Асимптотическое распределение классов положительных бинарных квадратичных форм с условиями делимости коэффициентов

У. М. ПАЧЕВ
Кабардино-Балкарский государственный университет

УДК 511.512

Ключевые слова: дискретный эргодический метод, положительная бинарная квадратичная форма, неопределённая тернарная квадратичная форма, делимость коэффициентов, целая точка, двуполостный гиперболоид, гиперболический телесный угол.

Аннотация

Дискретным эргодическим методом получены асимптотические формулы для числа классов положительных бинарных квадратичных форм с условиями делимости крайних коэффициентов.

Abstract

U. M. Pachev, Asymptotic distribution of classes of positive binary quadratic forms with conditions of the divisibility of coefficients, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 6, pp. 123—130.

Asymptotic formulas for the number of classes of positive binary quadratic forms with conditions of divisibility of extreme coefficients are obtained by the discrete ergodic method.

1. В предлагаемой работе развиваются исследования Ю. В. Линника [1, 2] по асимптотическому подсчёту числа классов положительных бинарных форм с условием делимости коэффициентов в связи с приложениями разработанного им дискретного эргодического метода к арифметике неопределённых тернарных квадратичных форм.

Обозначим через $h_1(-m, q)$ число классов целочисленных собственно примитивных положительных бинарных квадратичных форм определителя m, первые коэффициенты которых делятся на заданное число q. Первый результат об асимптотическом поведении $h_1(-m, q)$ при $m \to \infty$ в случае, когда q есть степень простого числа и $m > 3$ нечётно, получен в [2].

В дальнейшем в [3] этот результат при помощи дискретного эргодического метода перенесён на случай составного числа q с избавлением при этом от предположения нечётности $m > 3$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 6, с. 123—130.

Основной асимптотический результат работы [3] о величине $h_1(-m,q)$ при $m\to\infty$ таков:

$$h_1(-m,q)\sim \frac{2^{\nu}}{q\prod\limits_{p|q}\left(1+\frac{1}{p}\right)}h(-m),$$

где $\nu=\nu(q)$ — число различных простых делителей p числа q, $h(-m)$ — число классов целочисленных собственно примитивных бинарных квадратичных форм определителя m. Постоянные, входящие в эту асимптотическую формулу, зависят только от q.

В [5] сделана также попытка перенесения этого результата на каждый гауссов род положительных бинарных квадратичных форм, но при этом пришлось ограничиться условием, что q есть квадрат нечётного числа.

В нашей работе предлагается новый, более общий по сравнению с предшествующими работами подход к рассматриваемой задаче на основе асимптотических теорем 4.1 и 4.2 статьи [4] и их доказательств. При излагаемом подходе основной результат работы [3] о величине $h_1(-m,q)$ снова можно получить как частный случай.

2. Приведём формулировки полученных результатов вместе с необходимыми понятиями из арифметики бинарных и тернарных квадратичных форм. Как обычно, при применении дискретного эргодического метода к арифметике бинарных и тернарных квадратичных форм целесообразно рассматривать целочисленные бинарные квадратичные формы с чётным вторым коэффициентом (как это было принято у Гаусса и Дирихле). Тогда целочисленной бинарной квадратичной форме

$$\varphi(u,v)=x_1u^2+2x_2uv+x_3v^2$$

определителя m взаимно-однозначно ставится в соответствие целая точка (т. е. точка с целыми координатами) (x_1,x_2,x_3) на поверхности двуполостного гиперболоида

$$x_1x_3-x_2^2=m,\quad m>0,\quad x_1>0, \tag{1}$$

при этом левая часть равенства (1) представляет собой определитель бинарной формы $\varphi(u,v)$. Мы называем примитивной бинарную квадратичную форму, для которой НОД$(x_1,x_2,x_3)=1$. Примитивную бинарную квадратичную форму $\varphi(u,v)$ мы называем собственно примитивной, если НОД$(x_1,2x_2,x_3)=1$, и несобственно примитивной, если НОД$(x_1,2x_2,x_3)=2$. На поверхности (1) рассматриваем ограниченную квадрируемую область Λ_m, видимую из начала координат под f_0-гиперболическим телесным углом $\lambda=\lambda(\Lambda_m)>0$, где

$$f_0=f_0(x_1,x_2,x_3)=x_1x_3-x_2^2 \text{ —}$$

простейшая неопределённая тернарная квадратичная форма. Под f_0-гиперболическим телесным углом λ области Λ_m понимаем объём конуса, опирающегося на центральную проекцию области Λ_m на нормированный гиперболоид

$$f_0(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3)=1, \tag{2}$$

получающийся из гиперболоида (1) преобразованием координат

$$\tilde{x}_1 = \frac{x_1}{\sqrt{m}}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{x_2}{\sqrt{m}}, \quad \tilde{x}_3 = \frac{x_3}{\sqrt{m}}.$$

Не нарушая общности рассуждений (см. [4]), считаем, что Λ_m целиком лежит в основной фундаментальной области F_0 положительных бинарных квадратичных форм определителя m:

$$2|x_2| < x_1 < x_3, \quad 0 \leqslant 2x_2 < x_1 = x_3, \quad 0 < 2x_2 = x_1 \leqslant x_3. \tag{3}$$

Наряду с понятиями из арифметики бинарных квадратичных форм нам понадобятся также некоторые понятия из арифметики тернарных квадратичных форм. В наших рассуждениях с простейшей неопределённой тернарной квадратичной формой $f_0 = x_1x_3 - x_2^2$ будем связывать некоторую неопределённую целочисленную тернарную квадратичную форму.

Пусть $w \geqslant 1$ — нечётное число. Рассмотрим неопределённую целочисленную тернарную квадратичную форму

$$f = f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j$$

дискриминанта $-w^2$, т. е.

$$D = D(f) = -4\det(a_{ij}) = -w^2,$$

где a_{11}, a_{22}, a_{33}, $2a_{12}$, $2a_{13}$, $2a_{23}$ — целые числа.

Пусть матрица $A = (a_{ij})$ формы f не является целой. Тогда форма $\varphi = 2f$ с целой матрицей $B = 2A$ является несобственно примитивной (см. [4]). Пусть $\bar{B}$ — матрица алгебраически взаимной формы $\bar{\varphi}$. Тогда $\bar{B} = \Omega\tilde{B}$, где $\tilde{B}$ — некоторая целая примитивная матрица, Ω — наибольший общий делитель элементов матрицы $\bar{B}$. Предположим, что $w \mid \Omega$. Тогда форма $\varphi = 2f$ является в классическом понимании (см. [4]) тернарной квадратичной формой инвариантов $[\Omega, \Delta]$, где $\Omega = w$, $\Delta = 2$, при этом $\det\varphi = \Omega^2\Delta$. Тогда род формы $2f$, определяемый характерами

$$\left(\frac{-f}{p}\right) = 1 \text{ для всех простых чисел } p \mid w,$$

называем «удобным родом», а формы f, для которых $2f$ принадлежат удобному роду, называем «удобными». В [4] доказано, что всякая неопределённая удобная форма f содержится в простейшей форме f_0, т. е.

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_0\biggl(\sum_{i=1}^{3} c_{1i}x_i,\ \sum_{i=1}^{3} c_{2i}x_i,\ \sum_{i=1}^{3} c_{3i}x_i\biggr), \tag{4}$$

где $c_{ij} \in \mathbb{Z}$, $\det(c_{ij}) \neq 0$.

Представление вида (4) в нашей работе будет рассматриваться в довольно частном случае диагональной матрицы (c_{ij}).

Теперь приведём формулировки полученных результатов. Первый из них относится к асимптотике числа классов положительных бинарных квадратичных форм, у которых каждый из крайних коэффициентов делится на заданное нечётное число.

Теорема 1. *Пусть $m > 0$ — целое число, q, g — взаимно простые нечётные числа,* НОД$(qg, m) = 1$, *b_1, b_2, b_3 — целые числа, удовлетворяющие условиям*

$$b_1b_3 - b_2^2 \equiv m \pmod g, \quad b_1b_3 \equiv 0 \pmod q, \quad \text{НОД}(b_1, b_2, b_3, 2) = 1, \tag{5}$$

$$\left(\frac{-m}{p}\right) = 1 \text{ для всех } p \mid q. \tag{6}$$

Пусть Λ_m — ограниченная квадрируемая область на поверхности двуполостного гиперболоида (1) *с f_0-гиперболическим телесным углом λ, лежащая в основной фундаментальной области* (3) *положительных бинарных квадратичных форм определителя m. Обозначим через $h_{1,3}(\Lambda_m; q; g, b_1, b_2, b_3)$ число классов собственно примитивных положительных бинарных квадратичных форм определителя m, для которых представители (x_1, x_2, x_3) удовлетворяют условиям*

$$(x_1, x_2, x_3) \in \Lambda_m, \quad (x_1, x_2, x_3) \equiv (b_1, b_2, b_3) \pmod g, \tag{7}$$

$$x_1 \equiv 0 \pmod q, \quad x_3 \equiv 0 \pmod q. \tag{8}$$

Тогда при $m \to \infty$

$$h_{1,3}(\Lambda_m; q; g, b_1, b_2, b_3) \sim \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{2^{\nu(q)}}{q^3g^2 \prod\limits_{p \mid qg} \left(1 + \frac{\left(\frac{-m}{p}\right)}{p}\right)} h(-m), \tag{9}$$

где $\lambda_0 = \frac{2\pi}{9}$, $\nu(q)$ — число различных простых делителей q, $h(-m)$ — число классов собственно примитивных положительных бинарных квадратичных форм определителя m. Постоянные, входящие в асимптотическую формулу (9), *зависят только от q, g и центральной проекции $\tilde\Lambda_m = \frac{1}{\sqrt{m}}\Lambda_m$ области Λ_m на нормированный гиперболоид.*

Все остальные результаты касаются распределения классов положительных бинарных квадратичных форм с условием делимости произведения крайних коэффициентов на заданное нечётное число.

Теорема 2. *Пусть $h^*_{1,3}(-m, q)$ — число классов собственно примитивных положительных бинарных квадратичных форм определителя m, произведение крайних коэффициентов которых делится на заданное нечётное число $q \geqslant 3$. Пусть при этом $\left(\frac{-m}{p}\right) = 1$ для всех простых $p \mid q$. Тогда при $m \to \infty$*

$$h^*_{1,3}(-m, q) \sim \frac{2^{\nu(q)}\tau(q)}{\sigma_0(q)} h(-m), \tag{10}$$

где $\nu(q)$ — число различных простых делителей числа q, $\tau(q)$ — число делителей q, $\sigma_0(q) = q\prod\limits_{p \mid q}\left(1 + \frac{1}{p}\right)$, $h(-m)$ — число классов собственно примитивных *положительных бинарных квадратичных форм определителя* m. *Постоянные, входящие в асимптотическую формулу* (10), *зависят только от* q.

Следующий основной результат выявляет асимптотическую геометрию и распределение по классам вычетов по заданному модулю классов собственно примитивных положительных бинарных квадратичных форм с условием делимости произведения крайних коэффициентов на заданное нечётное число.

Теорема 3. *Пусть* $m > 0$ — *целое число,* q, g — *взаимно простые нечётные числа,* НОД$(qg, m) = 1$, b_1, b_2, b_3 — *целые числа, причём выполнены условия* (5) *и* (6). *Пусть* Λ_m — *ограниченная квадрируемая область на поверхности двуполостного гиперболоида* (1) *с* f_0-*гиперболическим телесным углом* λ, *причём* $\Lambda_m \subset F_0$. *Обозначим через* $h^*_{1,3}(\Lambda_m; q; g, b_1, b_2, b_3)$ *число классов целочисленных собственно примитивных положительных бинарных квадратичных форм определителя* m, *для которых представители* (x_1, x_2, x_3) *удовлетворяют условиям* (7) *и, кроме того,*

$$x_1 x_3 \equiv 0 \,(\operatorname{mod}\, q). \tag{11}$$

Тогда при $m \to \infty$

$$h^*_{1,3}(\Lambda_m; q; g, b_1, b_2, b_3) \sim \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{2^{\nu(q)}\tau(q)}{qg^2 \prod\limits_{p|qg} \left(1 + \frac{\left(\frac{-m}{p}\right)}{p}\right)} h(-m), \tag{12}$$

постоянные, входящие в асимптотическую формулу (11), *зависят только от* q, g *и центральной проекции* $\tilde{\Lambda}_m = \frac{1}{\sqrt{m}}\Lambda_m$ *области* Λ_m *на нормированный гиперболоид* (2).

Результат, аналогичный теореме 3, справедлив и для классов несобственно примитивных положительных бинарных квадратичных форм.

Теорема 4. *Пусть* $h'^*_{1,3}(\Lambda_m; q; g, b_1, b_2, b_3)$ — *число классов несобственно примитивных положительных бинарных квадратичных форм определителя* m, *представители которых удовлетворяют условиям* (7) *и* (11). *Тогда в условиях теоремы* 3 *при* $m \to \infty$

$$h'^*_{1,3}(\Lambda_m; q; g, b_1, b_2, b_3) \sim \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{2^{\nu(q)}\tau(q)}{qg^2 \prod\limits_{p|qg} \left(1 + \frac{\left(\frac{-m}{p}\right)}{p}\right)} h'(-m), \tag{13}$$

$h'(-m)$ — *число классов несобственно примитивных положительных бинарных квадратичных форм определителя* m, *постоянные, входящие в асимптотическую формулу* (13), *зависят только от* q, g *и* $\tilde{\Lambda}_m = \frac{1}{\sqrt{m}}\Lambda_m$.

Из теорем 3 и 4 получается аналогичный им результат, относящийся ко всем классам примитивных положительных бинарных квадратичных форм определителя m.

Теорема 5. *Пусть $H^*_{1,3}(\Lambda_m; q; g, b_1, b_2, b_3)$ — общее число классов примитивных положительных бинарных квадратичных форм определителя m, для которых представители (x_1, x_2, x_3) удовлетворяют условиям* (5), (7), (11) *и, кроме того, выполнено условие* (6). *Тогда при $m \to \infty$*

$$H^*_{1,3}(\Lambda_m; q; g, b_1, b_2, b_3) \sim \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{2^{\nu(q)}\tau(q)}{qg^2 \prod\limits_{p|qg} \left(1 + \frac{\left(\frac{-m}{p}\right)}{p}\right)} r(m), \tag{14}$$

где $r(m) = h(-m) + h'(-m)$ — общее число классов примитивных положительных бинарных квадратичных форм определителя m.

3. Проведём доказательство только теоремы 3, поскольку теорема 2 есть её частный случай (но при этом отметим, что теорема 2 имеет самостоятельный интерес), а теоремы 1, 4 и 5 доказываются аналогичным образом.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\varphi(u, v) = x_1 u^2 + 2x_2 uv + x_3 v^2$ — собственно примитивная приведённая положительная бинарная квадратичная форма определителя $x_1 x_3 - x_2^2 = m$, удовлетворяющая условию (11), согласно которому произведение крайних коэффициентов формы $\varphi(u, v)$ делится на q. Тогда крайние коэффициенты формы $\varphi(u, v)$ можно записать в виде

$$x_1 = dx'_1, \quad x_3 = \frac{q}{d} x'_3,$$

где $d \mid q$, x'_1, x'_3 — целые числа.

Пусть для соответствующей точки (x_1, x_2, x_3) гиперболоида (1) выполнены условия (7), причём область Λ_m целиком лежит в фундаментальной области приведения (3).

Как и в [4], рассмотрим линейное преобразование

$$\begin{aligned} x_1 &= dx'_1, \\ x_2 &= x'_2, \\ x_3 &= \frac{q}{d} x'_3, \end{aligned} \tag{15}$$

взаимно-однозначно ставящее в соответствие точке (x'_1, x'_2, x'_3) двуполостного гиперболоида

$$q x'_1 x'_3 - x'^2_2 = m, \quad x'_1 > 0, \tag{16}$$

точку (x_1, x_2, x_3) на гиперболоиде (1).

Разобьём область Λ_m на $\tau(q)$ областей $\Lambda_m^{(d)}$, не пересекающихся по внутренним точкам, где $d \mid q$. При этом области $\Lambda_m^{(d)}$ ставим в соответствие область $\Lambda_{m,q}^{(d)}$ на гиперболоиде (16) при взаимно-однозначном отображении (15), тогда области Λ_m будет соответствовать область $\Lambda_{m,q} = \bigcup\limits_{d|q} \Lambda_{m,q}^{(d)}$ на гиперболоиде (16).

В силу условия взаимной простоты чисел q и g классу вычетов

$$(x_1, x_2, x_3) \equiv (b_1, b_2, b_3) \pmod{g}$$

будет соответствовать класс вычетов

$$(x'_1, x'_2, x'_3) \equiv (b'_1, b'_2, b'_3) \pmod{g}.$$

Следуя [4], разобьём все целые собственно примитивные точки $(x_1, x_2, x_3) \in \in \Lambda_m^{(d)}$, отвечающие в соответствии с (15) целым собственно примитивным точкам $(x'_1, x'_2, x'_3) \in \Lambda_{m,q}^{(d)}$, на $s = s_{q,d}$ классов вычетов по модулю qg:

$$(x_1, x_2, x_3) \equiv \left(b_1^{(d,i)}, b_2^{(d,i)}, b_3^{(d,i)}\right) \pmod{qg}, \quad i = 1, \ldots, s, \tag{17}$$

где $s = s_{q,d}$ — число различных по модулю q решений (x'_1, x'_2, x'_3) сравнения

$$q(gx'_1 + b'_1)(gx'_3 + b'_3) - (gx'_2 + b'_2)^2 \equiv m \pmod{qg},$$

для которых точки

$$\left(d(gx'_1 + b'_1),\ gx'_2 + b'_2,\ \frac{q}{d}(gx'_3 + b'_3)\right)$$

различны по модулю qg.

Из наших построений, учитывая инвариантность отношения объёмов при линейном преобразовании и пользуясь [4, теорема 3.2], получим

$$\begin{aligned} h^*_{1,3}(\Lambda_m; q; g, b_1, b_2, b_3) &= \sum_{d|q} h\left(\Lambda_{m,q}^{(d)}; q; g, b_1^{(d)}, b_2^{(d)}, b_3^{(d)}\right) = \\ &= \sum_{d|q} \sum_{i=1}^{s} h\left(\Lambda_m^{(d)}; qg, b_1^{(d,i)}, b_2^{(d,i)}, b_3^{(d,i)}\right) \sim \\ &\sim \sum_{d|q} \frac{\lambda^{(d)}}{\lambda_0^{(q)}} \frac{s}{(qg)^2 \prod\limits_{p|qg} \left(1 + \frac{\left(\frac{-m}{p}\right)}{p}\right)} h(-m) = \\ &= \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{s\tau(q)}{(qg)^2 \prod\limits_{p|qg} \left(1 + \frac{\left(\frac{-m}{p}\right)}{p}\right)} h(-m), \end{aligned} \tag{18}$$

где $\lambda^{(d)}$, $\lambda_0^{(d)}$ — гиперболические телесные углы областей $\Lambda_{m,q}^{(d)}$ и $\Lambda_{m,q}$ соответственно. Теперь заметим, что неопределённая тернарная квадратичная форма $qx'_1x'_3 - {x'_2}^2$ в левой части (16) является удобной формой дискриминанта $-q^2$ и представима в виде (4). Поэтому, пользуясь результатом о величине $s = s_{q,d}$, полученным в [4, доказательство теоремы 4.2], получаем, что $s = 2^{\nu(q)}q$, т. е. $s = s_{q,d}$ на самом деле не зависит от d. Тогда из (18) следует асимптотическая формула (12). Теорема 3 доказана.

Замечание. Результатов, подобных теоремам 1—5, с присутствием среднего коэффициента бинарных квадратичных форм используемый нами дискретный эргодический метод в законченном виде не даёт, так как соответствующие тернарные квадратичные формы не являются удобными. Но полученные основные результаты (теоремы 1 и 3) дают решение в частном случае $n = 2$ поставленного Ю. В. Линником (см. [1, глава VII, § 1]) общего вопроса о существовании решений одной системы диофантовых уравнений специального вида, удовлетворяющих предписанным сравнениям по модулю q (см. наши условия (8) и (11)).

Литература

[1] Линник Ю. В. Эргодические свойства алгебраических полей. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1967.

[2] Линник Ю. В. Асимптотическое распределение приведённых бинарных квадратичных форм в связи с геометрией Лобачевского. I—III // Вестн. Ленингр. ун-та. — 1955. — № 2. — С. 3—23; № 5. — С. 3—32; № 8. — С. 15—27.

[3] Малышев А. В., Пачев У. М. О числе классов целочисленных положительных бинарных квадратичных форм, арифметический минимум которых делится на заданное число // Алгебра и теория чисел. Вып. 4. — Нальчик, 1979. — С. 53—67.

[4] Пачев У. М. О распределении целых точек на некоторых двуполостных гиперболоидах // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. — 1980. — Т. 93. — С. 87—141.

[5] Пачев У. М. О числе классов гауссова рода, арифметический минимум которых делится на квадрат заданного нечётного числа // Мат. заметки. — 1994. — Т. 55, вып. 2. — С. 118—127.