Об арифметических свойствах значений тета-констант*

Ю. В. НЕСТЕРЕНКО
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: nester@orc.ru

УДК 511.36

Ключевые слова: тета-константы, трансцендентность.

Аннотация

Статья посвящена описанию результатов о трансцендентности и алгебраической независимости значений так называемых тета-констант (нулевых значений тета-функций), а также прямых методов доказательства этих результатов. Рассмотрены и другие функции, связанные с тета-константами. Формулируется ряд открытых вопросов.

Abstract

Yu. V. Nesterenko, On arithmetic properties of values of theta-constants, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 6, pp. 95—122.

This article describes results about the transcendence and algebraic independence of values of theta constants (Nullthetawerte) and direct methods for proving these results. Values of other functions related to theta constants are discussed. We also present some conjectures and open questions.

1. Введение

Тета-функции Якоби есть функции двух комплексных переменных z, τ, $\operatorname{Im}\tau > 0$, определяемые равенствами (см. [8])

$$
\begin{aligned}
\theta_1(z,\tau) &= \theta_1(z) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\sin(2n+1)z, \quad q = e^{\pi i\tau},\\
\theta_2(z,\tau) &= \theta_2(z) = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}\cos(2n+1)z,\\
\theta_3(z,\tau) &= \theta_3(z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2nz,\\
\theta_4(z,\tau) &= \theta_4(z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nz.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

*Статья подготовлена при частичной поддержке Фонда Александра фон Гумбольдта и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00359.

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 6, с. 95—122.

Нулевыми тета-значениями, или тета-константами, называются величины

$$\theta_2 = \theta_2(0) = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}, \quad \theta_3 = \theta_3(0) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2},$$

$$\theta_4 = \theta_4(0) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2},$$

являющиеся в действительности функциями комплексной переменной τ, $\operatorname{Im}\tau > 0$. Из описания множества нулей функций $\theta_2(z)$, $\theta_3(z)$, $\theta_4(z)$ (см. [8, § 21.12]) следует, что все тета-константы θ_2, θ_3, θ_4 не обращаются в нуль ни в одной из точек верхней комплексной полуплоскости, т. е. множества чисел $\tau \in \mathbb{C}$ с условием $\operatorname{Im}\tau > 0$. Это множество в дальнейшем для краткости будет обозначаться буквой $\mathcal{H}$.

Для тета-констант справедливы следующие разложения в бесконечные произведения (см. [8]):

$$\begin{aligned} \theta_2 &= 2q^{\frac{1}{4}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})^{-1} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{4n})^2, \\ \theta_3 &= \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n}) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^{2n-1})^2, \\ \theta_4 &= \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n}) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n-1})^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Отсюда можно вывести, что логарифмические производные тета-констант, т. е. функции

$$\psi_2(\tau) = \frac{D\theta_2}{\theta_2}, \quad \psi_3(\tau) = \frac{D\theta_3}{\theta_3}, \quad \psi_4(\tau) = \frac{D\theta_4}{\theta_4},$$

где

$$D = \frac{1}{\pi i}\,\frac{\partial}{\partial\tau} = q\frac{\partial}{\partial q},$$

имеют следующие представления в виде рядов:

$$\psi_2 = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2nq^{2n}}{1-q^{2n}}, \quad \psi_3 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2nq^n}{1-q^{2n}}, \quad \psi_4 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nq^n}{1-q^{2n}}.$$

Логарифмические производные связаны с тета-константами следующими соотношениями (см. [18]):

$$\theta_2^4 = 4(\psi_3 - \psi_4), \quad \theta_3^4 = 4(\psi_2 - \psi_4), \quad \theta_4^4 = 4(\psi_2 - \psi_3). \tag{3}$$

Кроме того, они удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (см. [17])

$$\begin{aligned} D\psi_2 &= 2(\psi_2\psi_3 + \psi_2\psi_4 - \psi_3\psi_4), \\ D\psi_3 &= 2(\psi_3\psi_2 + \psi_3\psi_4 - \psi_2\psi_4), \\ D\psi_4 &= 2(\psi_4\psi_2 + \psi_4\psi_3 - \psi_2\psi_3). \end{aligned} \tag{4}$$

Все результаты настоящей статьи относятся к значениям функций $\theta_k(0,\tau)$ и $\psi_k(\tau)$. Через эти значения могут быть выражены многие другие числа, связанные, например, с эллиптическими и модулярными функциями. Исторически именно эллиптические функции были средством доказательства первых результатов о значениях тета-функций и модулярных функций. Мы обсуждаем здесь прямые методы, позволяющие получать результаты, работая непосредственно с тета-функциями. Зависимость этих функций от двух переменных — эллиптической z и модулярной τ — даёт возможность строить доказательства арифметических результатов, используя как одну переменную, так и другую.

2. Теоремы о трансцендентности

2.1. Теорема Малера—Попкена

Вероятно, первыми свойства модулярной переменной τ для доказательства результатов о трансцендентности чисел использовали К. Малер и Я. Попкен (см. [21,22]). Доказанная ими теорема утверждает, что *при каждом $\tau \in \mathcal{H}$ хотя бы одно из значений рядов Эйзенштейна $E_2(\tau)$, $E_4(\tau)$, $E_6(\tau)$ трансцендентно.* В силу тождеств

$$\begin{aligned} E_2(\tau) &= 4(\psi_2+\psi_3+\psi_4),\\ E_4(\tau) &= \frac{1}{2}(\theta_2^8+\theta_3^8+\theta_4^8),\\ E_6(\tau) &= \frac{1}{2}(\theta_4^4-\theta_2^4)(\theta_2^4+\theta_3^4)(\theta_3^4+\theta_4^4) \end{aligned} \tag{5}$$

(см. [18]) теорема Малера—Попкена эквивалентна следующему утверждению.

Теорема 1. *Для каждого $\tau \in \mathcal{H}$ среди чисел*

$$\psi_2(\tau), \quad \psi_3(\tau), \quad \psi_4(\tau)$$

содержится хотя бы одно трансцендентное.

Пусть $\wp(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса с инвариантами g_2, g_3, пусть ω_1, ω_2 — базис её решётки периодов, $\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$, а η_1 — квазипериод, соответствующий ω_1. Поскольку (см. [4])

$$E_2\Big(\frac{\omega_2}{\omega_1}\Big) = 3\frac{\omega_1}{\pi}\,\frac{\eta_1}{\pi}, \quad E_4\Big(\frac{\omega_2}{\omega_1}\Big) = \frac{3}{4}\Big(\frac{\omega_1}{\pi}\Big)^4 g_2, \quad E_6\Big(\frac{\omega_2}{\omega_1}\Big) = \frac{27}{8}\Big(\frac{\omega_1}{\pi}\Big)^6 g_3,$$

то теорема Малера—Попкена может быть сформулирована как утверждение, что *для любой эллиптической функции Вейерштрасса хотя бы одно из чисел g_2, g_3, ω/π, η/π трансцендентно.* Здесь ω — произвольный ненулевой период $\wp(z)$ и η — соответствующий квазипериод.

Ниже приводится упрощённое доказательство теоремы 1, сохранившее тем не менее основную идею работы [22].

Доказательство. Справедливо тождество $\cos(2nz) = (-1)^n T_{2n}(\sin z)$, где $T_{2n}(x)$ — полином Чебышёва от переменной x (см. [7, глава 3]). Используя для краткости обозначения

$$\sin z = x, \quad \theta(z,\tau) = \theta_4(z,\tau),$$

находим

$$\theta(z,\tau) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} T_{2n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{2n}. \tag{6}$$

Полиномы Чебышёва с чётными номерами удовлетворяют рекуррентному уравнению

$$T_{2n+2}(x) = (4x^2-2)T_{2n}(x) - T_{2n-2}(x), \qquad T_0(x) = 1, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1$$

(см. [7, глава 3]). Оно, в частности, означает, что $T_{2n}(x) \in \mathbb{Z}[x]$, а кроме того,

$$T_{2n}(x) \ll 3^{2n-1}(1 + x^2 + \ldots + x^{2n}), \quad n \geqslant 1.$$

Эта мажоранта легко доказывается с помощью рекуррентного уравнения и индукции по n.

Таким образом,

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{2n} \ll 1 + \sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2} 9^k (1 + x^2 + \ldots + x^{2k}).$$

Отсюда при любом фиксированном $\tau \in \mathcal{H}$ и достаточно больших n получаем неравенство

$$|d_n| \leqslant \sum_{k \geqslant n} |q|^{k^2} 9^k \leqslant |q|^{n^2} 10^n.$$

Тета-функция $\theta(z,\tau)$ в зависимости от переменной z есть целая функция второго порядка. Поэтому она не может быть многочленом от $x = \sin z$, и из тождества (6) следует, что $d_n \neq 0$ для бесконечной последовательности индексов n.

Лемма 1. *При каждом $n \geqslant 1$ справедливо равенство*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n = (\cos z)^{-n} \sum_{k=1}^{n} P_{n,k}(\operatorname{tg} z) \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^k, \tag{7}$$

где

$$P_{n,k}(t) \in \mathbb{Z}[t], \quad P_{n,k}(t) \ll 3^{n-1}(n-1)!\,(1 + t + \ldots + t^{n-1}). \tag{8}$$

Доказательство. При $n = 1$ утверждение, очевидно, выполняется. Предположим, что оно верно для некоторого $n \geqslant 1$. Докажем его справедливость для оператора дифференцирования порядка $n+1$. Применяя к равенству (7) оператор $\frac{\partial}{\partial x} = \cos^{-1} z \frac{\partial}{\partial z}$, находим равенство, аналогичное (7), в котором

$$P_{n+1,k}(t) = P_{n,k-1}(t) + ntP_{n,k}(t) + (1+t^2)P'_{n,k}(t), \quad P_{n,0}(t) = 0.$$

Отсюда и из (8) следует

$$P_{n+1,k}(t) \ll 3^{n-1}(n-1)!((n+1)+(2n-2))(1+t+\ldots+t^n) \ll \\ \ll 3^n n!\,(1+t+\ldots+t^n).$$

Лемма доказана. □

Учитывая, что $\theta(z,\tau)$ — чётная функция от z, а также легко следующее из определения (1) этой функции равенство

$$4D\theta(z,\tau) = -\frac{\partial^2}{\partial z^2}\theta(z,\tau),$$

находим

$$(2n)!\,d_n = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{2n}\theta(z,\tau)\bigg|_{x=0} = \sum_{k=1}^{n} P_{2n,2k}(0)\frac{\partial^{2k}\theta}{\partial z^{2k}}(z,\tau)\bigg|_{z=0} = \\ = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k P_{2n,2k}(0)4^k D^k\theta(0,\tau). \quad (9)$$

Введём обозначение

$$a_k = \frac{D^k\theta(0,\tau)}{\theta(0,\tau)}, \quad k \geqslant 0.$$

Благодаря рекуррентному уравнению $a_{k+1} = Da_k + \psi_3 a_k$, $a_0 = 1$ и системе дифференциальных уравнений (4) находим $a_k = A_k(\psi_2,\psi_3,\psi_4)$, где

$$A_k(x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{Z}[x_2,x_3,x_4], \quad A_k \ll 3^k k!\,(x_2+x_3+x_4)^k.$$

Последняя мажоранта легко доказывается по индукции. Действительно,

$$A_{k+1} = 2\frac{\partial A_k}{\partial x_2}(x_2x_3+x_2x_4-x_3x_4) + \\ + 2\frac{\partial A_k}{\partial x_3}(x_2x_3+x_3x_4-x_2x_4) + 2\frac{\partial A_k}{\partial x_4}(x_2x_4+x_3x_4-x_2x_3) + x_3A_k \ll \\ \ll 2\cdot 3^k k!\,3k(x_2+x_3+x_4)^{k-1}(x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4) + 3^k k!\,x_3(x_2+x_3+x_4)^k \ll \\ \ll 3^{k+1}(k+1)!(x_2+x_3+x_4)^{k+1}.$$

Наконец, из (9) мы получаем

$$(2n)!\frac{d_n}{\theta(0,\tau)} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k P_{2n,2k}(0)4^k A_k(\psi_2,\psi_3,\psi_4) = B_n(\psi_2,\psi_3,\psi_4),$$

где

$$B_n(x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{Z}[x_2,x_3,x_4], \quad B_n(x_2,x_3,x_4) \ll 108^n(3n)!(1+x_2+x_3+x_4)^n.$$

Эти свойства и неравенства

$$0 < |B_n(\psi_2,\psi_3,\psi_4)| < |q|^{n^2+o(n^2)}$$

не могут выполняться одновременно, если предположить, что для некоторого $\tau \in \mathcal{H}$ все три значения ψ_2, ψ_3, ψ_4 есть алгебраические числа. Это противоречит при достаточно большом n теореме Лиувилля (см. [9, глава 2, лемма 9.2]). □

2.2. Теоремы Шнейдера

Следующее утверждение есть основной результат этого раздела.

Теорема 2. *Пусть $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{H}$ линейно независимы вместе с 1 над полем рациональных чисел. Тогда среди четырёх чисел*

$$\theta_2(\tau_1), \quad \theta_3(\tau_1), \quad \theta_2(\tau_2), \quad \theta_3(\tau_2)$$

найдутся два числа, отношение которых трансцендентно.

Обсудим некоторые следствия этой теоремы. Функция

$$j(\tau) = 256\frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(\lambda-1)^2}, \quad \text{где} \quad \lambda = \lambda(\tau) = \frac{\theta_2^4}{\theta_3^4}, \tag{10}$$

модулярна относительно группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ и порождает поле всех таких функций (см. [1, § 22], [4, главы 3, 18]). Хорошо известно, что $j(\tau)$ принимает алгебраические и даже целые алгебраические значения для квадратичных τ из верхней комплексной полуплоскости (см. [4, глава 5, § 2, теорема 4]). Следующее утверждение было впервые доказано в 1937 г. Т. Шнейдером [23]. Оно может быть выведено из теоремы 2.

Следствие 1. *Если $\tau \in \mathcal{H}$ — алгебраическое число, не являющееся квадратичной иррациональностью, то значение $j(\tau)$ трансцендентно.*

Доказательство. Положим $\tau_1 = \tau$ и $\tau_2 = -1/\tau$. Поскольку τ не есть квадратичная иррациональность, можно утверждать, что числа 1, τ_1, τ_2 линейно независимы над полем рациональных чисел. Условия теоремы 2 выполнены. Справедливы равенства

$$\theta_2\left(0, -\frac{1}{\tau}\right)^2 = -i\tau\theta_4(0,\tau)^2, \quad \theta_3\left(0, -\frac{1}{\tau}\right)^2 = -i\tau\theta_3(0,\tau)^2, \tag{11}$$

$$\theta_2(0,\tau)^4 + \theta_4(0,\tau)^4 = \theta_3(0,\tau)^4 \tag{12}$$

(см. [8, § 21.51, 21.2]). Если утверждение следствия 1 неверно, т. е. числа τ и $j(\tau)$ одновременно алгебраические, то отношение $\theta_2(0,\tau)/\theta_3(0,\tau)$ есть алгебраическое число, и из приведённых выше тождеств следует, что все отношения $\theta_k(0,\tau_j)/\theta_3(0,\tau)$ есть алгебраические числа вопреки теореме 2. □

Следствие 2. *Если $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{H}$ — квадратичные иррациональности, линейно независимые с 1 над полем рациональных чисел, то отношение $\theta_3(0,\tau_1)/\theta_3(0,\tau_2)$ трансцендентно.*

Доказательство. Утверждение легко следует из теоремы 2, так как $\lambda(\tau_j)$ — алгебраические числа. □

Выбрав, в частности, $\tau_1 = i$, $\tau_2 = \zeta = e^{2\pi\frac{i}{3}}$, получаем трансцендентность отношения

$$\frac{B(1/4, 1/4)}{B(1/3, 1/3)},$$

где $B(x, y)$ — бета-функция Эйлера. Для доказательства достаточно заметить, что оба отношения

$$\frac{\theta_3(0, i)\pi^{\frac{3}{4}}}{\Gamma(1/4)}, \quad \frac{\theta_3(0, \zeta)\pi}{\Gamma(1/3)^{\frac{3}{2}}}$$

есть алгебраические числа, и воспользоваться следствием 2 и классическими тождествами, связывающими значения бета- и гамма-функций.

Следствие 2 эквивалентно трансцендентности отношения ненулевых периодов двух алгебраически независимых эллиптических функций с алгебраическими инвариантами. Последняя была доказана Т. Шнейдером [23]. Заметим, что трансцендентность значений $B(a, b)$ при всех рациональных a, b, одновременно не являющихся целыми, также была доказана Т. Шнейдером [24].

Для доказательства теоремы 2 понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Фиксируем комплексное число $\tau \in \mathcal{H}$ и определим

$$f_1(z, \tau) = \theta_2\theta_3\frac{\theta_1(z)}{\theta_4(z)}, \quad f_2(z, \tau) = \theta_2\theta_4\frac{\theta_2(z)}{\theta_4(z)}, \quad f_3(z, \tau) = \theta_3\theta_4\frac{\theta_3(z)}{\theta_4(z)}.$$

В случаях, когда зависимость от переменной τ не важна, для краткости будут использоваться обозначения $f_1(z) = f_1(z, \tau)$, $f_2(z) = f_2(z, \tau)$, $f_3(z) = f_3(z, \tau)$.

Лемма 2. *Функции $f_j(z)$ мероморфны, имеют периодами 2π и $2\pi\tau$, т. е. являются эллиптическими функциями от переменной z. Функция $f_1(z)$ нечётна, $f_2(z)$ и $f_3(z)$ чётны. Кроме того, они удовлетворяют дифференциальным уравнениям*

$$f_1'(z) = f_2(z)f_3(z), \quad f_2'(z) = -f_1(z)f_3(z), \quad f_3'(z) = -f_1(z)f_2(z) \tag{13}$$

и связаны алгебраическими уравнениями

$$f_1^2(z) + f_2^2(z) = \theta_2^4, \quad f_1^2(z) + f_3^2(z) = \theta_3^4. \tag{14}$$

Доказательство. Чётность и нечётность функций $f_j(z)$ сразу же следуют из определения этих функций. Периодичность $f_j(z)$ следует из [8, § 21.11, пример 3]. Дифференциальные уравнения (13) для $f_j(z)$ легко выводятся из дифференциальных уравнений для отношений $\theta_j(z)/\theta_4(z)$ (см. [8, § 21.6]). Алгебраические соотношения (14) легко следуют из однородных алгебраических соотношений для $\theta_1(z)$, $\theta_2(z)$, $\theta_4(z)$ и $\theta_1(z)$, $\theta_3(z)$, $\theta_4(z)$, доказанных в [8, § 21.2]. $\square$

Следующая лемма описывает свойства коэффициентов рядов Тейлора функций $f_j(z)$ в точке $z = 0$.

Лемма 3. *Существуют однородные многочлены* $A_{i,j} \in \mathbb{Z}[x_1, x_2]$, $j \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$, *такие что*

$$f_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{1,j}(\theta_2^2, \theta_3^2)\frac{z^j}{j!}, \quad f_2(z) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2,j}(\theta_2^2, \theta_3^2)\frac{z^j}{j!},$$

$$f_3(z) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{3,j}(\theta_2^2, \theta_3^2)\frac{z^j}{j!}.$$

При этом

$$A_{i,j}(x_1, x_2) \ll j!(x_1 + x_2)^{j+1}. \tag{15}$$

Доказательство. Так как $\theta_4 = \theta_4(0) \neq 0$, то все функции $f_i(z)$ аналитичны в точке $z = 0$. Докажем существование многочленов $A_{i,j}$ индукцией по j. При $j = 0$ находим $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = \theta_2^2$, $f_3(0) = \theta_3^2$. Таким образом, $A_{1,0} = 0$, $A_{2,0} = x_1$, $A_{3,0} = x_2$ и нужное утверждение выполнено.

Предположим, что утверждение леммы справедливо для всех коэффициентов рядов Тейлора функций $f_j(z)$ с номерами, не превосходящими j. Сравнивая коэффициенты при z^j в первом из дифференциальных уравнений (13), находим

$$A_{1,j+1} = \sum_{i=0}^{j} \frac{j!}{i!(j-i)!} A_{2,i}A_{3,j-i}.$$

Отсюда в силу индуктивного предположения следует, что коэффициент $A_{1,j+1}$ может быть представлен в виде однородного многочлена от θ_2^2, θ_3^2 с целыми коэффициентами. При этом в силу индуктивного предположения

$$A_{1,j+1}(x_1, x_2) \ll$$
$$\ll \sum_{i=0}^{j} \frac{j!}{i!(j-i)!} i!(x_1 + x_2)^{i+1}(j-i)!(x_1 + x_2)^{j-i+1} = (j+1)!(x_1 + x_2)^{j+2}.$$

Для коэффициентов $A_{2,j+1}$, $A_{3,j+1}$ рассуждения проводятся точно так же. $\square$

Пусть τ_1, τ_2 — числа, лежащие в верхней комплексной полуплоскости $\mathcal{H}$.

Лемма 4. *Для любых целых неотрицательных чисел* v, w *существуют однородные многочлены* $B_r \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, x_4]$, $r \geqslant 0$, *с условиями*

$$f_1^v(z, \tau_1)f_1^w(z, \tau_2) = \sum_{r=0}^{\infty} B_r(\bar{\omega})\frac{z^r}{r!}, \tag{16}$$

где $\bar{\omega} = (\theta_2(0, \tau_1)^2, \theta_3(0, \tau_1)^2, \theta_2(0, \tau_2)^2, \theta_3(0, \tau_2)^2)$, *и*

$$B_r(x_1, x_2, x_3, x_4) \ll r!\binom{r + v + w - 1}{r}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^{r+v+w}.$$

Доказательство. Подставляя в левую часть равенства (16) полученные ранее разложения функций $f_1(z,\tau_1)$, $f_1(z,\tau_2)$, находим

$$B_r=\sum_{\bar{\jmath},\bar{k}}\frac{r!}{j_1!\dots j_v!k_1!\dots k_w!}A_{1,j_1}\dots A_{1,j_v}\tilde{A}_{1,k_1}\dots\tilde{A}_{1,k_w}.$$

Здесь суммирование ведётся по всем наборам $\bar{\jmath}=(j_1,\dots,j_v)$, $\bar{k}=(k_1,\dots,k_w)$ целых неотрицательных чисел, в сумме составляющих r, а выражения $A_{1,t}$ обозначают значения многочленов $A_{1,t}(x_1,x_2)$ в точке $(\theta_2(0,\tau_1)^2,\theta_3(0,\tau_1)^2)$ и $\tilde{A}_{1,t}$ обозначают значения многочленов $A_{1,t}(x_3,x_4)$ в точке $(\theta_2(0,\tau_2)^2,\theta_3(0,\tau_2)^2)$. Из этого равенства следует, что коэффициент B_r действительно может быть представлен в виде однородного многочлена от координат вектора $\bar{\omega}$ с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}$. При этом согласно лемме 3 имеем

$$\begin{aligned}B_r(x_1,x_2,x_3,x_4)\ll r!\sum_{\bar{\jmath},\bar{k}}(x_1+x_2)^{j_1+\dots+j_v+v}(x_3+x_4)^{k_1+\dots+k_w+w}\ll\\ \ll r!\binom{r+v+w-1}{r}(x_1+x_2+x_3+x_4)^{r+v+w}.\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Перейдём теперь непосредственно к доказательству теоремы 2. Будем предполагать, что числа $\tau_1,\tau_2\in\mathcal{H}$ удовлетворяют условиям этой теоремы. Ниже будет построена последовательность многочленов

$$Q_N\in\mathbb{Z}[x_1,x_2,x_3,x_4],$$

достаточно малых в точке

$$\bar{\omega}=(\theta_2(0,\tau_1)^2,\theta_3(0,\tau_1)^2,\theta_2(0,\tau_2)^2,\theta_3(0,\tau_2)^2)$$

относительно своих степени и величины коэффициентов и отличных от нуля в этой точке. В дальнейшем понадобится зависящий от натурального аргумента N параметр $K=[5\sqrt{N}\,]$.

Предложение 1. *Для каждого достаточно большого N существует целое число $L\leqslant N$ и такие однородные многочлены*

$$C_{\bar{k}}\in\mathbb{Z}[x_1,x_2,x_3,x_4],\quad \bar{k}=(k_1,k_2),\quad 0\leqslant k_1\leqslant K,\quad 0\leqslant k_2\leqslant K,\tag{17}$$

что функция

$$F(z)=\sum_{k_1,k_2=0}^{K}C_{\bar{k}}(\bar{\omega})f_1(z,\tau_1)^{k_1}f_1(z,\tau_2)^{k_2}\tag{18}$$

не равна нулю тождественно и удовлетворяет условию

$$\operatorname{ord}_{z=0}F(z)\geqslant N,$$

а кроме того,

$$\deg C_{\bar{k}}=L-k_1-k_2,\quad \ln|C_{\bar{k}}|\leqslant 2N\ln N.$$

Здесь предполагается, что при $k_1 + k_2 > L$ соответствующий многочлен $C_{\bar{k}}$ равен нулю.

Доказательство. Пусть вектор $\bar{k}$ удовлетворяет неравенствам (17). Согласно лемме 4 существуют однородные многочлены $B_{\bar{k},r} \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, x_4]$, для которых

$$f_1(z, \tau_1)^{k_1} f_1(z, \tau_2)^{k_2} = \sum_{r=0}^{\infty} B_{\bar{k},r}(\bar{\omega}) \frac{z^r}{r!}$$

и при $r < N$ справедливы неравенства

$$\deg B_{\bar{k},r} = r + k_1 + k_2, \quad |B_{\bar{k},r}| \leqslant N!\,10^N. \tag{19}$$

Рассмотрим совокупность многочленов

$$A_{\bar{k}} = \sum_{\bar{l}} a(\bar{k}, \bar{l}\,) x_1^{l_1} x_2^{l_2} x_3^{l_3} x_2^{l_4}$$

с неопределёнными коэффициентами $a(\bar{k}, \bar{l}\,)$. Суммирование ведётся по всем векторам $\bar{l} = (l_1, l_2, l_3, l_4)$ с условиями $l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = N - k_1 - k_2$.

Подберём не все равные нулю целые коэффициенты $a(\bar{k}, \bar{l}\,)$ так, чтобы выполнялась система равенств

$$\sum_{\bar{k}} A_{\bar{k}}(x_1, x_2, x_3, x_4) B_{\bar{k},r}(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv 0, \quad 0 \leqslant r < N, \tag{20}$$

где суммирование ведётся по всем векторам $\bar{k}$, удовлетворяющим (17). Равенства (20) представляют собой систему линейных уравнений относительно неизвестных $a(\bar{k}, \bar{l}\,)$. Количество неизвестных в этой системе равно

$$\sum_{k_1=0}^{K} \sum_{k_2=0}^{K} \binom{N - k_1 - k_2 + 3}{3} \geqslant \frac{1}{7} K^2 N^3 > 3N^4. \tag{21}$$

Оценим сверху количество уравнений в системе (20). В силу (19) справедливы равенства

$$\deg_{x_j} A_{\bar{k}} B_{\bar{k},r} = N + r,$$

так что каждое уравнение (20) с фиксированным r может быть заменено совокупностью из $\binom{N+r+3}{3}$ линейных уравнений относительно неизвестных $a(\bar{k}, \bar{l}\,)$, коэффициентами которых служат коэффициенты многочленов $B_{\bar{k},r}$, т. е. числа из $\mathbb{Z}$. Таким образом, система (20) может быть заменена системой линейных уравнений с коэффициентами из $\mathbb{Z}$, содержащей не более чем

$$N \binom{2N + 3}{3} < \frac{3}{2} N^4 \tag{22}$$

уравнений. Последнее неравенство, как и (21), выполняется, если N достаточно велико.

Из неравенств (21), (22) следует, что число неизвестных в получившейся системе линейных уравнений с целыми коэффициентами более чем вдвое превосходит число уравнений. Значит, эта система уравнений имеет нетривиальное решение. Более того, согласно лемме Зигеля (см., например, [10, глава 3, лемма 11]) и неравенствам (19) эта система уравнений имеет нетривиальное решение $a(\bar{k},\bar{l}\,)$ в целых числах, такое что

$$|a(\bar{k},\bar{l}\,)| < 5N^4 N!\,10^N < N^N 10^N. \tag{23}$$

Найденная нетривиальная совокупность многочленов $A_{\bar{k}}$ может оказаться удовлетворяющей равенствам $A_{\bar{k}}(\bar{\omega}) = 0$ при всех возможных векторах $\bar{k}$. Чтобы избежать этого, необходимо «подправить» найденные многочлены. Пусть s — наименьшее целое неотрицательное число, для которого существует дифференциальный оператор

$$D = \frac{1}{s_1!\,s_2!\,s_3!\,s_4!}\,\frac{\partial^s}{\partial^{s_1}x_1\,\partial^{s_2}x_2\,\partial^{s_3}x_3\,\partial^{s_4}x_4}, \quad s_1 + \ldots + s_4 = s,$$

такой что для некоторого из многочленов $A_{\bar{k}}$ выполняется неравенство $DA_{\bar{k}}(\bar{\omega}) \neq 0$. Ясно, что такое s существует, причём $s < N$. Положим теперь $L = N - s$ и

$$C_{\bar{k}}(x_1,x_2,x_3,x_4) = DA_{\bar{k}}(x_1,x_2,x_3,x_4)$$

при всех рассматриваемых векторах $\bar{k}$. Ясно, что $\deg C_{\bar{k}} = L - k_1 - k_2$. Применяя к равенствам (20) дифференциальный оператор D, получаем в силу минимальности s, что многочлены

$$E_r(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum_{\bar{k}} C_{\bar{k}}(x_1,x_2,x_3,x_4) B_{\bar{k},r}(x_1,x_2,x_3,x_4), \quad 0 \leqslant r < N,$$

удовлетворяют равенствам $E_r(\bar{\omega}) = 0$. Определив теперь функцию $F(z)$ с помощью равенств (18), получим

$$F^{(r)}(0) = E_r(\bar{\omega}) = 0, \quad 0 \leqslant r < N.$$

Функции $f_1(z,\tau_1)$ и $f_1(z,\tau_2)$ периодичны с периодами 2π, $2\pi\tau_1$ и 2π, $2\pi\tau_2$ соответственно. Условие линейной независимости чисел 1, τ_1, τ_2 над $\mathbb{Q}$ влечёт алгебраическую независимость $f_1(z,\tau_1)$ и $f_1(z,\tau_2)$ над $\mathbb{C}$. Действительно, тождество

$$P(f_1(z,\tau_1), f_1(z,\tau_2)) = 0,$$

где многочлен $P(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ неприводим и отличен от нуля, означает выполнимость при любом целом k тождеств

$$P(f_1(z + 2k\pi\tau_2, \tau_1)), f_1(z,\tau_2)) = 0.$$

Это, в частности, означает, что не равный нулю многочлен $Q(x) = P(x,0)$ имеет своими корнями числа $f_1(2k\pi\tau_2,\tau_1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Поскольку любой многочлен имеет лишь конечное число корней, приходим к заключению, что какой-то из этих корней является значением функции $f_1(z,\tau_1)$ в бесконечной совокупности точек вида $2k\pi\tau_2$. Эллиптическая функция принимает каждое своё значение в параллелограмме периодов лишь в конечном числе точек. Поэтому должно найтись целое число m, при котором $2m\pi\tau_2$ принадлежит решётке периодов эллиптической функции $f_1(z,\tau_1)$. Но это означает линейную зависимость над $\mathbb{Q}$ чисел 1, τ_1, τ_2, что невозможно. Итак, функции $f_1(z,\tau_1)$ и $f_1(z,\tau_2)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}$, и это означает, что построенная функция $F(z)$ не равна нулю тождественно.

Осталось оценить величину коэффициентов многочленов $C_{\bar{k}}$. Из неравенств (23) следует, что при каждом из рассматриваемых векторов $\bar{k}$ справедлива мажоранта

$$A_{\bar{k}} \ll N^N 10^N (x_1+x_2+x_3+x_4)^{N-k_1-k_2},$$

откуда следует, что

$$C_{\bar{k}} \ll N!\,10^N \frac{(N-k_1-k_2)!}{s_1!\,s_2!\,s_3!\,s_4!\,(N-k_1-k_2-s)!} \leqslant N^N 50^N (x_1+x_2+x_3+x_4)^{L-k_1-k_2}$$

и

$$|C_{\bar{k}}| \leqslant N^N 50^N 4^N \leqslant N^{2N}.$$

Это завершает доказательство предложения 1. □

Далее будем работать с функцией $F(z)$, построенной в предложении 1. Обозначим буквой T наименьшее целое число, для которого выполнено $F^{(T)}(0) \neq 0$. Согласно этому предложению $T \geqslant N$.

Предложение 2. *Существует однородный многочлен $R \in \mathbb{Z}[x_1,x_2,x_3,x_4]$, удовлетворяющий равенству $F^{(T)}(0) = R(\bar{\omega})$ и неравенствам*

$$\deg R \leqslant 2T, \quad \ln|R| \leqslant 4T\ln T, \tag{24}$$

$$0 < |R(\bar{\omega})| < e^{-c_0 T^{3/2}}, \tag{25}$$

где c_0 — положительная постоянная, зависящая только от τ.

Доказательство. Справедливо равенство

$$F^{(T)}(0) = \sum_{\bar{k}} C_{\bar{k}}(\bar{\omega}) B_{\bar{k},T}(\bar{\omega}) = R(\bar{\omega}),$$

где многочлен $R = R(x_1,x_2,x_3,x_4)$ определён равенством

$$R = \sum_{\bar{k}} C_{\bar{k}}(x_1,x_2,x_3,x_4) B_{\bar{k},T}(x_1,x_2,x_3,x_4). \tag{26}$$

Согласно предложению 1 и лемме 4 справедливы мажоранты

$$C_{\bar{k}} \ll N^{2N}(x_1+x_2+x_3+x_4)^{L-k_1-k_2}, \quad B_{\bar{k},T} \ll T!\,2^{T+2K}(x_1+x_2+x_3+x_4)^{T+k_1+k_2}.$$

Учитывая, что количество слагаемых в сумме (26) не превосходит $(K+1)^2 < 26N$ и справедливо неравенство $T \geqslant N$, получаем неравенства (24). Левое неравенство (25) следует из определения T.

Каждая тета-функция $\theta_l(z,\tau)$ удовлетворяет неравенству

$$|\theta_l(z,\tau)| \leqslant e^{\gamma|z|^2}, \tag{27}$$

где γ — некоторая положительная постоянная, зависящая только от τ. В дальнейшем это неравенство будет применяться для $\tau = \tau_1$ или $\tau = \tau_2$. Поэтому будем считать константу γ общей для этих двух случаев. Определим также постоянную $c_1 = 10^{-5}\gamma^{-1}$.

Для доказательства правого неравенства (25) заметим, что функция $F(z)$ периодична с периодом 2π и потому имеет согласно предложению 1 нули кратности $T \geqslant N$ в каждой из точек $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Обозначим

$$G(z) = \theta_4(z,\tau_1)^K\theta_4(z,\tau_2)^K F(z) = \\ = \sum_{k_1=0}^{K}\sum_{k_2=0}^{K} C_{\bar{k}}(\bar{\omega})\theta_1(z,\tau_1)^{k_1}\theta_4(z,\tau_1)^{K-k_1}\theta_1(z,\tau_2)^{k_2}\theta_4(z,\tau_2)^{K-k_2} \tag{28}$$

и

$$H(z) = \frac{G(z)}{\prod\limits_{|n|\leqslant M}(z-2\pi n)^T}, \tag{29}$$

где $M = [c_1\sqrt{T}\,]$. Из сказанного выше следует, что $H(z)$ есть целая функция. Согласно принципу максимума имеем

$$|H(0)| \leqslant \max_{|z|=20\pi M}|H(z)|. \tag{30}$$

Из равенства (28) для любого z, $|z| \leqslant 20\pi M$, получаем

$$|G(z)| \leqslant (K+1)^2 e^{2K\gamma\cdot 400\pi^2M^2} N^{2N}\Big(1 + 4\max_{l,j}|\theta_l(0,\tau_j)|^2\Big)^N \leqslant e^{c_1T^{3/2}}. \tag{31}$$

Если $|z| = 20\pi M$ и $|n| \leqslant M$, то $|z-2\pi n| \geqslant 20\pi M - 2\pi M = 18\pi M$ и

$$(M!)^{-2T}\prod_{|n|\leqslant M}|z-2\pi n|^T \geqslant (18\pi)^{2MT}. \tag{32}$$

Теперь, учитывая, что

$$F^{(T)}(0) = T!\,(M!)^{2T}(2\pi)^{2MT}\theta_4(0,\tau_1)^{-K}\theta_4(0,\tau_2)^{-K}H(0),$$

и пользуясь (29)—(32), получаем

$$|F^{(T)}(0)| \leqslant e^{-3c_1T^{3/2}}.$$

Это завершает доказательство предложения 2 с константой $c_0 = 3c_1$. □

Предположим теперь, что теорема 2 неверна. Тогда имеем $\bar{\omega} = \theta_3(0,\tau_1)^{-1}\bar{\xi}$, где $\bar{\xi} = (\xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ — вектор с алгебраическими координатами. Согласно предложению 2 и теореме Лиувилля (см. [10, глава 1, § 4, теорема 11]) $|R(\bar{\xi})| \geqslant e^{-c_2T\ln T}$ с некоторой постоянной c_2, зависящей только от $\bar{\xi}$. Но тогда в силу однородности R и (24) имеем оценку $|R(\bar{\omega})| \geqslant e^{-2c_2T\ln T}$, противоречащую (25) при достаточно большом N. Это завершает доказательство теоремы 2.

2.3. Теорема BDGP

В 1971 г. в [5] Ю. И. Манин высказал некоторое предположение о трансцендентности значений модулярной функции $j(\tau)$. Фактически были указаны два аналогичных утверждения, одно относилось к комплексной, а другое к p-адической области. Оба варианта гипотезы Манина не доказаны в полной общности и по сей день. Комплексный случай может быть сформулирован следующим образом.

Гипотеза 1. Пусть a — алгебраическое число, отличное от 0 и 1. Тогда при любом $\xi \in \mathcal{H}$ по крайней мере одно из чисел

$$a^{\xi}, \quad j(\xi)$$

трансцендентно.

Здесь $a^{\xi} = e^{\xi \ln a}$ при каком-либо фиксированном выборе ветви логарифма.

Двумя годами раньше, в 1969 г., К. Малер [20] высказал такое же предположение в частном случае $a = -1 = e^{\pi i}$. Гипотеза Малера была доказана в 1995 г. в совместной работе [12] К. Барре, Г. Диаса, Ф. Гремейна и Ж. Филибера.

Теорема 3. *Для каждого $\xi \in \mathcal{H}$ по крайней мере одно из чисел*

$$e^{\pi i \xi}, \quad j(\xi)$$

трансцендентно.

Доказательство теоремы Малера—Попкена из раздела 2.1, по существу, состоит в конструкции последовательности многочленов $B_n \in \mathbb{Z}[x_2, x_3, x_4]$ с условием, что функция $B_n(\psi_2(\tau), \psi_3(\tau), \psi_4(\tau))$ имеет в бесконечности нуль достаточно большой кратности по сравнению с величиной коэффициентов многочлена B_n и его степенью. Другими словами, её разложение в ряд Фурье по степеням $q = e^{\pi i \tau}$ начинается с достаточно большой степени q. Похожая идея использовалась в доказательстве теоремы 3. Вместо функций $\psi_k(\tau)$ авторы статьи [12] работали с функциями q и $j(\tau)$, а конструкция соответствующей последовательности многочленов была не эффективной, как в доказательстве теоремы 1, а использовала лемму Зигеля, как в доказательстве предложения 1. Приводимое ниже доказательство теоремы 3 использует тета-константы вместо $j(\tau)$, что несколько упрощает доказательство (см. также [13]).

Рассмотрим функции

$$h_2(z) = 16z\biggl(\sum_{n=0}^{\infty} z^{n(n+1)}\biggr)^4, \quad h_3(z) = \biggl(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^{n^2}\biggr)^4.$$

Из определения тета-констант следует, что $\theta_2^4(\tau) = h_2(q)$, $\theta_3^4(\tau) = h_3(q)$, где $q = e^{\pi i \tau}$.

Лемма 5. *Для всех достаточно больших целых N существует многочлен $A \in \mathbb{Z}[z, x_2, x_3]$, $A \not\equiv 0$, однородный по переменным x_2, x_3 степени N, такой что*

$$\deg_z A \leqslant N, \quad \ln |A| \leqslant 16N \ln N,$$

где $|A|$ *есть максимум модулей коэффициентов* A, *и функция*

$$F(z) = A(z, h_2(z), h_3(z))$$

удовлетворяет условию

$$\operatorname{ord}_{z=0} F(z) \geqslant \left[\frac{(N+1)^2}{2}\right].$$

Доказательство. При любом $k \geqslant 0$ имеем

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n \ll \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\dots(n+k) z^n = \frac{k!}{(1-z)^{k+1}}, \tag{33}$$

где знак $\ll$ означает мажоранту, и, следовательно,

$$h_2(z) \ll \frac{16z}{(1-z)^4}, \quad h_3(z) \ll \frac{16}{(1-z)^4}.$$

Учитывая, что при любом целом $k \geqslant 0$ выполняется $z^k \ll 1/(1-z)$, для каждого вектора $\bar{k} = (k_1, k_2, k_3)$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k_1 \leqslant N$, $k_2 + k_3 = N$, находим

$$z^{k_1} h_2(z)^{k_2} h_3(z)^{k_3} = \sum_{n=0}^{\infty} d(\bar{k}, n) z^n \ll \frac{16^N}{(1-z)^{4N+1}}, \tag{34}$$

где $d(\bar{k}, n) \in \mathbb{Z}$. Из (33) и (34) следует, что

$$|d(\bar{k}, n)| \leqslant 16^N (n + 4N)^{4N} \leqslant (5nN)^{4N} \leqslant (nN)^{5N}, \quad n \geqslant 1, \tag{35}$$

если N достаточно велико, $|d(\bar{k}, 0)| \leqslant 1$.

Пусть теперь

$$A = \sum_{\bar{k} \in \mathcal{M}} a(\bar{k}) z^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3},$$

где $\mathcal{M}$ обозначает множество целых векторов $\bar{k} = (k_1, k_2, k_3)$ с условиями $0 \leqslant k_1 \leqslant N$, $k_2 + k_3 = N$, а множество целых чисел $a(\bar{k})$ выбрано как нетривиальное решение системы линейных однородных уравнений

$$\sum_{\bar{k} \in \mathcal{M}} d(\bar{k}, n) a(\bar{k}) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \left[\frac{(N+1)^2}{2}\right] - 1.$$

Число переменных $u = (N+1)^2$ и число уравнений $v = [(N+1)^2/2]$ этой системы связаны неравенством $2v \leqslant u$. Поэтому по лемме Зигеля о решении системы линейных однородных уравнений (см., например, [10, глава 3, лемма 11]) и в силу (35) система имеет нетривиальное решение в целых числах, удовлетворяющих неравенству

$$\max_{\bar{k}} |a(\bar{k})| \leqslant (N+1)^2 \left(\frac{(N+1)^2}{2} N\right)^{5N} \leqslant N^{16N}. \tag{36}$$

Лемма 5 доказана. □

Справедливо тождество

$$A(q, \lambda(\tau), 1) = \theta_3(\tau)^{-4N} A(q, \theta_2^4(\tau), \theta_3^4(\tau)) = \theta_3(\tau)^{-4N} F(q). \tag{37}$$

Функция $\lambda(\tau)$ модулярна относительно подгруппы $\Gamma_2 \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, поэтому функции $q = e^{\pi i \tau}$ и $\lambda(\tau)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}$ и левая часть последнего тождества отлична от нуля. Следовательно, функция $F(z)$ не равна нулю тождественно. Обозначим

$$M = \mathrm{ord}_{z=0} F(z) < \infty.$$

Из леммы 5 следует неравенство

$$\frac{1}{2} N^2 \leqslant M. \tag{38}$$

Положим $q_0 = e^{\pi i \xi}$, $r = \min((1 + |q_0|)/2, 2|q_0|)$. Тогда $|q_0| < r < 1$.

Лемма 6. *Если N достаточно велико, то при всех $z \in \mathbb{C}$ с условием $|z| \leqslant r$ справедлива оценка*

$$|F(z)| \leqslant |z|^M (M+1)^{20N}.$$

Доказательство. Пусть функция $F(z)$ имеет следующее разложение в ряд Тейлора:

$$F(z) = \sum_{n=M}^{\infty} b_n z^n.$$

Тогда

$$b_n = \sum_{\bar{k} \in \mathcal{M}} d(\bar{k}, n) a(\bar{k}) \in \mathbb{Z}$$

и в силу (35), (36)

$$|b_n| \leqslant \sum_{\bar{k} \in \mathcal{M}} (nN)^{5N} N^{16N} \leqslant n^{5N} N^{22N}, \quad n \geqslant M.$$

При $|z| \leqslant r$ мы имеем

$$|F(z)| \leqslant \sum_{n=M}^{\infty} |b_n| \cdot |z|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |b_{n+M}| \cdot |z|^{n+M} \leqslant |z|^M N^{22N} \sum_{n=0}^{\infty} (n+M)^{5N} |z|^n \leqslant$$

$$\leqslant |z|^M N^{22N} (M+1)^{5N} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{5N} |z|^n\right) \leqslant$$

$$\leqslant |z|^M N^{22N} (M+1)^{5N} \frac{(5N)!}{(1-r)^{5N+1}} \leqslant |z|^M (M+1)^{20N},$$

если N достаточно велико. Лемма 6 доказана. $\square$

Лемма 7. *Существует целое число S, $0 \leqslant S \leqslant M^{\frac{1}{4}} \ln(M+1)$, для которого*

$$|F(q_0^S)| \neq 0.$$

Доказательство. Допустим, что выполняются равенства
$$F(q_0^s)=0,\quad 0\leqslant s\leqslant L=[M^{\frac14}\ln(M+1)]. \tag{39}$$
Определим функцию
$$H(z)=\frac{F(z)}{z^M\prod\limits_{s=1}^{L}(z-q_0^s)}.$$
Функция $H(z)$ аналитична в круге $|z|<1$. Применяя к ней принцип максимума, с помощью леммы 6 и неравенства (38) находим
$$|H(0)|\leqslant\max_{|z|=r}|H(z)|\leqslant\frac{(M+1)^{20N}}{\prod\limits_{s=1}^{L}(r-|q_0|^s)}\leqslant\frac{(M+1)^{20N}}{(r-|q_0|)^L}\leqslant(M+1)^{40M^{\frac12}}.$$
Учитывая, что
$$|H(0)|=|b_M|\cdot|q_0|^{-\frac{L(L+1)}{2}}\geqslant|q_0|^{-\frac{L(L+1)}{2}},$$
приходим к неравенству
$$\frac{L(L+1)}{2}\ln\frac{1}{|q_0|}\leqslant 40M^{\frac12}\ln(M+1),$$
которое при достаточно большом N невозможно. $\square$

Обозначим $B(z,x)=A(z,x,1)\in\mathbb{Z}[z,x]$, $B\neq0$. Справедливы неравенства
$$\deg_z B\leqslant N,\quad \deg_x B\leqslant N,\quad \ln|B|\leqslant 16N\ln N, \tag{40}$$
а кроме того, из тождества (37) и леммы 6 следует
$$0<|B(q_0^S,\lambda(S\xi))|=|\theta_3(S\xi)^{-4N}F(q_0^S)|\leqslant \\ \leqslant|\theta_3(S\xi)|^{-4N}|q_0|^{SM}(M+1)^{20N}\leqslant|q_0|^{\frac12 SM}. \tag{41}$$
Как известно, функции $j(\tau)$ и $j(S\tau)$ алгебраически зависимы над $\mathbb{Q}$. Существует так называемый модулярный многочлен $\Phi_S(x,y)\in\mathbb{Z}[x,y]$, $S\neq0$, для которого
$$\Phi_S(j(S\tau),j(\tau))=0.$$
При этом (см. [4])
$$\deg_x\Phi_S=\deg_y\Phi_S=S\prod_{p|S}(1+p^{-1})\leqslant c_1S\ln(S+1)$$
и
$$\ln|\Phi_S|\leqslant c_1S\ln^2(S+1).$$
Последнее неравенство следует из оценки, доказанной в [16]. В этих неравенствах c_1 — абсолютная постоянная, и далее буквой c с нижними индексами будут обозначаться положительные постоянные, зависящие разве что от ξ.

Ввиду тождества (10), связывающего функции $j(S\tau)$ и $\lambda(S\tau)$, заключаем, что найдётся многочлен $C \in \mathbb{Z}[x, y]$, $C \neq 0$, для которого

$$C(\lambda(S\tau), j(\tau)) = 0$$

и

$$\deg_x C \leqslant c_2 S \ln(S+1), \quad \deg_y C \leqslant c_2 S \ln(S+1), \quad \ln|C| \leqslant c_2 S \ln^2(S+1),$$

где c_2 — абсолютная постоянная. При этом многочлен $C(x, y)$ можно считать неприводимым. Ясно, что он зависит от обеих переменных x, y.

Предположим теперь, что теорема 3 неверна, т. е. оба числа $q_0 = e^{\pi i \xi}$ и $j(\xi)$ алгебраичны. Равенство $C(\lambda(S\xi), j(\xi)) = 0$ и алгебраичность числа $j(\xi)$ означают, что найдётся многочлен $R(y) \in \mathbb{Z}[x]$, $R \neq 0$, для которого $R(\lambda(S\xi)) = 0$, причём

$$\deg_x R \leqslant c_3 S \ln(S+1), \quad \ln|R| \leqslant c_3 S \ln^2(S+1).$$

Левое неравенство (41) позволяет с помощью теоремы Лиувилля (см. [9, глава 2, лемма 9.2]), применённой к многочлену $B(z^S, x)$ и алгебраическим числам q_0, $\lambda(S\xi)$, получить оценку снизу

$$\begin{aligned}
&\ln|B(q_0^S, \lambda(S\xi))| \geqslant \\
&\quad \geqslant -c_4(N \ln NS \ln(S+1) + NS^2 \ln(S+1) + NS \ln^2(S+1)) \geqslant \\
&\quad \geqslant -c_5 S M^{\frac{3}{4}} \ln^2(M+1).
\end{aligned}$$

Это неравенство противоречит правому неравенству (41), если N достаточно велико. Теорема 3 доказана.

2.4. Теорема Шнейдера—Ленга

Рассуждения Шнейдера при доказательстве его теорем о значениях эллиптических функций носили достаточно общий характер. Впоследствии он оформил их в виде теоремы о значениях мероморфных функций, удовлетворяющих алгебраическим дифференциальным уравнениям (см. [25]). Удачную формулировку этого утверждения нашёл С. Ленг. Доказательство следующей теоремы содержится, например, в конце его книги [3].

Теорема 4. *Пусть K — поле алгебраических чисел конечной степени, $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ — такие мероморфные функции конечного порядка, что кольцо $K[f_1(z), \ldots, f_m(z)]$*

1) *имеет степень трансцендентности над K, не меньшую чем 2, и*
2) *отображается в себя дифференциальным оператором $\frac{d}{dz}$.*

Тогда множество точек, в которых функции $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ одновременно принимают значения, лежащие в поле K, конечно.

Рассмотрим некоторые частные случаи, относящиеся к тета-константам.

Следствие 3. *Для любого $\tau \in \mathcal{H}$ по крайней мере одно из чисел*

$$\pi\theta_2^2, \quad \pi\theta_3^2 \tag{42}$$

трансцендентно.

Для доказательства воспользуемся функциями $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, введёнными в доказательстве теоремы 2. Положим

$$g_0(z) = z, \quad g_j(z) = \pi f_j(\pi z), \quad j = 1, 2, 3.$$

Легко видеть, что оператор $\frac{\partial}{\partial z}$ переводит кольцо $\mathbb{Q}[g_0(z), g_1(z), g_2(z), g_3(z)]$ в себя. Функции $g_0(z)$ и $g_1(z)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}$. Обозначим буквой K поле, порождённое над $\mathbb{Q}$ числами $g_k(0) = \pi\theta_k^2$, $k = 2, 3$. Все функции $g_k(z)$, $k = 0, 1, 2, 3$, в точках последовательности $z_n = 2n$, $n = 0, 1, \ldots$, принимают значения, принадлежащие полю K. По теореме Шнейдера—Ленга можно утверждать, что это поле не может порождаться алгебраическими числами, т. е. по крайней мере одно из чисел (42) должно быть трансцендентным.

Следствие 4. *Для любого $\tau \in \mathcal{H}$ по крайней мере одно из чисел*

$$\theta_2, \quad \theta_3 \tag{43}$$

трансцендентно.

Воспользуемся для доказательства тем же множеством функций $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, но выберем $f_0(z) = e^{iz}$. Эта функция, как легко видеть, алгебраически независима над $\mathbb{C}$, например, с функцией $f_1(z)$. Все эти функции составляют решение системы алгебраических дифференциальных уравнений с коэффициентами из $\mathbb{Q}(i)$ и в бесконечной последовательности точек $z_n = 2\pi n$, $n = 0, 1, \ldots$, принимают значения, принадлежащие полю $K = \mathbb{Q}(\theta_2, \theta_3, \theta_4, i)$. Согласно теореме Шнейдера—Ленга это поле должно содержать трансцендентные числа.

Теорема 1 легко следует из этого результата. Действительно, если ψ_2, ψ_3, ψ_4 — алгебраические числа, то в силу равенств (3) должны быть алгебраическими и числа (43) вопреки следствию 4.

Подобным образом из теоремы 4 может быть выведена и теорема 2. Пусть $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{H}$ удовлетворяют условиям теоремы 2 и $a \neq 0$ — некоторое комплексное число. Рассмотрим шесть функций

$$g_k(z) = af_k(az, \tau_1), \quad h_k(z) = af_k(az, \tau_2), \quad k = 1, 2, 3.$$

Легко проверить, что функции g_1, g_2, g_3, так же как и функции h_1, h_2, h_3, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (13), так что кольцо $\mathbb{Q}[g_1(z), \ldots, h_3(z)]$ замкнуто относительно операции дифференцирования. Так как числа 1, τ_1, τ_2 линейно независимы над полем рациональных чисел, можно утверждать, что, например, функции $g_1(z)$ и $h_1(z)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}$. Все шесть определённых выше функций в точках $z_n = 2\pi n/a$, $n = 0, 1, \ldots$, принимают значения, лежащие в поле

$$\mathbb{Q}(a\theta_2^2(\tau_1), a\theta_3^2(\tau_1), a\theta_2^2(\tau_2), a\theta_3^2(\tau_2)).$$

Согласно теореме 4 *хотя бы одно из четырёх чисел*

$$a\theta_2^2(\tau_1), \quad a\theta_3^2(\tau_1), \quad a\theta_2^2(\tau_2), \quad a\theta_3^2(\tau_2)$$

трансцендентно. Последнее утверждение верно при любом комплексном $a \neq 0$. Выбрав $a = \theta_3(\tau_1)^{-2}$, получаем утверждение теоремы 2.

Хотелось бы найти эллиптическое доказательство и для теоремы 3. Возможно, с его помощью удастся доказать и гипотезу Манина.

3. Алгебраическая независимость

Достаточное условие, обеспечивающее наличие по крайней мере двух алгебраически независимых среди заданного набора чисел, было доказано в 1949 г. А. О. Гельфондом.

Предложение 3. *Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_m \in \mathbb{C}$, $m \geqslant 2$, и $\sigma(N)$ — функция, определённая для всех достаточно больших натуральных N, монотонно возрастающая до бесконечности при $N \to \infty$ так, что при этом отношение $\sigma(N+1)/\sigma(N)$ остаётся ограниченным. Предположим, что существует последовательность многочленов $Q_N \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$, удовлетворяющих для любой постоянной $c > 0$ и всех достаточно больших N следующим условиям*:

$$\deg Q_N + \log|Q_N| \leqslant \sigma(N), \quad 0 < |Q_N(\omega_1, \ldots, \omega_m)| < e^{-c\sigma^2(N)}. \tag{44}$$

Тогда среди чисел $\omega_1, \ldots, \omega_m$ содержатся по крайней мере два алгебраически независимых над $\mathbb{Q}$ числа.

В приведённом виде это утверждение нигде А. О. Гельфондом не публиковалось. Сам он доказал, что при $m = 1$ последовательности многочленов с условиями (44) не существует (см. [2]), а в приложениях неоднократно конструировал последовательности многочленов, удовлетворяющие (44) при $m \geqslant 2$, и в предположении, что степень трансцендентности поля $\mathbb{Q}(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ меньше двух, сводил рассуждения к невозможному одномерному случаю.

С помощью предложения 3 может быть доказано следующее усиление теоремы 1.

Теорема 5. *Для любого $\xi \in \mathcal{H}$ среди трёх чисел*

$$\psi_2(\xi), \quad \psi_3(\xi), \quad \psi_4(\xi)$$

найдутся по крайней мере два алгебраически независимых над $\mathbb{Q}$.

Это утверждение эквивалентно теореме Г. Чудновского (см. [15]) о наличии двух алгебраически независимых среди инвариантов g_2, g_3 эллиптической функции Вейерштрасса и отношений ω/π, η/π, где ω — ненулевой период и η — соответствующий квазипериод. Для $\xi = i$ из него следует алгебраическая независимость чисел $\Gamma(1/4)$ и π. Другое следствие теоремы Чудновского было получено Д. Бертраном: *для любого $\xi \in \mathcal{H}$ по крайней мере два из трёх чисел $\theta_3(0,\xi)$, $D\theta_3(0,\xi)$, $D^2\theta_3(0,\xi)$ алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$.* Оно также легко следует из теоремы 5. Действительно, обозначим $\mathcal{L} = \mathbb{Q}(\theta_3(0,\xi), D\theta_3(0,\xi), D^2\theta_3(0,\xi))$. Из приведённых выше равенств

$$\psi_3 = \frac{D\theta_3}{\theta_3}, \quad \theta_3^4 = 4(\psi_2 - \psi_4), \quad D\left(\frac{D\theta_3}{\theta_3}\right) = D\psi_3 = 2(\psi_3\psi_2 + \psi_3\psi_4 - \psi_2\psi_4)$$

следует, что все три числа $\psi_2(\xi)$, $\psi_3(\xi)$, $\psi_4(\xi)$ алгебраичны над полем $\mathcal{L}$.

Мы представим здесь в конспективной форме два различных доказательства теоремы 5. Первое из них использует рассуждения с функциями, зависящими от эллиптической переменной z, а второе — с функциями, зависящими от модулярной переменной τ.

Эллиптическое доказательство теоремы 5. Фиксируем некоторое число $\tau \in \mathcal{H}$, которое не будет меняться в процессе доказательства и потому будет опускаться в обозначениях функций.

Основную роль в первом доказательстве играют логарифмические производные тета-функций

$$\varphi_k(z) = \frac{\partial\theta_k(z,\tau)}{\theta_k(z,\tau)}, \quad k = 2,3,4, \quad \partial = \frac{1}{2i}\,\frac{\partial}{\partial z}.$$

Они являются квазипериодическими функциями, а именно (см. [8, § 21.11])

$$\varphi_k(z+\pi) = \varphi_k(z), \quad \varphi_k(z+\pi\tau) = \varphi_k(z) - 1,$$

удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \partial\varphi_2 &= \psi_2 - (\varphi_2 - \varphi_3)(\varphi_2 - \varphi_4), \\ \partial\varphi_3 &= \psi_3 - (\varphi_3 - \varphi_4)(\varphi_3 - \varphi_2), \\ \partial\varphi_4 &= \psi_4 - (\varphi_4 - \varphi_2)(\varphi_4 - \varphi_3), \end{aligned}$$

$\varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \varphi_4(0) = 0$, и связаны алгебраическим уравнением

$$(\varphi_2 - \varphi_3)(\varphi_3 - \varphi_4)(\varphi_4 - \varphi_2) = (\varphi_2 - \varphi_4)\psi_3 + (\varphi_3 - \varphi_2)\psi_4 + (\varphi_4 - \varphi_3)\psi_2.$$

При фиксированном $\tau = \xi \in \mathcal{H}$ функции $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}$. Если применить теорему Шнейдера—Ленга к совокупности функций $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$, $\varphi_4(z)$, получится утверждение теоремы 1, менее сильной, чем теорема 5.

Дальнейшие рассуждения доказывают теорему 5. Подобно леммам 3, 4, справедливы следующие два утверждения.

Лемма 8. *Существуют однородные многочлены* $A_{k,j} \in \mathbb{Z}[x_2, x_3, x_4]$, $j \geqslant 0$, $k = 2,3,4$, *такие что*

$$\varphi_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{k,j}(\psi_2,\psi_3,\psi_4)\frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!}, \quad k = 2,3,4.$$

При этом

$$A_{k,j}(x_2,x_3,x_4) \ll (2j+1)!\,4^j(x_2+x_3+x_4)^{j+1}.$$

Лемма 9. *Для любых целых неотрицательных чисел v, w существуют однородные многочлены $B_r \in \mathbb{Z}[x_2, x_3, x_4]$, $r \geqslant 0$, с условиями*

$$\varphi_2^v(z)\varphi_3^w(z) = \sum_{\substack{r\geqslant v+w \\ r\equiv v+w \pmod 2}} B_r(\bar{\psi})\frac{z^r}{r!}, \tag{45}$$

где $\bar{\psi} = (\psi_2(\xi), \psi_3(\xi), \psi_4(\xi))$, *и*

$$B_r(x_2, x_3, x_4) \ll r!\, 4^r(x_2 + x_3 + x_4)^{\frac{r+v+w}{2}}.$$

Далее мы будем предполагать, что N есть достаточно большое целое число. На первом этапе подобно доказательству предложения 3 с помощью леммы 9 строится многочлен $A \in \mathbb{Z}[x_2, x_3, x_4, y_2, y_3]$, $A \neq 0$, такой что

$$\deg_{x_j} A < N^4, \quad \deg A_{y_j} < 3N^3, \quad \log|A| \leqslant 6N^4 \log N$$

и отличная от нуля функция $F(z) = A(\psi_2, \psi_3, \psi_4, \varphi_2(z), \varphi_3(z))$ удовлетворяет условиям

$$\operatorname{ord}_{z=k\pi\xi} F(z) \geqslant N^4, \quad k = 0, 1, \ldots, N^2. \tag{46}$$

Здесь, конечно, используются равенства $\varphi_j(k\pi\xi) = \varphi_j(0) - k = -k$. Заметим, что благодаря равенству $F(z + \pi) = F(z)$ эта функция имеет намного больше нулей, чем указано в (46).

Функции $\varphi_j(z)$ не являются эллиптическими. Используя тем не менее идеи, предложенные в [14], можно доказать неравенство

$$\sum_{k=0}^{N^2} \operatorname{ord}_{z=k\pi\xi} F(z) \leqslant c_1 N^6,$$

где $c_1 > 0$ — абсолютная постоянная. Отсюда следует, что для некоторых целых k, s, $0 \leqslant k \leqslant N^2$, $0 \leqslant s \leqslant c_1 N^4$, и некоторого многочлена $Q_N \in \mathbb{Z}[x_2, x_3, x_4]$ выполняется

$$Q_N(\psi_2(\xi), \psi_3(\xi), \psi_4(\xi)) = F^{(s)}(k\pi\xi) \neq 0.$$

При этом можно считать, что пара (k, s) выбрана с наименьшим возможным значением s. Легко проверить справедливость неравенств

$$\deg Q_N \leqslant c_2 N^4, \quad \log|Q_N| \leqslant c_2 N^4 \log N,$$

где c_2 — положительная постоянная, зависящая только от ξ.

Для того чтобы оценить сверху $|Q_N(\psi_2(\xi), \psi_3(\xi), \psi_4(\xi))|$, проведём рассуждения, подобные доказательству предложения 1.

Представим многочлен $A(x_2, x_3, x_4, y_2, y_3)$ в виде

$$A = \sum_{k_2=0}^{3N^3} \sum_{k_3=0}^{3N^3} C_{k_2,k_3}(x_2, x_3, x_4) y_2^{k_2} y_3^{k_3}$$

и определим функцию

$$G(z)=\theta_2(z)^{3N^3}\theta_3(z)^{3N^3}F(z)=$$
$$=\sum_{k_2=0}^{3N^3}\sum_{k_3=0}^{3N^3}C_{k_2,k_3}(\psi_2,\psi_3,\psi_4)(\partial\theta_2(z))^{k_2}\theta_2(z)^{3N^3-k_2}(\partial\theta_3(z))^{k_3}\theta_3(z)^{3N^3-k_3}. \quad (47)$$

Эта целая функция имеет нули кратности не менее N^4 в каждой из точек

$$u\pi+v\pi\xi,\quad u,v\in\mathbb{Z},\quad |u|\leqslant N^{5/2},\quad 0\leqslant v\leqslant N^2.$$

Но тогда функция

$$H(z)=\frac{G(z)}{\prod\limits_{|u|\leqslant N^{5/2}}\prod\limits_{v=0}^{N^2}(z-u\pi-v\pi\xi)^{N^4}}$$

также будет целой.

Положим $R=N^{\frac{11}{4}}$ и $r=8N^{\frac{5}{2}}$. Применяя к функции $H(z)$ принцип максимума, получаем неравенство

$$|G|_r\leqslant\prod_{|u|\leqslant N^{5/2}}\prod_{v=0}^{N^2}\left(\frac{r+|u|\pi+v\pi|\xi|}{R-|u|\pi-v\pi|\xi|}\right)^{N^4}|G|_R\leqslant\left(\frac{3r}{R}\right)^{2N^{17/2}}|G|_R. \quad (48)$$

Из равенства (47) следует

$$|G|_R\leqslant 9N^4e^{6N^4\ln N}(1+|\psi_2|+|\psi_3|+|\psi_4|)^{9N^4}e^{12N^3\gamma R^2}\leqslant e^{c_1N^{17/2}},$$

так что с помощью (48) находим

$$|G|_r\leqslant e^{-\frac{1}{3}N^{17/2}\ln N}. \quad (49)$$

Производную $G^{(s)}(k\pi\xi)$ можно оценить с помощью представления

$$G^{(s)}(k\pi\xi)=\frac{s!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{G(z)\,dz}{(z-k\pi\xi)^{s+1}},$$

где Γ — окружность $|z-k\pi\xi|=1$, проходимая в направлении против часовой стрелки. Учитывая, что вся окружность Γ находится внутри круга $|z|\leqslant r$, и пользуясь оценкой (49), получаем

$$|G^{(s)}(k\pi\xi)|\leqslant s!e^{-\frac{1}{3}N^{17/2}\ln N}\leqslant e^{-\frac{1}{4}N^{17/2}\ln N}.$$

Наконец, мы можем воспользоваться равенством

$$G^{(s)}(k\pi\xi)=\theta_2(k\pi\xi)^{3N^3}\theta_3(k\pi\xi)^{3N^3}F^{(s)}(k\pi\xi). \quad (50)$$

Справедливо тождество $\theta_j(z+\pi\xi,\xi)=q^{-1}e^{-2iz}\theta_j(z,\xi)$, $j=2,3$ (см. [8, § 21.11]), из которого легко следует $\theta_j(k\pi\xi,\xi)=q^{-k^2}\theta_j(0,\xi)$, $j=2,3$. С помощью равенства (50) находим

$$|F^{(s)}(k\pi\xi)|\leqslant|q|^{6N^3k^2}|\theta_2(0)\theta_3(0)|^{-3N^3}|G^{(s)}(k\pi\xi)|\leqslant e^{-\frac{1}{5}N^{17/2}\ln N}.$$

В результате при всех достаточно больших N имеем

$$0 < |Q_N(\psi_2, \psi_3, \psi_4)| < e^{-\frac{1}{5}N^{17/2}\ln N}$$

и

$$\deg Q_N \leqslant c_2 N^4, \quad \log|Q_N| \leqslant c_2 N^4 \log N.$$

Применяя теперь предложение 2 с функцией $\sigma(N) = c_2 N^4 \ln N$, завершаем доказательство теоремы 5. $\square$

Модулярное доказательство теоремы 5. В этом доказательстве используются только функции $\psi_2(\tau)$, $\psi_3(\tau)$, $\psi_4(\tau)$. На первом шаге, подобно приведённому выше доказательству леммы 5, мы конструируем такой многочлен $A \in \mathbb{Z}[x_2, x_3, x_4]$, что

$$\deg_{x_j} A < N, \quad \log|A| \leqslant c_3 N \log N$$

и функция $F(\tau) = A(\psi_2(\tau), \psi_3(\tau), \psi_4(\tau)) \neq 0$ удовлетворяет условию

$$\mathrm{ord}_{q=0} F(\tau) \geqslant \frac{1}{2}N^3.$$

Последнее условие означает, что ряд Фурье функции $F(\tau)$ начинается со степени $q = e^{\pi i \tau}$, большей или равной $N^2/2$. Для этого используются разложения функций $\psi_j(\tau)$ в ряды Фурье и лемма Зигеля о решении систем линейных уравнений.

Затем, благодаря системе дифференциальных уравнений (4), с помощью исключения переменных удаётся доказать, что для любого многочлена $B \in \mathbb{C}[x_2, x_3, x_4]$, $B \neq 0$, справедливо неравенство

$$\mathrm{ord}_{q=0} B(\psi_2(\tau), \psi_3(\tau), \psi_4(\tau)) \leqslant c(\deg B)^3. \tag{51}$$

Детали доказательства можно найти в [6].

С помощью неравенства (51), действуя так же, как и при доказательстве леммы 7, с помощью принципа максимума и арифметических соображений можно доказать, что для данной точки $\xi \in \mathcal{H}$ и для некоторого целого s, $0 \leqslant s \leqslant c_2 N \log N$, выполняется

$$D^s F(\xi) \neq 0.$$

Многочлен $Q_N \in \mathbb{Z}[x_2, x_3, x_4]$, определённый условием

$$Q_N(\psi_2(\tau), \psi_2(\tau), \psi_2(\tau)) = D^s F(\tau),$$

удовлетворяет неравенствам

$$0 < |Q_N(\psi_2(\xi), \psi_3(\xi), \psi_4(\xi))| < e^{-\gamma N^3}$$

и

$$\deg Q_N \leqslant c_1 N, \quad \log|Q_N| \leqslant c_2 N \log N.$$

Поэтому с помощью предложения 3 заключаем, что среди $\psi_2(\xi)$, $\psi_3(\xi)$, $\psi_4(\xi)$ есть по крайней мере два алгебраически независимых числа. $\square$

Более общая конструкция, содержащая функции $\psi_2(\tau)$, $\psi_3(\tau)$, $\psi_4(\tau)$ и $q = e^{\pi i\tau}$, и более общая оценка кратности нуля позволяют доказать следующий результат.

Теорема 6. *Для любого $\xi \in \mathcal{H}$ среди четырёх чисел*

$$e^{2\pi i\xi}, \quad \psi_2(\xi), \quad \psi_3(\xi), \quad \psi_4(\xi)$$

имеются по крайней мере три алгебраически независимых над $\mathbb{Q}$.

Благодаря тождествам (5) и (3) теорема 6 эквивалентна следующему утверждению, доказанному в [6]: *для любого $\xi \in \mathcal{H}$ среди четырёх чисел*

$$e^{\pi i\xi}, \quad E_2(\xi), \quad E_3(\xi), \quad E_4(\xi)$$

имеются по крайней мере три алгебраически независимых.

Следствием последнего утверждения является, например, алгебраическая независимость чисел π и $e^{\pi\sqrt{-d}}$ при любом целом $d \geqslant 0$.

4. Заключение

Здесь мы опишем некоторые общие рамки для сформулированных выше теорем.

Обозначим буквой $\mathcal{K}$ наименьшее алгебраически замкнутое поле, содержащее функции τ, $q = e^{\pi i\tau}$, $\theta_3(0,\tau)$ и замкнутое относительно дифференцирования $D = \frac{1}{\pi i}\frac{d}{d\tau}$. Из классических соотношений

$$\theta_2^4 \cdot \theta_4^4 = 8\left(\frac{D^2\theta_3}{\theta_3} - 3\left(\frac{D\theta_3}{\theta_3}\right)^2\right) \in \mathcal{K},$$
$$\theta_2^4 + \theta_4^4 = \theta_3^4 \in \mathcal{K}$$

следует, что $\theta_2 \in \mathcal{K}$, $\theta_4 \in \mathcal{K}$, и значит, функции

$$\psi_2(\tau) = \frac{D\theta_2}{\theta_2}, \quad \psi_3(\tau) = \frac{D\theta_3}{\theta_3}, \quad \psi_4(\tau) = \frac{D\theta_4}{\theta_4}$$

принадлежат полю $\mathcal{K}$. Система дифференциальных уравнений (4), связывающая функции $\psi_j(\tau)$, позволяет сделать вывод, что поле $\mathbb{Q}(\pi i, \tau, q, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ замкнуто относительно дифференцирования D. Второе из соотношений (3) доказывает теперь, что $\mathcal{K}$ есть алгебраическое замыкание этого поля.

Благодаря тождествам (10) и (5) можно утверждать, что поле $\mathcal{K}$ содержит модулярные функции $\lambda(\tau)$, $j(\tau)$ и ряды Эйзенштейна $E_{2k}(\tau)$ при любом $k \geqslant 1$. Более того, для любых $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$ мы имеем $\theta(a\tau+b,\tau) \in \mathcal{K}$, и $\wp(a\tau+b,1,\tau) \in \mathcal{K}$ при $(a,b) \in \mathbb{Q}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$.

В 1969 г. К. Малер [19] доказал, что функции

$$\tau, \quad q, \quad j(\tau), \quad Dj(\tau), \quad D^2j(\tau)$$

алгебраически независимы над $\mathbb{C}$. Поскольку эти функции принадлежат полю $\mathcal{K}$, заключаем, что степень трансцендентности $\mathcal{K}$ над $\mathbb{C}$ равна 5. Следующая гипотеза есть частный случай одного очень общего предположения И. Андре (см. [11]).

Гипотеза 2. Пусть $\xi \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\xi > 0$ и ξ не квадратичная иррациональность. Тогда среди шести чисел

$$\pi, \quad \xi, \quad e^{\pi i \xi}, \quad \psi_2(\xi), \quad \psi_3(\xi), \quad \psi_4(\xi) \tag{52}$$

имеются не менее пяти алгебраически независимых над $\mathbb{Q}$.

Выбирая, например, $\xi = i/\pi$, получаем в качестве следствия не доказанное до сих пор утверждение об алгебраической независимости чисел e и π.

Можно доказать, что число π алгебраично над полем $\mathbb{Q}(\psi_2(\xi), \psi_3(\xi), \psi_4(\xi))$ для любого мнимого квадратичного ξ. Значит, в этом случае поле, порождённое над $\mathbb{Q}$ числами (52), есть алгебраическое расширение поля

$$\mathbb{Q}(e^{\pi i \xi}, \psi_2(\xi), \psi_3(\xi), \psi_4(\xi)).$$

Кроме того, в рассматриваемом случае значение модулярной функции $\lambda(\xi)$ будет алгебраическим числом. Благодаря (10) мы видим, что числа $\psi_2(\xi)$, $\psi_3(\xi)$, $\psi_4(\xi)$ алгебраически зависимы над $\mathbb{Q}$ и, следовательно, все числа (52) алгебраичны над полем $\mathbb{Q}(e^{\pi i \xi}, \psi_2(\xi), \psi_3(\xi))$. Последнее поле, согласно теореме 6, имеет степень трансцендентности 3 над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Таким образом, мнимые квадратичные числа ξ действительно составляют исключение для высказанного выше утверждения. В этом случае среди чисел (52) имеются три и не более алгебраически независимых над $\mathbb{Q}$.

Укажем некоторые частные случаи гипотезы, быть может более простые, чем общее утверждение.

Гипотеза 2.1. Для любого $\xi \in \mathcal{H}$, не являющегося квадратичной иррациональностью, по крайней мере два из трёх чисел

$$\pi, \quad \xi, \quad j(\xi)$$

алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$.

Гипотеза 2.2. Для любого $\xi \in \mathcal{H}$, не являющегося квадратичной иррациональностью, по крайней мере три из четырёх чисел

$$\xi, \quad \psi_2(\xi), \quad \psi_3(\xi), \quad \psi_4(\xi)$$

алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$.

Гипотеза 2.3. Для любого $\xi \in \mathcal{H}$, не являющегося квадратичной иррациональностью, по крайней мере четыре из пяти чисел

$$\xi, \quad e^{\pi i \xi}, \quad \psi_2(\xi), \quad \psi_3(\xi), \quad \psi_4(\xi)$$

алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$.

Наконец, укажем ещё одно предположение, обобщающее теорему 3 и одну гипотезу, высказанную Д. Бертраном в [13].

Гипотеза 3. Пусть $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}$ линейно независимы с 1 над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Тогда среди четырёх чисел

$$e^{\pi i \xi_1}, \quad e^{\pi i \xi_2}, \quad j(\xi_1), \quad j(\xi_2)$$

имеются по крайней мере два алгебраически независимых.

Литература

[1] Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. — М.: Гостехиздат, 1948.

[2] Гельфонд А. О. Трансцендентные и алгебраические числа. — М.: ГИТТЛ, 1952.

[3] Ленг С. Алгебра. — М.: Мир, 1968.

[4] Ленг С. Эллиптические функции. — М.: Наука, 1984.

[5] Манин Ю. В. Круговые поля и модулярные кривые // Успехи мат. наук. — 1971. — Т. 26. — С. 7—71.

[6] Нестеренко Ю. В. Оценки кратностей нулей для тэта-констант // Фундам. и прикл. мат. — 1999. — Т. 5, вып. 2. — С. 557—562.

[7] Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1976.

[8] Уиттекер Э. Е., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Т. 2. — М.: Физматгиз, 1963.

[9] Фельдман Н. И. Седьмая проблема Гильберта. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.

[10] Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. — М.: Наука, 1987.

[11] Andre Y. Quelques conjectures de transcendance issues de la géométrie algébrique. — Preprint de l'Inst. Math. de Jussieu, No. 121. — 1997.

[12] Barré-Sirieix K., Diaz G., Gramain F., Philibert G. Une preuve de la conjecture de Mahler–Manin // Invent. Math. — 1996. — Vol. 124. — P. 1—9.

[13] Bertrand D. Theta functions and transcendence // Ramanujan J. — 1997. — Vol. 1. — P. 339—350.

[14] Brownawell W. D., Masser D. W. Multiplicity estimates for analytic functions. I // J. Reine Angew. Math. — 1980. — B. 313. — S. 200—216.

[15] Chudnovsky G. Contributions to the Theory of Transcendental Numbers. — Providence: AMS, 1984.

[16] Cohen P. On the coefficients of the transformation polynomials for the elliptic modular function // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1984. — Vol. 95. — P. 389—402.

[17] Halphen G. Sur une systéme d'equations différentielles // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1881. — Vol. 92. — P. 1101—1103.

[18] Lawden D. F. Elliptic functions and applications. — Berlin: Springer, 1989.

[19] Mahler K. On algebraic differential equations satisfied by automorphic functions // J. Austral. Math. Soc. — 1969. — Vol. 10. — P. 445—450.

[20] Mahler K. Remarks on a paper by W. Schwarz // J. Number Theory. — 1969. — Vol. 1. — P. 512—521.

[21] Mahler K. Lectures on Transcendental Numbers. — Berlin: Springer, 1976. — (Lect. Notes Math.; Vol. 546).

[22] Mahler K., Popken J. Ein neues Prinzip für Transzendenzbeweize // Proc. Akad. Amsterdam. — 1935. — Vol. 38. — P. 864—871.

[23] Schneider Th. Arithmetische Untersuchungen elliptischer Integrale // Math. Ann. — 1937. — B. 113. — S. 1—13.

[24] Schneider Th. Zur Theorie der Abelschen Functionen und Integrale // J. Reine Angew. Math. — 1941. — B. 183. — S. 110—128.

[25] Schneider Th. Einführung in die transzendenten Zahlen. — Berlin: Springer, 1957.