Раскраски пространств и случайные графы*

А. М. РАЙГОРОДСКИЙ
*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*
e-mail: mraigor@yandex.ru

УДК 514.17+519.17

Ключевые слова: геометрический граф, хроматическое число, случайный граф.

Аннотация

Настоящая работа посвящена задачам о вложении конечных геометрических графов в случайные. В ней исследуются, в частности, приложения теории случайных графов к проблеме Нелсона—Эрдёша—Хадвигера о раскраске пространств.

Abstract

A. M. Raigorodskii, Colorings of spaces, and random graphs, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 6, pp. 131—141.

This work deals with some problems on the embeddings of finite geometric graphs into the random ones. In particular, we study here applications of the random graph theory to the Nelson–Erdös–Hadwiger problem on coloring spaces.

1. Введение

В настоящей работе мы обсудим классическую проблему раскраски пространств, восходящую к Е. Нелсону, П. Эрдёшу и Г. Хадвигеру (см. [19,25,26]). По существу, речь идёт об отыскании величины $\chi(\mathbb{R}^d, \mathcal{H})$, равной минимальному количеству цветов, в которые можно так раскрасить все точки в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$, чтобы расстояние между одноцветными точками не принадлежало множеству $\mathcal{H}$ различных положительных вещественных чисел. Такая величина называется *хроматическим числом вещественного евклидова пространства по отношению к множеству запрещённых* (*критических*) *расстояний* $\mathcal{H}$, и это обусловлено не только тем обстоятельством, что слово «хроматический» естественным образом сопутствует любой задаче о раскраске, но и практически очевидной связью проблемы Нелсона—Эрдёша—Хадвигера с теорией графов. В самом деле, $\chi(\mathbb{R}^d, \mathcal{H}) = \chi(\mathfrak{G}^d_{\mathcal{H}})$, где в правой части равенства стоит хроматическое число бесконечного *графа расстояний* $\mathfrak{G}^d_{\mathcal{H}} = (\mathfrak{V}^d_{\mathcal{H}}, \mathfrak{E}^d_{\mathcal{H}})$ (см. [1, 9]), у которого $\mathfrak{V}^d_{\mathcal{H}} = \mathbb{R}^d$,

$$\mathfrak{E}^d_{\mathcal{H}} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathfrak{V}^d_{\mathcal{H}} \times \mathfrak{V}^d_{\mathcal{H}} \colon |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \in \mathcal{H}\}.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта поддержки Ведущих научных школ НШ-136.2003.1, гранта Президента РФ МК-3130.2004.1 и гранта INTAS 03-51-5070.

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 6, с. 131—141.

Здесь через $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ обозначено евклидово расстояние между точками $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$. Понятно, что $\mathcal{H}$ — это действительно множество запрещённых расстояний, ведь точкам одного цвета мы запрещаем отстоять друг от друга на каждое расстояние из $\mathcal{H}$ (по тому же принципу мы эти точки потом соединяем рёбрами в графе $\mathfrak{G}_{\mathcal{H}}^d$). Подчеркнём, что $\mathcal{H}$ вполне может быть и бесконечным, а также заметим, что, каково бы ни было $t>0$, $\chi(\mathfrak{G}_{\mathcal{H}}^d)=\chi(\mathfrak{G}_{t\mathcal{H}}^d)$ и, стало быть, любой наперёд заданный элемент $\mathcal{H}$ мы вольны считать равным, например, единице.

На первый взгляд, граф $\mathfrak{G}_{\mathcal{H}}^d$ ужасен, и как подступиться к задаче нахождения его хроматического числа, совершенно не ясно. Тут, однако, на помощь приходит замечательная (общая) теорема П. Эрдёша и Н. Г. де Брёйна (см. [14]): *если хроматическое число (бесконечного) графа конечно, то оно достигается на некотором его конечном подграфе.* В принципе, у нас $\chi(\mathfrak{G}_{\mathcal{H}}^d)$ в зависимости от вида $\mathcal{H}$ может оказаться как конечным, так и бесконечным. Тем не менее в обоих случаях всё в порядке: в первом задача сведётся к исследованию *конечных графов расстояний* — подграфов в $\mathfrak{G}_{\mathcal{H}}^d$, а во втором и задачи как таковой не будет.

Полезно сразу же сказать, что к первой из рассмотренных выше ситуаций относятся те $\mathfrak{G}_{\mathcal{H}}^d$, у которых множество запрещённых расстояний конечно. В частности, если $|\mathcal{H}|=1$, т. е. критическим является лишь одно расстояние, то $\chi(\mathbb{R}^d,\mathcal{H}) \leqslant (3+o(1))^d$ (см. [22]), а из этого совсем нетрудно вывести оценку $\chi(\mathbb{R}^d,\mathcal{H}) \leqslant (3+o(1))^{kd}$, поскольку $|\mathcal{H}|=k=k(d)$. С бесконечными $\mathcal{H}$ ситуация иная, но мы в дальнейшем с ними работать не будем. Вообще, всевозможные исторические аспекты проблематики можно найти в [4, 25—27]; мы же будем останавливаться только на тех моментах истории, которые окажутся непосредственно связанными с основными сюжетами нашей статьи. Последние же будут строиться вокруг предложенных автором подходов к изучению интересующих нас хроматических чисел конечных графов расстояний за счёт техники, возникающей в науке о *случайном графе* (см. [2, 10, 13]).

В данной работе под случайным графом мы будем понимать последовательность вероятностных пространств $G(n,p)=(\Omega_n,\mathcal{B}_n,P_n)$, где Ω_n — это множество всех графов на n вершинах (граф без петель и кратных рёбер, так что $|\Omega_n|=2^{C_n^2}$), $\mathcal{B}_n$ — это совокупность всех подмножеств в Ω_n (совокупность различных наборов графов: $|\mathcal{B}_n|=2^{2^{C_n^2}}$), $P_n(G)=p^{|E|}(1-p)^{C_n^2-|E|}$ ($G=(V,E)\in\Omega_n$), $P_n(B)=\sum\limits_{G\in B}P_n(G)$ ($B\in\mathcal{B}_n$). Заметим, во-первых, что фактически речь идёт о схеме испытаний Бернулли с «вероятностью успеха» p, а вернее, о так называемой схеме серий, т. е. мы разрешаем величине p зависеть от числа вершин n. Во-вторых, наборы графов, попадающие в $\mathcal{B}_n$, можно интерпретировать как свойства графа: «свойство» — это множество тех графов, которые им обладают. Наконец, мы будем допускать некоторую неаккуратность, называя случайным графом в зависимости от контекста как описанное выше вероятностное пространство $G(n,p)$, так и любой элемент (граф) из Ω_n. Ясно, что, по сути, мы строим случайный граф, добавляя в множество его рёбер (которое, собственно, и оказывается в итоге случайным) каждое новое ребро с вероятностью $p = p(n) \in (0,1)$ независимо от остальных и не добавляя его с вероятностью $q = 1 - p$ («разыгрываем» монетку с вероятностью «решки» p и «орла» q).

В дальнейшем мы будем говорить, что свойство случайного графа *выполнено почти наверное* (*п. н.*), если вероятность этого свойства (вероятность множества графов, для которых это свойство выполнено) стремится к единице при $n \to \infty$. При этом, как правило, индекс n в обозначениях Ω_n, $\mathcal{B}_n$, P_n мы будем опускать, не забывая, конечно, о том, что все свойства графов мы так или иначе изучаем в динамике, т. е. с ростом n.

В разделах 2, 3 и 4 мы рассмотрим несколько задач относительно хроматического числа пространства, которые удаётся эффективно решать, используя язык и технику теории случайных графов.

2. Сложность проблемы Нелсона—Эрдёша—Хадвигера

2.1. Постановка вопроса

Итак, наша основная задача состоит в отыскании величины $\chi(\mathbb{R}^d, \mathcal{H})$. В этом разделе мы будем считать, что $\mathcal{H} = \{a\}$, или, что то же самое, $\mathcal{H} = \{1\}$. Для краткости будем писать просто $\chi(\mathbb{R}^d)$, так как запрещённое расстояние роли теперь не играет. Собственно, именно с $\chi(\mathbb{R}^d)$ и пошла вся наука, возникшая в 50-е годы XX века. Самой большой «трагедией» этой науки по сей день остаётся тот факт, что даже на плоскости хроматическое число не известно. Мы знаем лишь, что

$$4 \leqslant \chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7$$

(см. [20, 23]), и устранение столь значительного зазора представляется крайне трудной проблемой. Это тем более удивительно, если учесть, что обе существующие оценки совершенно просты. Естественно, задача Нелсона—Эрдёша—Хадвигера становится ещё более сложной с ростом размерности. Так, при $d = 3$ мы имеем

$$6 \leqslant \chi(\mathbb{R}^3) \leqslant 15$$

(см. [15, 24]), а при $d \to \infty$ величина зазора увеличивается экспоненциально:

$$(1{,}239\ldots + o(1))^d \leqslant \chi(\mathbb{R}^d) \leqslant (3 + o(1))^d$$

(см. [3, 22]). Появляется естественное желание осознать, в чём же всё-таки суть проблемы, почему, например, так тяжело даются нижние оценки хроматических чисел. Хочется как-нибудь измерить, скажем, «частоту» или «плотность» возникновения конечных графов расстояний, имеющих большое хроматическое число. Здесь, разумеется, не ясно пока, что есть частота, но и не понятно даже, как интерпретировать первое слово в выражении «большое хроматическое число». Впрочем, последняя неясность устраняется легко: коль скоро наилучшей на данный момент остаётся некая оценка вида $\chi(\mathbb{R}^d) \geqslant \chi_d$, то χ_d и следует считать большим ($\chi_2 = 4$, $\chi_3 = 6$, $\chi_d = (1{,}239)^d$, $d \to \infty$). Всё равно ни к чему ещё большему нам пока стремится не приходится. Если и χ_d улучшить сложно, значит, тем более необходимо разобраться с графами, у которых такое хроматическое число. Если окажется, что в некотором разумном смысле плотность конечных графов расстояний, имеющих хроматическое число не меньше χ_d и являющихся подграфами в графе $\mathfrak{G}^d$ (здесь мы нижний индекс также опускаем), достаточно мала, то это будет служить дополнительным основанием для того, чтобы называть проблему трудной: ведь чем меньше плотность нужных нам графов, тем, конечно же, тяжелее «отлавливать» их.

В [6] автор предложил следующую числовую характеристику плотности. Пусть $t_{\max}(d, n, p)$ — это максимальное натуральное число k, при котором $P(Q_k) > \frac{1}{2}$, причём Q_k — это свойство случайного графа G в пространстве $G(n, p)$, выполненное, если в G существует индуцированный связный подграф на k вершинах, имеющий хроматическое число не меньше χ_d и вкладывающийся в $\mathfrak{G}^d$. Определяя $t_{\max}(d, n, p)$, мы как бы устанавливаем соответствие между множеством конечных «d-мерных» графов расстояний, обладающих самым большим известным хроматическим числом, и множеством случайных графов и их подграфов. Чем большей окажется при данном $p = p(n)$ величина $t_{\max}(d, n, p)$, тем, по-видимому, легче поймать надлежащий подграф в $\mathfrak{G}^d$, чем меньше — тем тяжелее. Если же при некотором p наша величина и вовсе не определена (а такое возможно — см. раздел 2.2), то «вероятность» возникновения нужного подграфа практически отсутствует: такому подграфу (если он есть) и соответствующего случайного не нашлось.

Конечно, имеются разные тонкости. Например, при малом k вряд ли в G из $G(n, p)$ с большой вероятностью найдётся k-вершинный подграф со сколь-нибудь значительным хроматическим числом. И тем не менее $t_{\max}$ должно быть именно как можно бóльшим, чтобы мы с определённостью могли судить о том, что плотность «хороших» подграфов в $\mathfrak{G}^d$ велика. В то же время в связи с упомянутым важным моментом осмысленно рассматривать также $t_{\min}(d, n, p)$, которое задаётся в точности теми же условиями, что и $t_{\max}(d, n, p)$, но только теперь по k берётся не максимум, а минимум. Первая величина лучше отражает суть проблемы и свидетельствует о мере её сложности, но и вторая небезынтересна. Далее, свойство связности в определении Q_k несущественно и носит технический характер. В принципе, им можно пренебречь, в результате чего возникнут новые важные величины $t'_{\max}(d, n, p)$ и $t'_{\min}(d, n, p)$. Наконец, не совсем понятно, почему мы требуем, чтобы $P(Q_k)$ было больше $\frac{1}{2}$. В этом есть некоторая произвольность. Казалось бы, следует говорить, что Q_k выполнено почти наверное, и тогда всё будет в порядке. Однако в этом случае не ясно, как искать максимум или минимум k, которое, помимо всего прочего, должно зависеть от n. Безусловно, можно пытаться вводить некий дополнительный параметр $\varepsilon > 0$ и рассуждать о величине $t_{\max}(d, n, p, \varepsilon)$, сохраняя все свойства и заменяя лишь условие $P(Q_k) > \frac{1}{2}$ условием $P(Q_k) > 1 - \varepsilon$. В действительности, от этого мало что изменится: разве только прибавится громоздкости и суть станет менее прозрачной. Главное, что вероятность Q_k больша́я (скажем, больше $\frac{1}{2}$), и этого уже достаточно.

В следующих разделах мы последовательно изложим различные идеи, позволяющие доказывать несуществование $t_{\max}(d,n,p)$ или приводить хорошие верхние и нижние оценки этой величины. Заметим, что сами оценки будут как условными («если $t_{\max}(d,n,p)$ существует, то...»), так и безусловными, и это придаст дополнительную нетривиальность и многогранность задаче.

2.2. Верхние оценки величины $t_{\max}(d,n,p)$

Идея 1. Эта идея основана на чисто техническом соображении, и, скажем, к величине $t'_{\max}(d,n,p)$ она не применима. Понятно, что речь идёт о связности, на которой и зиждется различие между штрихованной и нештрихованной функциями. Дело в том, что имеет место классическая теорема П. Эрдёша и А. Реньи (см. [10, 13, 16—18]), важная для нас часть формулировки которой звучит так: *если $p \leqslant \frac{c}{n}$, где $c = \mathrm{const} < 1$, то почти наверное все компоненты случайного графа $G(n,p)$ содержат не более $O(\log n)$ вершин.* Очевидно, тем самым, что при упомянутых p заведомо возникает условное неравенство $t_{\max}(d,n,p) \ll \log n$.

Идея 2. По аналогии с величиной χ_d обозначим через χ'_d значение самой лучшей из известных верхних оценок хроматического числа пространства. Как мы знаем, $\chi(\mathbb{R}^d) \leqslant (3+o(1))^d$. Следовательно, можно считать, что $\chi'_d \approx 3^d$, причём $\chi'_2 = 7$, $\chi'_3 = 15$. Если окажется, что в случайном графе $G(n,p)$ каждый индуцированный подграф на не менее $\chi'_d l$ ($l = l(d,n,p)$) вершинах имеет хроматическое число больше χ'_d, то, разумеется, мы получим условную верхнюю оценку $t_{\max}(d,n,p) < \chi'_d l$ (свойство Q_k при $k \geqslant \chi'_d l$ будет нарушаться, поскольку соответствующие индуцированные подграфы нельзя будет вложить в $\mathfrak{G}^d$, у которого хроматическое число не больше χ'_d). Для этого же, например, достаточно, чтобы число независимости $\alpha(G)$ случайного графа $G \in \Omega$ (см. [1, 9]) было п. н. строго меньше чем l (тут работает очевидное неравенство $\chi(H) \geqslant \frac{|U|}{\alpha(H)}$, где $H = (U,F) \subseteq G = (V,E)$ — индуцированный подграф в G, и не стоит забывать, что $\alpha(H) \leqslant \alpha(G)$ за счёт «индуцированности»). Оценивать $\alpha(G)$ позволяют, в свою очередь, вполне стандартные методы, апеллирующие, как максимум, к свойству линейности математического ожидания (ничего, кроме усреднения, здесь не нужно), и мы на них не останавливаемся.

Идея 3. Предположим, что почти наверное в каждом m-вершинном индуцированном подграфе случайного графа G в пространстве $G(n,p)$ содержится некоторая конфигурация, которая заведомо не может быть реализована как подграф в $\mathfrak{G}^d$. Например, $(d+2)$-клика вполне подойдёт на роль такой конфигурации: ясно, что в $\mathbb{R}^d$ максимальный полный граф расстояний (если лишь одно критическое) — это симплекс. Сделанное нами предположение влечёт условную оценку $t_{\max}(d,n,p) \leqslant m$. Задача отлавливания заданной конфигурации (даже столь простой, как клика) в *каждом* индуцированном подграфе случайного графа уже весьма нетривиальна. Для её решения приходится использовать и мартингальную технику типа неравенства Азумы (см. [10—13]), и неравенство Талаграна, и неравенство Янсона (см. [10, 21, 28]). Тем не менее именно на данном пути удаётся обосновывать самые тонкие (условные) результаты.

2.3. Нижние оценки величины $t_{\max}(d, n, p)$

Идея 1. Выполнена несложная лемма (см. [10]): *если $p = n^{-\alpha}$, $\alpha > \frac{5}{6}$, то у случайного графа в пространстве $G(n,p)$ почти наверное каждый подграф на много меньше чем $\sqrt{n}$ вершинах имеет хроматическое число не больше* 3. Лемму можно обобщить так, чтобы хроматическое число каждого подграфа было строго меньше χ_d. При этом, конечно, изменятся условия на p и ограничение на число вершин в рассматриваемых подграфах. В любом случае, если при определённых p и ограничении вида «$\ll k$» утверждение удастся обосновать, то мы немедленно получим условную оценку $t_{\max}(d,n,p) \gg k$.

Идея 2. Рассмотрим какой-нибудь из связных графов G, являющихся конечными подграфами в $\mathfrak{G}^d$ и имеющих хроматическое число не меньше χ_d. Поскольку все известные оценки $\chi(\mathbb{R}^d) \geqslant \chi_d$ эффективны, это несложно сделать. Например, для плоскости разумнее всего взять так называемое мозеровское веретено, изображённое на рис. 1; для произвольного $\mathbb{R}^d$ — граф, фактически

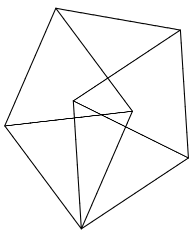

Рис. 1

описанный в [3]. Впрочем, можно брать и другие графы (скажем, известно, что на плоскости есть графы с хроматическим числом 4 и заданным наперёд «обхватом», т. е. длиной минимального цикла (см. [27]); обхват же мозеровского веретена, естественно, равен трём). Число вершин рассмотренного графа G будет зависеть от d. Если d фиксировано, то к одной из вершин G можно добавить, не теряя связности, дерево так, чтобы общее количество вершин в новом графе стало равным некоторому k (рис. 2). Иначе добиваемся того же результата путём присоединения уже не одного, а нескольких деревьев (рис. 3). В первом случае возникнет «воздушный змей», во втором — «паук». Если при каком-нибудь $k = k(d,n,p)$ мы сумеем доказать, что соответствующая конфигурация (воздушный змей или паук) п. н. вкладывается в случайный граф в качестве индуцированного подграфа, то мы придём к *безусловному* неравенству $t_{\max}(d,n,p) \geqslant k$. Весь пафос здесь в безусловности оценки, а вся тонкость —

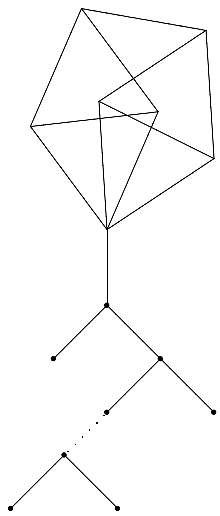

Рис. 2

в оптимальном с точки зрения её величины выборе исходного G. Техника же здесь, как правило, состоит в применении либо неравенства Чебышёва, либо уже упоминавшегося неравенства Азумы.

Замечательность идеи 2 в том, что если при заданных d, n, p мы имеем безусловную нижнюю и хотя бы условную верхнюю оценки нашей величины,

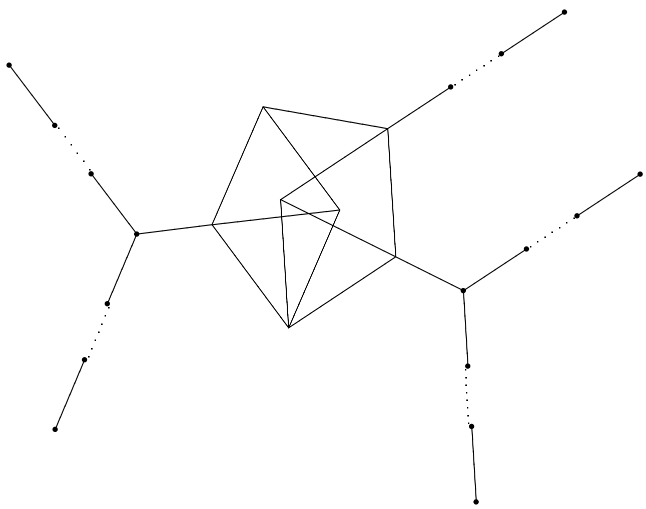

Рис. 3

то верхняя оценка также становится безусловной. Во многих ситуациях это приводит к точным по порядку результатам.

2.4. Условия несуществования величины $t_{\max}(d, n, p)$

Идея 1. Проще всего взять такое p, при котором случайный граф G почти наверное двудолен. Исходя из лёгкого критерия двудольности (граф не должен содержать простых нечётных циклов), можно написать не менее простое условие «двудольности п. н.». Из него будет следовать, что во всяком случае $p = o\left(\frac{1}{n}\right)$. В то же время ясно, что если граф двудолен, то хроматическое число любого его подграфа (хоть с малым количеством вершин, хоть с большим) не превосходит двух. Это, в свою очередь, означает, что хроматическое число меньше χ_d и, стало быть, $t_{\max}(d, n, p)$ не существует.

Идея 2. Эта идея сразу же следует из предыдущей. Только теперь необходимо более аккуратно показать, что почти наверное $\chi(G) < \chi_d$. С этой целью используются нетривиальные аналоги замечательной теоремы Б. Боллобаша (см. [12]): *в пространстве* $G(n, 0{,}5)$

$$P\left(\left\{G\colon \left|\chi(G) - \frac{n}{2\log_2 n}\right| > \frac{cn}{(\log_2 n)^2}\right\}\right) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Здесь $c > 0$ — константа, и теорема, по сути, говорит, что хроматическое число случайного графа, у которого рёбра появляются или не появляются с одной и той же вероятностью, почти наверное асимптотически ведёт себя, как $\frac{n}{2\log_2 n}$. В частности, и верхняя оценка $\chi(G)$ тут дана.

Идея 3. Можно, наконец, апеллировать к противоречиям между условными нижними и верхними оценками. Скажем, верхняя оценка, возникающая в рамках соответствующей идеи 1, часто несовместима с нижней оценкой, получаемой за счёт своей первой идеи. Понятно, что такого быть не может, и в подобных ситуациях условное допущение о существовании $t_{\max}(d, n, p)$ попросту неверно.

3. Нижние оценки хроматических чисел

В этом разделе мы вернёмся к общей задаче об оценке величины $\chi(\mathbb{R}^d, \mathcal{H}) = \chi(\mathfrak{G}^d_{\mathcal{H}})$, а именно об оценке снизу. Как правило, наиболее точные результаты даёт здесь весьма «не случайный» линейно-алгебраический метод в комбинаторике (см. [4]), значительно усиленный методом альтернирования, который был недавно предложен автором (см. [5, 7, 8]). Однако в некоторых ситуациях линейной алгебры и альтернирования всё же не хватает. К таковым, например, относится случай отыскания величины

$$\max_{a_1,\ldots,a_k \in \mathbb{Q}} \chi(\mathbb{R}^d, \{a_1, \ldots, a_k\})$$

($\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел). Конечно, из предыдущего раздела мы знаем, что графы расстояний, имеющие большое хроматическое число, скорее всего крайне редки. Тем не менее если не стремиться получить самый хороший результат, но постараться добиться любого нетривиального, то случайный граф может быть полезен. Ниже мы не станем вдаваться в технические детали, а изложим лишь общую идею подхода.

Итак, рассмотрим граф $\mathfrak{G}^d_{\mathcal{H}}$. По d и $\mathcal{H}$ мы некоторым способом построим величины $n = n(d,\mathcal{H})$, $p = p(d,\mathcal{H})$, причём p можно будет выразить, как прежде, и через n. Сам способ устроен оптимально с точки зрения окончательной оценки и потому громоздок. Допустим, нам удалось одновременно обосновать два независимых факта:

1) в пространстве $G(n,p)$ почти наверное выполнено свойство «граф $G \in \Omega$ вкладывается в $\mathfrak{G}^d_{\mathcal{H}}$»;
2) в пространстве $G(n,p)$ почти наверное $\chi(G) \geqslant \chi(d,\mathcal{H})$.

Понятно, что тогда п. н. выполнены и оба факта сразу, так что, в частности, *существует* подграф G в $\mathfrak{G}^d_{\mathcal{H}}$, имеющий хроматическое число не меньше $\chi(d,\mathcal{H})$. Значит, и $\chi(\mathfrak{G}^d_{\mathcal{H}}) \geqslant \chi(d,\mathcal{H})$. Всё в порядке, если, разумеется, мы сумели подобрать параметры так, чтобы $\chi(d,\mathcal{H})$ было нетривиально большим. Зачастую это действительно удаётся сделать.

4. Структура конечного графа расстояний с большим хроматическим числом

Как мы знаем, граф $\mathfrak{G}^d$ (запрещённое расстояния для уменьшения громоздкости снова одно) имеет достаточно большое хроматическое число, причём плотность множества тех его подграфов, на которых оно достигается, весьма незначительна. Интересно исследовать внутреннюю структуру таких «редких» графов расстояний. В общем случае эти графы строятся так: $G = (V,E)$, где

$$V = \{\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_d)\colon x_i \in \{b_1,\ldots,b_r\},\ |\{i\colon x_i = b_i\}| = l_i\},$$
$$E = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in V \times V\colon |\mathbf{x}-\mathbf{y}| = a\}.$$

Иными словами, фиксируются параметры $b_1,\ldots,b_r \in \mathbb{R}$, $l_1,\ldots,l_r \in \mathbb{N}$ $(l_1+\ldots+l_r = d)$, $a > 0$; в множество вершин входят все векторы, у которых l_i координат величины b_i, так что $|V| = \frac{d!}{l_1!\ldots l_r!}$, а рёбрами соединены те и только те вершины, евклидово расстояние между которыми равно a. Естественно, разобраться со структурой каждого такого графа — необозримая задача. Хорошо бы взять какой-нибудь показательный пример и начать исследование с него. Таким примером может служить граф G, у которого $r = 2$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $l_1 = l_2 = \frac{d}{2}$, $a = \sqrt{\frac{d}{2}}$, т. е. мы берём все $(0,1)$-векторы, имеющие одинаковое количество нулевых и единичных координатных позиций, и запрещаем этим векторам иметь один и тот же цвет в раскраске, поскольку общих ненулевых позиций у них в точности $\frac{d}{4}$ (d пусть делится на 4). Известно, что $\chi(G) \geqslant (1{,}139\ldots + o(1))^d$. Это, правда, не «рекорд», но нам подойдёт любая экспонента. По аналогии с той постановкой, которая будет дана ниже, можно без труда переформулировать и другие задачи.

Итак, пусть $G = (V, E)$ — наш граф расстояний. Построим «случайный граф расстояний», удаляя каждое ребро из E независимо от остальных с вероятностью p и не удаляя его с вероятностью $q = 1 - p$. Возникнет вероятностное пространство (вернее, последовательность вероятностных пространств) $DG(n, p) = (\Omega_n, \mathcal{B}_n, P_n)$, где n это, как обычно, число вершин (в нашем случае оно равно $C_d^{d/2}$). Тонкость заключается в том, что теперь не любые две вершины могут образовать ребро: если ребро изначально не входит в E, то его появление в принципе невозможно. Все остальные детали такие же, как и в определении $G(n, p)$. Заметим, что раньше число рёбер в полном графе равнялось $C_n^2 \asymp n^2$; теперь же оно есть $\frac{1}{2}C_d^{d/2}\bigl(C_{d/2}^{d/4}\bigr)^2 \asymp \frac{n^2}{\log n}$, и это создаёт дополнительную нетривиальность.

Многие результаты классической теории случайных графов сразу же переносятся на геометрическую ситуацию, многие претерпевают существенные изменения, а некоторым аналогов и вовсе найти пока не удаётся. В любом случае описанная модель позволяет с вероятностной точки зрения понять, как устроен конечный граф расстояний, и в динамике проследить за возникновением тех или иных его свойств. Заметим, что случайными подграфами куба занимались и раньше (см. [13]), и это тем более интересно, что куб также представляет собой один из «полных» графов расстояний. Однако он двудолен и потому для нас куда менее важен.

Литература

[1] Дистель Р. Теория графов. — Новосибирск: Изд-во Инст. мат., 2002.

[2] Колчин В. Ф. Случайные графы. — М.: Физматлит, 2002.

[3] Райгородский А. М. О хроматическом числе пространства // Успехи мат. наук. — 2000. — Т. 55, № 2. — С. 147—148.

[4] Райгородский А. М. Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств // Успехи мат. наук. — 2001. — Т. 56, № 1. — С. 107—146.

[5] Райгородский А. М. Проблема Эрдёша—Хадвигера и хроматические числа конечных геометрических графов // Докл. РАН. — 2003. — Т. 392, № 3. — С. 313—317.

[6] Райгородский А. М. Проблема Нелсона—Эрдёша—Хадвигера и вложения случайных графов в геометрический // Докл. РАН. — 2005. — Т. 403, № 2.

[7] Райгородский А. М. Проблема Эрдёша—Хадвигера и хроматические числа конечных геометрических графов // Мат. сб. — 2005. — Т. 196, № 1. — С. 123—156.

[8] Райгородский А. М. Хроматические числа метрических пространств. — Труды института математики НАН Беларуси, 2005.

[9] Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1973.

[10] Alon N., Spencer J. The Probabilistic Method. — New York: John Wiley & Sons, 2000. — Wiley—Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization.

[11] Bollobás B. Martingales, isoperimetric inequalities, and random graphs // Proceedings, Eger (1987) / A. Hajnal, L. Lovász, V. T. Sós, eds. — Colloq. Math. Soc. János Bolyai. Vol. 52. — Amsterdam: North-Holland, 1987. — P. 113—139.

[12] Bollobás B. The chromatic number of random graphs // Combinatorica. — 1988. — Vol. 8. — P. 49—56.

[13] Bollobás B. Random Graphs. — Second Edition. — Cambridge Univ. Press, 2001.

[14] De Bruijn N. G., Erdös P. A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations // Proc. Konink. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A. — 1951. — Vol. 54, no. 5. — P. 371—373.

[15] Coulson D. A 15-colouring of 3-space omitting distance one // Discrete Math. — 2002. — Vol. 256. — P. 83—90.

[16] Erdös P., Rényi A. On random graphs. I // Publ. Math. Debrecen. — 1959. — Vol. 6. — P. 290—297.

[17] Erdös P., Rényi A. On the evolution of random graphs // Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. Ser. A. — 1960. — Vol. 5. — P. 17—61.

[18] Erdös P., Rényi A. On the evolution of random graphs. II // Bull. Inst. Int. Stat. — 1961. — Vol. 38, no. 4. — P. 343—347.

[19] Hadwiger H. Ein Überdeckungssatz für den Euklidischen Raum // Portugal. Math. — 1944. — Vol. 4. — P. 140—144.

[20] Hadwiger H. Ungelöste Probleme N 40 // Elem. Math. — 1961. — Bd. 16. — S. 103—104.

[21] Janson S. New versions of Suen's correlation inequality // Random Structures Algorithms. — 1998. — Vol. 13. — P. 467—483.

[22] Larman D. G., Rogers C. A. The realization of distances within sets in Euclidean space // Mathematika. — 1972. — Vol. 19. — P. 1—24.

[23] Moser L., Moser W. Solution to problem 10 // Can. Math. Bull. — 1961. — Vol. 4. — P. 187—189.

[24] Nechushtan O. On the space chromatic number // Discrete Math. — 2002. — Vol. 256. — P. 499—507.

[25] Soifer A. Chromatic number of the plane: A historical essay // Geombinatorics. — 1991. — Vol. 1, no. 3. — P. 13—15.

[26] Soifer A. Mathematical Coloring Book. — Center for Excellence in Mathematical Education (1997).

[27] Székely L. A. Erdös on unit distances and the Szemerédi—Trotter theorems // Paul Erdös and his Mathematics. II. Based on the conference, Budapest, Hungary, July 4—11. — Bolyai Soc. Math. Stud. Vol. 11. — Berlin: Springer, 2002. — P. 649—666.

[28] Talagrand M. Concentration of measures and isoperimetric inequalities in product spaces // Publ. Math. IHES. — 1996. — Vol. 81. — P. 73—205.