gamma_4 n}$. Числа $Q\Theta_1$ и $Q\Theta_2$ имеют общий натуральный делитель, который оценивается снизу величиной $n^{0,5mn} e^{-\gamma_5 n}$.

Доказательство. Пусть D — абсолютная величина дискриминанта поля $\mathbb{I}$, и пусть p — простое число, не делящее D. Согласно теории делимости в квадратичных полях, изложенной, например, в [1, глава III, § 8], существует такой гомоморфизм χ мультипликативной группы классов вычетов по модулю D, взаимно простых с D, в группу второго порядка, состоящую из чисел 1 и -1, что если $\chi(p) = 1$, то число p разлагается в поле $\mathbb{I}$ в произведение двух простых идеалов, норма каждого из которых равна p, а если $\chi(p) = -1$, то p остаётся неразложимым в $\mathbb{I}$ и норма p равна p^2. Заметим, что поскольку χ является гомоморфизмом, то множества $\chi^{-1}(1)$ и $\chi^{-1}(-1)$ состоят из одного и того же числа элементов, равного $0{,}5\,\varphi(D)$, где $\varphi(D)$ — количество элементов приведённой системы вычетов по модулю D.

Пусть натуральное число a таково, что $a\lambda_k \in Z_{\mathbb{I}}$, $k = 1, 2$, а простое число p не делит aD и $\chi(p) = 1$. Используя указанные выше факты из теории делимости в квадратичных полях, нетрудно проверить, что числа $a^N \prod\limits_{x=1}^{N} (\lambda_k + x)$, $k = 1, 2$, делятся на $p^{[N/p]}$. Доказательство проводится так же, как и в [2, доказательство леммы 3]. Очевидно также, что и $N!$ делится на указанное число. Отсюда следует, что в качестве Q можно взять число $Q_1 \cdot Q_2$, где

$$Q_1 = a^{2N} \prod_{k=1}^{2} \prod_{x=1}^{N} (\lambda_k + x), \quad Q_2 = \prod_{\substack{(p,D)=1 \\ \chi(p)=1}} p^{-2[N/p]}.$$

Очевидно, что

$$Q_1 \leqslant n^{2mn} e^{\gamma_6 n}. \tag{10}$$

Для оценки Q_2 воспользуемся соотношением

$$\sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv t \pmod D}} \frac{\ln p}{p} = \frac{1}{\varphi(D)} \ln x + O(1), \tag{11}$$

в котором $(t, D) = 1$. По поводу доказательства этого соотношения см. [6, с. 129]. С помощью (11) без труда получаем оценку

$$Q_2 \leqslant n^{-mn} e^{\gamma_7 n}. \tag{12}$$

При получении этой оценки следует учесть сделанное выше замечание о количестве элементов множества $\chi^{-1}(1)$. Из (10) и (12) следует первое утверждение леммы. Второе утверждение следует из того, что число $N!\sqrt{Q_2}$ делится на

$$\prod_{\substack{(p,D)=1 \\ \chi(p)=-1}} p^{[N/p]}.$$

Оценка последнего произведения получается с помощью (11). Лемма 4 доказана.

Пусть

$$P_{qlkj}(z) = \frac{1}{N!} \prod_{x=1}^{N} (\lambda_k + x) \sum_{s=0}^{n+1} p_{qlkjs} z^s,$$

$$R_{ql}(z) = \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{m} P_{qlkj}(z) \psi_{kj}(z), \quad q, k = 1, 2, \quad l, j = 1, \ldots, m.$$

Лемма 5. *Имеет место равенство*

$$R_{ql}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \Phi_{ql}(\nu) \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b(x)}.$$

Доказательство. Коэффициент при z^ν в разложении $R_{ql}(z)$ по степеням z, очевидно, равен

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{N!} \prod_{x=1}^{N} (\lambda_k + x) \sum_{s=0}^{\min(n+1,\nu)} \sum_{j=1}^{m} p_{qlkjs} (\nu - s)^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu-s} \frac{1}{b_k(x)} =$$
$$= \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b(x)} \sum_{k=1}^{2} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda_k + x} \frac{1}{N!} \prod_{x=1}^{N} (\lambda_k + x) \sum_{s=0}^{n+1} \sum_{j=1}^{m} p_{qlkjs} (\nu - s)^{j-1} \prod_{x=0}^{s-1} b_k(\nu - x).$$

Верхний индекс суммирования $\min(n + 1, \nu)$ можно заменить на $n + 1$ в силу условия $b(0) = 0$. Из (7) следует, что двойная сумма, входящая в последнее выражение, равна $B_{qlk}(\nu)$. Теперь требуемое равенство следует из второго пункта леммы 1. Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы. Из указанных в лемме 1 свойств функции $\Phi_{ql}(\nu)$ следует, что $R_{ql}(z)$ имеет при $z = 0$ порядок нуля $2N + l + 1$. Пользуясь этим, нетрудно получить оценку

$$|R(\xi)| \leqslant n^{-m(2m-1)n} e^{\gamma_8 n}. \tag{13}$$

Составим определитель

$$\Delta(z) = |P_{qlkj}(z)|,$$

строки и столбцы которого расположены так, как указано в лемме 3. Из этой леммы следует, что степень определителя $\Delta(z)$ равна $2m(n + 1)$. С другой стороны, используя сведения о порядках нуля функций $R_{ql}(z)$, нетрудно убедиться, что порядок нуля $\Delta(z)$ при $z = 0$ есть $2m(n+1)$. Поэтому $\Delta(z)$ сводится к своему старшему члену (с ненулевым коэффициентом). Таким образом, установлено, что

$$\Delta(\xi) \neq 0 \tag{14}$$

при любом $\xi \neq 0$. Пусть h_{kj}, $k = 1, 2$, $j = 1, \ldots, m$, — произвольные целые числа из поля $\mathbb{I}$, не равные одновременно нулю; составим из них строку длины $2m$.

В силу (14) этой строкой можно заменить одну из строк (без ограничения общности можно считать, что это первая строка) определителя $\Delta(\xi)$ так, что получающийся при этом определитель δ будет по-прежнему отличен от нуля. Оценим абсолютную величину δ снизу. С этой целью умножим все столбцы этого определителя на общий знаменатель чисел (6), о котором идёт речь в лемме 2, а также на $(n+1)$-ю степень знаменателя числа ξ, затем столбцы с номерами $1, \ldots, m$ умножим на число Θ_1, а столбцы с номерами $m+1, \ldots, 2m$ на число Θ_2; по поводу определения этих чисел см. (9). Затем все элементы первой строки умножим на число Q из леммы 4. После этого все элементы определителя станут целыми в поле $\mathbb{I}$ и каждый элемент первой строки будет делиться на указанное в лемме 4 натуральное число. Поэтому имеем такую оценку:

$$e^{\gamma_9 n}|(\Theta_1 \cdot \Theta_2)^m \delta|Q \geqslant n^{0,5m} e^{-\gamma_5 n}.$$

Отсюда следует, что

$$|\delta| \geqslant e^{-\gamma_{10} n} n^{-0,5mn}. \tag{15}$$

При получении последнего неравенства были использованы оценки, указанные в лемме 4. Оценка $|\delta|$ сверху получается стандартным способом. Число $\psi_{11}(\xi)$ отлично от нуля (это следует из теорем [2]). Умножим все элементы первого столбца определителя δ на это число и затем прибавим к ним соответствующие элементы других столбцов, умноженные на числа $\psi_{kj}(\xi)$. Раскладывая получившийся определитель по элементам первого столбца, получим с учётом оценок из леммы 2 и оценки (13) неравенство

$$|\delta| \leqslant |r| e^{\gamma_{11} n} n^{(2m-1)mn} + H e^{\gamma_{11} n} n^{-mn}, \tag{16}$$

где

$$r = \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} h_{kj} \psi_{kj}(\xi).$$

Из (15) и (16) получаем, что

$$|r| \geqslant H^{1-4m-\varepsilon},$$

если число H достаточно велико. Теорема доказана.

Литература

[1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. — М.: Наука, 1985.

[2] Галочкин А. И. Об арифметических свойствах значений некоторых целых гипергеометрических функций // Сиб. мат. журн. — 1976. — Т. XVII, № 6. — С. 1220—1235.

[3] Галочкин А. И. О некотором аналоге метода Зигеля // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1986. — № 2. — С. 30—34.

[4] Иванков П. Л. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций с различными параметрами // Мат. заметки. — 1992. — Т. 52, вып. 6. — С. 25—31.

[5] Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 1. — М.: Наука, 1967.

[6] Прахар К. Распределение простых чисел. — М.: Мир, 1967.

[7] Фельдман Н. И. Оценки снизу для некоторых линейных форм // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1967. — № 2. — С. 63—72.

[8] Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. — М.: Наука, 1987.